

ΕΡΓΑΣΙΑ 8^η ΕΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

8.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού είναι οι εξισώσεις οι οποίες μετά από πράξεις γράφονται στη μορφή: $\alpha \cdot x = \beta$

Ο αριθμός α ονομάζεται συντελεστής του αγνώστου, ο αριθμός β σταθερός όρος και η μεταβλητή x άγνωστος.

• Διερεύνηση της εξίσωσης $\alpha \cdot x = \beta$ (1)

(i) Αν $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$ η (1) είναι έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\beta}{\alpha}$

(ii) Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0 \Leftrightarrow$ η (1) είναι αδύνατη

(iii) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0 \Leftrightarrow$ η (1) είναι ταυτότητα

(iv) Η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή ($\alpha = 0$ και $\beta = 0$)

Παράδειγμα 1:

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2(1-3x)}{5} - \frac{3(1-x)}{2} = -x + 3$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2(1-3x)}{5} - \frac{3(1-x)}{2} &= -x + 3 \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{2(1-3x)}{5} - 10 \cdot \frac{3(1-x)}{2} = -10x + 3 \cdot 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot 2(1-3x) - 5 \cdot 3(1-x) = -10x + 30 \Leftrightarrow 4(1-3x) - 15(1-x) = -10x + 30 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 - 12x - 15 + 15x = -10x + 30 \Leftrightarrow -11 + 3x = -10x + 30 \Leftrightarrow 3x + 10x = 11 + 30 \Leftrightarrow \\ 13x &= 41 \Leftrightarrow x = \frac{41}{13} \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{41}{13}$

8.2 Παραμετρικές εξισώσεις είναι αυτές που εκτός από τον άγνωστο x , έχουν και τουλάχιστον άλλο ένα γράμμα (παράμετρος)

• Λύση παραμετρικών εξισώσεων

(i) Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha \cdot x = \beta$ (1)

(ii) Παραγοντοποιούμε τα α, β

(iii) Βρίσκουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου είναι $\alpha \neq 0$

Για τις τιμές αυτές η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = \frac{\beta}{\alpha}$

(iv) Αντικαθιστούμε στην (1) τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες είναι $\alpha = 0$ και προκύπτει εξίσωση **αδύνατη** ή **ταυτότητα**

Παράδειγμα 2:

Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 5(5x+\lambda)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Λύση

$$\lambda^2(x-1) = 5(5x+\lambda) \Leftrightarrow \lambda^2x - \lambda^2 = 25x + 5\lambda \Leftrightarrow \lambda^2x - 25x = \lambda^2 + 5\lambda \Leftrightarrow (\lambda^2 - 25)\lambda = \lambda(\lambda + 5)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda+5)}_{(\alpha)} \underbrace{(\lambda-5)}_{(\beta)} x = \underbrace{\lambda}_{(\beta)} (\lambda+5) (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda+5)(\lambda-5) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -5$ και $\lambda \neq 5$ τότε η (1) έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda(\lambda+5)}{(\lambda+5)(\lambda-5)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda-5}$$

(ii) Για $\lambda = 5$ η (1) γράφεται: $0x = 50$, άρα είναι αδύνατη

Για $\lambda = -5$ η (1) γράφεται: $0x = 0$, άρα είναι ταυτότητα

8.3 Εξισώσεις που λύνονται με παραγοντοποίηση

- Όλα στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιούμε
- Δεν απλοποιούμε παράγοντα που έχει τον άγνωστο
- Εξισώνουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Παράδειγμα 3:

Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - x = x^2 - 1$.

Λύση

$$x^3 - x = x^2 - 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=-1$$

8.4 Κλασματικές εξισώσεις είναι αυτές στις οποίες υπάρχει άγνωστος x , σε παρονομαστή

• **Παραγοντοποιούμε** τους παρονομαστές και βρίσκουμε το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** τους.

• Το Ε.Κ.Π. ισούται με το γινόμενο όλων των παραγόντων, από μία φορά με την μεγαλύτερη δύναμη με την οποία εμφανίζονται.

• **Περιορισμοί**

Βρίσκουμε για ποιες τιμές του αγνώστου είναι **Ε.Κ.Π. $\neq 0$**

• **Απαλοιφή Παρονομαστών.**

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Για ευκολία γράφουμε τους παρονομαστές σε μορφή γινομένου

• **Δεκτές** ρίζες είναι αυτές που πληρούν τους περιορισμούς

Παράδειγμα 4:

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{x+2} - \frac{5x-10}{x^2-2x} = -\frac{16}{x^2+2x}$.

Λύση

• **Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές**

$$\cdot x+2=x+2$$

$$\cdot x^2-2x=x(x-2)$$

$$\cdot x^2+2x=x(x+2)$$

• **Βρίσκουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο**

$$\text{Ε.Κ.Π.} = x(x-2)(x+2)$$

• **Περιορισμοί**

$$\text{Ε.Κ.Π.} \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

• Απαλοιφή Παρονομαστών

$$x(x-2)(x+2)\frac{x}{x+2} - x(x-2)(x+2)\frac{5x-10}{x(x-2)} = -x(x-2)(x+2)\frac{16}{x(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x+2)(5x-10) = -16(x-2) \Leftrightarrow x^2(x-2) - 5(x+2)(x-2) + 16(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 5(x+2) + 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ή } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$$

Δεκτή μόνο η $x=3$

8.5 Εξισώσεις με απόλυτες τιμές

• Υπενθυμίσεις:

1) Η εξίσωση $|x| = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\bullet |x| = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$\bullet |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και αδύνατη αν } (\alpha < 0)$$

2) Η εξίσωση $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$

8.5.1 Εξισώσεις της μορφής: $|A(x)| = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\bullet \text{Av } (\alpha > 0): |A(x)| = \alpha \Leftrightarrow A(x) = \pm \alpha$$

$$\bullet \text{Av } (\alpha = 0): |A(x)| = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$$

$$\bullet \text{Av } (\alpha < 0): |A(x)| = \alpha \text{ αδύνατη}$$

Παράδειγμα 5: Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\alpha) ||x| - 2| = 3$$

$$\beta) |x^3 - x| = 0$$

$$\gamma) ||x| + 2| = -3$$

Λύση

$$\alpha) ||x| - 2| = 3 \Leftrightarrow (|x| - 2 = 3 \text{ ή } |x| - 2 = -3) \Leftrightarrow (|x| = 5 \text{ ή } |x| = -1) \Leftrightarrow (x = \pm 5 \text{ ή } \text{αδύνατη})$$

Άρα λύσεις της εξίσωσης οι αριθμοί $-5, 5$

$$\beta) |x^3 - x| = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1$$

Άρα λύσεις της εξίσωσης οι αριθμοί $-1, 0, 1$.

$$\gamma) |x| + 2 = -3 \text{ (αδύνατη)}$$

8.5.2 Εξισώσεις της μορφής: $|A(x)| = |B(x)|$

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = B(x) \text{ ή } A(x) = -B(x)$$

Παράδειγμα 6: Να λύσετε την εξίσωση: $|x| - 3 = |2x| - 5$

Λύση

$$\begin{aligned} |x| - 3 &= |2x| - 5 \Leftrightarrow (|x| - 3 = 2|x| - 5 \text{ ή } |x| - 3 = -2|x| + 5) \Leftrightarrow \\ (|x| - 2|x| &= 3 - 5 \text{ ή } |x| + 2|x| = 3 + 5) \Leftrightarrow (|x| = 2 \text{ ή } 3|x| = 8) \Leftrightarrow (|x| = 2 \text{ ή } |x| = \frac{8}{3}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x &= \pm 2 \text{ ή } x = \pm \frac{8}{3}). \text{ Άρα λύσεις της εξίσωσης οι αριθμοί } -\frac{8}{3}, -2, 2, \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

8.5.3 Εξισώσεις της μορφής: $|A(x)| + |B(x)| = 0$

Επειδή $|A(x)| \geq 0, |B(x)| \geq 0$ έχουμε: $|A(x)| + |B(x)| = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ και } B(x) = 0$

Λύνουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις και επιλέγουμε τις κοινές λύσεις (αν υπάρχουν)

Παράδειγμα 7 Να λύσετε την εξίσωση: $|x| - 1 + |x^2 - x| = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} |x| - 1 + |x^2 - x| &= 0 \Leftrightarrow (|x| - 1 = 0 \text{ και } x^2 - x = 0) \Leftrightarrow (|x| = 1 \text{ και } x(x-1) = 0) \Leftrightarrow \\ (x &= 1 \text{ ή } x = -1 \text{ και } x = 0 \text{ ή } x = 1) \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

8.5.4 Εξισώσεις της μορφής: Η εξίσωση $|A(x)| = B(x)$

- Λύνουμε τις εξισώσεις: $A(x) = B(x)$, $A(x) = -B(x)$
- Εξετάζουμε ποιες από τις λύσεις που βρήκαμε επαληθεύουν την $|A(x)| = B(x)$

Παράδειγμα 8 Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 1| = x - 1$

$$|2x+1|=x-1 \Leftrightarrow 2x+1=x-1 \text{ ή } 2x+1=-x+1 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=0$$

- Για $x=0$ η εξίσωση γράφεται $|2 \cdot 0 + 1| = 0 - 1 \Leftrightarrow |1| = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$ (άτοπο)
- Για $x=-2$ η εξίσωση γράφεται $|2 \cdot (-2) + 1| = -2 - 1 \Leftrightarrow |-4 + 1| = -3 \Leftrightarrow 3 = -3$ (άτοπο)

Απορρίπτονται και οι δύο γιατί καμία δεν επαληθεύει την αρχική εξίσωση

8.6 Προβλήματα με εξισώσεις

A. Βασικές έννοιες

α. Ονομάζουμε x αυτό που ζητάμε. Αν ζητάμε **περισσότερα** ονομάζουμε x το μικρότερο ή αυτό που μπορεί να συγκριθεί με τα άλλα.

β. Το διπλάσιο, τριπλάσιο,... του x είναι $2x, 3x, \dots$ ενώ τα $\frac{3}{4}$ του x είναι $\frac{3x}{4}$.

γ. Αυξάνω σημαίνει προσθέτω, ελαττώνω σημαίνει αφαιρώ.

δ. Αν A είναι το άθροισμα δύο αριθμών, τότε ο ένας είναι το x και ο άλλος το $A-x$.

ε. Αν Δ είναι η διαφορά δύο αριθμών, τότε ο μικρός είναι το x και ο μεγάλος το $\Delta+x$.

ζ. Το 15% του x είναι $\frac{15x}{100}$

η. Στην ομαλή κίνηση ισχύει: $S = v \cdot t$

B. Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με εξίσωση ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- 1ο Εισαγωγή αγνώστων.
- 2ο Δημιουργία εξίσωσης.
- 3ο Λύση της εξίσωσης.
- 4ο Περιορισμοί του προβλήματος.
- 5ο Απάντηση.

Παράδειγμα 9:

Μία πισίνα έχει διαστάσεις 10m και 6m. Θέλουμε να διπλασιάσουμε την επιφάνεια της και αυξάνουμε την μεγάλη διάσταση κατά 5m. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε την μικρότερη;

Λύση

Η επιφάνεια της πισίνας είναι $E = 10m \cdot 6m = 60m^2$.

Έστω ότι αυξάνουμε την μικρότερη διάσταση κατά xm , άρα η πισίνα θα έχει διαστάσεις $(10+5)m = 15m$ και $(6+x)m$.

Το εμβαδόν της θα είναι $E' = 15m \cdot (6+x)m = (90+15x)m^2$

Είναι $E' = 2E \Leftrightarrow 90+15x = 2 \cdot 60 \Leftrightarrow 90+15x = 120 \Leftrightarrow 15x = 30 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα πρέπει να αυξήσουμε την μικρότερη διάσταση κατά 2m

Παράδειγμα 10:

Δύο αυτοκίνητα Α,Β ξεκινούν ταυτόχρονα με σταθερές ταχύτητες 80km/h και 120 km/h αντίστοιχα. Σε πόσα λεπτά η μεταξύ τους απόσταση θα είναι 1Km, 10Km;

Λύση

Σε t ώρες το αυτοκίνητο Α θα έχει διανύσει απόσταση $S_1 = 80 \cdot t$ και το αυτοκίνητο Β $S_2 = 120 \cdot t$

- Θα πρέπει

$$S_2 - S_1 = 1\text{km} \Leftrightarrow 120 \cdot t - 80t = 1 \Leftrightarrow 40t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{40}\text{h} \Leftrightarrow t = \frac{1}{40}60\text{min} = 1,5\text{min}$$

- Αφού τα αυτοκίνητα κινούνται με σταθερή ταχύτητα θα απέχουν μεταξύ τους 10Km, σε χρόνο $t = 10 \cdot 1,5\text{min} = 15\text{min}$

Παράδειγμα 11:

Ένας ποδηλάτης διανύει μια απόσταση 150km με σταθερή ταχύτητα. Αν αυξήσει την ταχύτητα του κατά 5km/h, θα φτάσει στο τέρμα μια ώρα νωρίτερα. Να βρείτε την ταχύτητα του ποδηλάτη.

Λύση

Αν είναι $v > 0$ ταχύτητα του ποδηλάτη, τότε διανύει την απόσταση σε χρόνο $t_1 = \frac{150}{v}$.

Αν αυξήσει την ταχύτητα του κατά 5km/h θα διανύει την απόσταση σε χρόνο $t_2 = \frac{150}{v+5}$

$$\text{Είναι } t_2 = t_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{150}{v+5} = \frac{150}{v} - 1 \Leftrightarrow v(v+5) \frac{150}{v+5} = v(v+5) \cdot \frac{150}{v} - 1 \cdot v(v+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 150v = 150 \cdot (v+5) - v \cdot (v+5) \Leftrightarrow 150v = 150v + 750 - v^2 - 5v \Leftrightarrow v^2 + 5v - 750 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 + (25 - 5)v + (25 \cdot (-5)) = 0 \Leftrightarrow (v - 25)(v + 5) = 0 \Leftrightarrow v = 25 \quad (v > 0)$$

Άρα η ταχύτητα του ποδηλάτη είναι $v = 25\text{km/h}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 8.1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2(x-5) = 7x - 40$

β) $7(x+1) = -x + 8(x+1)$

γ) $-4x = 9x$

δ) $x = -x + 1$

ε) $6(x-2) = 4(x-1) + 2(x-4)$

στ) $2x - 1 + 5^{30} = -3x - 11 + 5^{30}$

ζ) $\frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{5}$

η) $\frac{x+6}{3} + \frac{x+1}{2} = x + 5$

θ) $\frac{x-2}{3} + \frac{11}{12} = \frac{1-2x}{4}$

Άσκηση 8.2. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $(2\lambda - 4)x = \lambda - 4$ να είναι αδύνατη.

Άσκηση 8.3. α) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $1 + 2(x - \lambda) = -5 + \lambda$ να έχει ρίζα το 3.

β) Ομοίως η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x = 2(\lambda - 1)(\lambda + 2)$ να έχει λύση την $x = 2$.

Άσκηση 8.4. Δίνονται οι εξισώσεις: $\lambda^2 x = 4x + 2$ και $\lambda^2 x - 11 = 2\lambda x$

Να βρείτε το λ ώστε να είναι και οι δύο συγχρόνως αδύνατες.

Άσκηση 8.5. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πάντοτε λύση.

α) $\lambda(\lambda x - 1) = 1 - 2x$

β) $(2\alpha - \beta)(x + \alpha) - (2\alpha + \beta)(x - \alpha) = 4\alpha(\alpha - \beta)$

γ) $\lambda^2(x - \lambda) - \lambda(x - 1) = 0$

δ) $(x + \lambda)^2 = 2\lambda(\lambda - \mu) + (x + \mu)^2$

Άσκηση 8.6. Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x - 1) + 4 = \mu(x + 1)$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να είναι: α) Ταυτότητα β) Αδύνατη

Άσκηση 8.7. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ και στη συνέχεια να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση: $\lambda x + 5\lambda = \lambda^2 + 2x + 6$

α) Να έχει μοναδική ρίζα το 1.

β) Να είναι ταυτότητα

γ) Να έχει ρίζα το 1.

Άσκηση 8.8. Αν η εξίσωση $(3-\lambda)x+2=4+2\mu$ είναι αδύνατη, τότε η εξίσωση $2\mu x+\lambda=3-2x$ έχει μοναδική λύση η οποία να βρεθεί.

Άσκηση 8.9. Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των αντιστοίχων παραμέτρων $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) (\lambda-1)x = \lambda-1$$

$$\beta) (\lambda-1)x = -1$$

$$\gamma) \lambda(\lambda-1)x = \lambda-1$$

$$\delta) (\lambda-1)x = \lambda^2 - \lambda$$

$$\epsilon) (\lambda^2 - 2\lambda)x = \lambda^2 - 4$$

$$\sigma\tau) \lambda^3 x - 2 = (4x+1)\lambda$$

$$\zeta) \mu^3 x - \mu^2 - 4 = 4\mu(x-1)$$

$$\eta) \mu^3(x-1)x = 4\mu x + 8$$

$$\theta) \frac{x+\alpha}{x-\alpha} + \frac{x+\beta}{x-\beta} = 2$$

$$i) (\alpha x - \beta)^2 + (\beta x - 1)^2 = (\beta x - \alpha)^2 + (\alpha x - 1)^2$$

Άσκηση 8.10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 2x = 3x^2 - 4x$$

$$\beta) 2x(x+2) + 3x(x-2) = 5(x-2)(x+2)$$

$$\gamma) (x+1)^2 + (x-2)^2 = 2(x-3)^2$$

$$\delta) (x+2)^2 = x^2 - 4$$

$$\epsilon) x^2(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\sigma\tau) x^3 - 2x^2 = x - 2$$

$$\zeta) (x-2)^3 = x-2$$

$$\eta) x^3 - 9x = 0.$$

Άσκηση 8.11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) |x|^3 = 4x^2$$

$$\beta) x^3 + x = x^2 + 1$$

$$\gamma) x^3 + x = 2x^2$$

$$\delta) x^3 = 2|x|$$

$$\epsilon) \frac{x^2-4}{x-2} = 3$$

$$\sigma\tau) \frac{4}{x+2} + \frac{3x}{x-2} + \frac{3x^2-8}{4-x^2} = 0$$

Άσκηση 8.12. Να λυθούν οι εξισώσεις: $\alpha) d(2x, 3) = 5$ $\beta) |2x-3| = -1$ $\gamma) |2x-3| = 0$

Άσκηση 8.13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{3|x-1|+1}{2} + \frac{2|1-x|-1}{2} = \frac{|x-1|+2}{4}$$

$$\beta) (4|x|+1)(3|-x|-2) = (6|-x|+5)(2|x|-1)$$

$$\gamma) \frac{3 \cdot |x+2|}{4} + \frac{2 \cdot |2x+4|-1}{3} = |-x-2|$$

$$\delta) \frac{2|x-\frac{1}{2}|-1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{3-|1-2x|}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{|6x-3|-12}{12}$$

Άσκηση 8.14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) |2x-3|=5$$

$$\beta) d(3x,6)=d(x,-2)$$

$$\gamma) \frac{3|x|-1}{2}+2|x|+4=0$$

$$\delta) |2|x-1|-1|=5$$

$$\epsilon) |x+2| \cdot |2x-3|=|x+2|$$

$$\sigma\tau) \left| \frac{x+4}{x+5} \right| = 2$$

Άσκηση 8.15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) |x-4|=5x-2$$

$$\beta) 2|x+1|-3(1-x)=1$$

$$\gamma) \sqrt{x^2}=|2x-3|$$

$$\delta) \sqrt{x^2-6x+9}=|x+4|$$

Άσκηση 8.16. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) |x-1|+|x^2-1|=0$$

$$\beta) |x^2+3x|+|x^2-9|=0$$

$$\gamma) (x+1)^2+|y-2|\leq 0$$

$$\delta) |x+2|+|x^2-4|=0$$

$$\epsilon) |x^2+2x+1|-|x^2+3|-5x-3=0$$

$$\sigma\tau) |4x^2+4x+1|-2|x^2+1|=2+2x^2$$

Άσκηση 8.17. Ένας μαθητής για κάθε μάθημα που αρίστευε έπαιρνε από τον πατέρα του 20 € ενώ για κάθε μάθημα στο οποίο δεν αρίστευε έπαιρνε 2 €. Αν για 14 μαθήματα πήρε 208 € σε πόσα μαθήματα αρίστευσε ;

Άσκηση 8.18. Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 40, αν ο ένας είναι επταπλάσιος του άλλου.

Άσκηση 8.19. Ποιον αριθμό θα προσθέσουμε στους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{3}{2}$ και $\frac{7}{3}$ για να γίνουν ίσα.

Άσκηση 8.20. Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν ταυτόχρονα από τις πόλεις Α και Β με σταθερές ταχύτητες 80km/h και 60 km/h. Αν οι πόλεις απέχουν 280 Km να βρείτε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν

Άσκηση 8.21. Ένας έμπορος είχε δύο τόπια ύφασμα, που το πρώτο ήταν τριπλάσιο του δεύτερου. Από το πρώτο πούλησε 36m και από το δεύτερο 4m και έγιναν ίσα. Να βρείτε το μήκος του καθενός .

Άσκηση 8.22. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς με άθροισμα 39. Ομοίως τρεις διαδοχικούς περιττούς.

Άσκηση 8.23. Να βρείτε έναν αριθμό του οποίου το τριπλάσιο αυξημένο κατά 6, ισούται με το πενταπλάσιό του ελαττωμένο κατά 2.

Άσκηση 8.24. Ένας έμπορος αυγών πούλησε τα μισά αυγά και μισό αυγό και του έμειναν 10. Πόσα είχε στην αρχή;

Άσκηση 8.25. Ο Α σήμερα έχει τριπλάσια ηλικία από τον Β. Σε 15 χρόνια ο Α θα έχει διπλάσια από τον Β. Τι ηλικία έχουν σήμερα οι Α και Β;

Άσκηση 8.26. Δύο λιμάνια Α και Β απέχουν 105 μίλια. Ένα πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Α με κατεύθυνση το Β, με ταχύτητα 24 μίλια ανά ώρα. Μετά από μια ώρα ένα δεύτερο πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Β με κατεύθυνση το Α, με ταχύτητα 30 μίλια ανά ώρα. Σε πόσο χρόνο από τον απόπλου του πρώτου πλοίου θα συναντηθούν; Πόσο απέχει το σημείο συνάντησης από τα δύο λιμάνια;

Άσκηση 8.27. Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 4 ώρες ενώ μια άλλη σε 12 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσουν την δεξαμενή και οι δύο μαζί;

Άσκηση 8.28. Σε ένα κουρείο ο πελάτης ρώτησε τον κουρέα τι του οφείλει και εκείνος απάντησε: «άνοιξε το συρτάρι, δες πόσα έχει μέσα, βάλε άλλα τόσα και πάρε 10 ευρώ». Το ίδιο έγινε και άλλες δύο φορές με άλλους δύο πελάτες και την τελευταία φορά δεν έμεινε τίποτα στο συρτάρι. Πόσα ευρώ βρήκε στο συρτάρι ο πρώτος και πόσα οι άλλοι δύο;

Τράπεζα Θεμάτων

8.29 ΑΣΚΗΣΗ 2-485

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)
- γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

8.30 ΑΣΚΗΣΗ 2-507

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 6)
- β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

8.31 ΑΣΚΗΣΗ 2-1055

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$. (Μονάδες 12)
β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

8.32 ΑΣΚΗΣΗ 2-2702

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)
β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

8.33 ΑΣΚΗΣΗ 2-3382

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

- α) Να δείξετε ότι: $A = 4$. (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$. (Μονάδες 13)

8.34 ΑΣΚΗΣΗ 2-4302

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
i) όταν $\alpha = 1$ (Μονάδες 5)
ii) όταν $\alpha = -3$ (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

8.35 ΑΣΚΗΣΗ 2-4302

12917. Δίνεται η εξίσωση $(|a - 1| - 3)x = a + 2$ (1) με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a = 0$ και $a = 5$. (Μονάδες 8)
β) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a - 1| = 3$. (Μονάδες 8)
ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα β) i. (Μονάδες 9)

8.36 ΑΣΚΗΣΗ 2-4302

14649. Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$. (Μονάδες 12)
β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.
ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 13)