

Μάθημα 11 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

11.1 Συνοπτική θεωρία

- **Πολυώνυμο του x** ονομάζεται κάθε παράσταση της μορφής:
 $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Ένα πολυώνυμο συμβολίζεται συνήθως με $P(x), Q(x), f(x), \dots$

- **Όροι του πολυωνύμου** λέγονται τα μονώνυμα $\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_1 x, \alpha_0$
- **Συντελεστές του πολυωνύμου** λέγονται οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$.
- **Σταθερός όρος του πολυωνύμου** λέγεται ο αριθμός α_0 .
- **Σταθερό πολυώνυμο** λέγεται κάθε πολυώνυμο της μορφής $P(x) = \alpha_0$.

Ειδικά το πολυώνυμο $P(x) = 0$ λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

- **Βαθμός του πολυωνύμου** είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής x , της οποίας ο συντελεστής είναι **διάφορος του μηδενός**.
 - Ο βαθμός κάθε **σταθερού αλλά μη μηδενικού** πολυωνύμου είναι μηδέν.
 - Για το **μηδενικό** πολυώνυμο **δεν ορίζεται** βαθμός.
 - Ο βαθμός του **αθροίσματος** δύο πολυωνύμων $P(x), Q(x)$ είναι μικρότερος ή ίσος του μεγαλύτερου βαθμού των πολυωνύμων $P(x), Q(x)$.
 - Ο βαθμός του **γινομένου** δύο πολυωνύμων $P(x), Q(x)$ ισούται με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων $P(x), Q(x)$.
 - Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού n , ο βαθμός του $P[P(x)]$ είναι n^2 .

- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού n , ο βαθμός του $[P(x)]^m$ είναι $n \cdot m$
- **Ισότητα**, δύο πολυώνυμα λέγονται **ίσα** όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των **ομοβάθμιων** όρων τους είναι **ίσοι**.
- **Αριθμητική τιμή** του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ για $x = \rho \in \mathbb{R}$ λέγεται ο πραγματικός αριθμός

$$P(\rho) = \alpha_n \cdot \rho^n + \alpha_{n-1} \cdot \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot \rho + \alpha_0$$

Σχόλιο: $P(1) = \alpha_n \cdot 1^n + \alpha_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_0 = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0$

Δηλαδή η αριθμητική τιμή κάθε πολυωνύμου για $x=1$, ισούται με το άθροισμα των συντελεστών του.

- Ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ο πραγματικός αριθμός ρ , για τον οποίο $P(\rho) = 0$

* **Σχόλιο:** Αν το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου ισούται με το μηδέν, τότε το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$\alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow \text{το } x=1 \text{ είναι ρίζα του } P(x)$$

11.2.ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1: Ασκήσεις στις οποίες ζητείται:

α). Να βρούμε την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου για $x = \rho \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστούμε όπου x το ρ και υπολογίζουμε το $P(\rho)$.

β). Να δείξουμε ότι ένας αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου.

Αποδεικνύουμε ότι $P(\rho) = 0$

γ). Η εύρεση παραμέτρων έτσι ώστε ένα ή δύο πολυώνυμα να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες, όπως:

- Ένα πολυώνυμο είναι σταθερό ή μηδενικό
- Δύο πολυώνυμα είναι ίσα.

- Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολωνύμου ($P(\rho)=0$)
- Η αριθμητική τιμή ενός πολωνύμου για $x=\alpha$ είναι ίση με β . ($P(\alpha)=\beta$)

Τότε ερμηνεύουμε αλγεβρικά τις εξισώσεις, σχηματίζουμε σύστημα το οποίο και επιλύουμε.

Εφαρμογή – Παράδειγμα 1.

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (\alpha - 1)x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + 5\alpha x - 1 \text{ και } Q(x) = (2 - \beta)x^3 + 3(1 - \alpha)x^2 + (\alpha^2 + 4)x - \beta^2$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

- τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ να είναι ίσα.
- το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι πρώτου βαθμού.

Λύση

α) Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ είναι ίσα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 2 - \beta \\ \beta - 2\alpha = 3(1 - \alpha) \\ 5\alpha = \alpha^2 + 4 \\ -1 = -\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - \beta \\ \beta = 3 - \alpha \\ \alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - \beta \\ \alpha + \beta = 3 \\ \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 4 \\ \beta = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και } \beta = -1.$$

β) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0 \\ 5\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}, \text{ οπότε } \alpha = 1 \text{ και } \beta = 2$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 2.

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x^3 - (\lambda^2 - \lambda - 2)x + \lambda - 2 \text{ είναι:}$$

- σταθερό πολυώνυμο
- πολυώνυμο μηδενικού βαθμού
- το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2 \end{cases}, \text{ δηλαδή αν και μόνο αν } \lambda = 2$$

β) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \\ \lambda - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2 \\ \lambda \neq 2 \end{cases}, \text{ δηλαδή αδύνατο}$$

γ) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}, \text{ δηλαδή αν και μόνο αν } \lambda = 2$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 3.

Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ δείξτε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + \gamma - \alpha$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση

Από γνωστή ταυτότητα έχουμε: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$

Οπότε αφού $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ θα είναι $\alpha = \beta = \gamma$

Άρα $P(x) = (\alpha - \alpha)x^2 + (\alpha - \alpha)x + \alpha - \alpha = 0$ μηδενικό πολυώνυμο

Εφαρμογή – Παράδειγμα 4.

Αν $P(x) = x^2 + 2x + 5$ να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $P(\alpha - 1) = 13$

Λύση

Για να βρούμε το $P(\alpha-1)$ αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο τον x με το $\alpha-1$ και έχουμε:

$$P(\alpha-1) = (\alpha-1)^2 + 2(\alpha-1) + 5 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 2\alpha - 2 + 5 = \alpha^2 + 4$$

$$\text{Είναι } P(\alpha-1) = 13 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 = 13 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -3$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 5.

Αν ο $\rho = 1$ είναι κοινή ρίζα των πολυωνύμων

$$P(x) = \mu x^3 - (\lambda + 3)x^2 + (4\lambda - 1)x - 6 \text{ και } Q(x) = x^3 + (\lambda - 1)x^2 - x - 2\mu \text{ να βρείτε τα } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Αφού το 1 είναι ρίζα των πολυωνύμων, θα έχουμε:

$$P(1) = 0 \Rightarrow \mu \cdot 1^3 - (\lambda + 3) \cdot 1^2 + (4\lambda - 1) \cdot 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow \mu - \lambda - 3 + 4\lambda - 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow \mu + 3\lambda = 10 \quad (1)$$

$$Q(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + (\lambda - 1)1^2 - 1 - 2\mu = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda - 1 - 1 - 2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2\mu = 1 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2)

$$\begin{cases} \mu + 3\lambda = 10 \\ -2\mu + \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu + 3\lambda = 10 \\ \lambda = 1 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu + 3(1 + 2\mu) = 10 \\ \lambda = 1 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\mu = 7 \\ \lambda = 1 + 2\mu \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Άρα τελικά $\mu = 1$ και $\lambda = 3$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 6.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4\lambda x^2 + 2\kappa x + \lambda^2$

Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το -1 να είναι ρίζα του πολυωνύμου και η αριθμητική του τιμή για $x = 1$ να είναι -2 .

Λύση

Αφού το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ έχουμε:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow 3(-1)^3 + 4\lambda(-1)^2 + 2\kappa(-1) + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow -3 + 4\lambda - 2\kappa + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 2\kappa - 3 = 0 \quad (1)$$

Αφού για $x=1$ η αριθμητική του τιμή για είναι -2 έχουμε:

$$P(1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1^3 + 4\lambda \cdot 1^2 + 2\kappa \cdot 1 + \lambda^2 = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 2\kappa + 5 = 0 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2)

$$\begin{cases} \lambda^2 + 4\lambda - 2\kappa - 3 = 0 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 2\kappa + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 4\lambda = 2\kappa + 3 \\ \lambda^2 + 4\lambda = -2\kappa - 5 \end{cases} \Rightarrow 2\kappa + 3 = -2\kappa - 5 \Leftrightarrow 4\kappa = -8 \Leftrightarrow \kappa = -2$$

Για $\kappa = -2$ η (1) γράφεται

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 3 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + 2 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{3}$$

Άρα τελικά $\kappa = -2$ και $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$

Μέθοδος 2

Ζητείται να βρεθεί ένα πολυώνυμο το οποίο να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. (Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών)

- Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε (αν δεν δίνεται το βαθμό του)

Αν είναι π.χ. νιοστού βαθμού, υποθέτουμε ότι είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \alpha_v \neq 0$$

- Αντικαθιστούμε στη δοθείσα σχέση κάνουμε πράξεις και από τον ορισμό της ισότητας πολυωνύμων προσδιορίζουμε τους συντελεστές $\alpha_v, \alpha_{v-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$, άρα και το $P(x)$.

- Το ζητούμενο πολυώνυμο μπορεί να είναι το πηλίκο μιας ευκλείδειας Διαίρεσης

Εφαρμογή – Παράδειγμα 7.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$ να είναι τετράγωνο του $Q(x) = x^2 + \gamma x + 1$.

Λύση

Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$ είναι τετράγωνο του $Q(x) = x^2 + \gamma x + 1$ αν και μόνο αν $P(x) = (Q(x))^2$

Είναι

$$(Q(x))^2 = (x^2 + \gamma x + 1)^2 = x^4 + \gamma^2 x^2 + 1 + 2\gamma x^3 + 2x^2 + 2\gamma x = x^4 + 2\gamma x^3 + (\gamma^2 + 2)x^2 + 2\gamma x + 1$$

$$\text{Έχουμε } P(x) = (Q(x))^2 \Leftrightarrow x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1 = x^4 + 2\gamma x^3 + (\gamma^2 + 2)x^2 + 2\gamma x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha = 2\gamma \\ \beta = \gamma^2 + 2 \\ 1 = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{4} + 2 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{9}{4} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Άρα τελικά } \alpha = -1, \beta = \frac{9}{4} \text{ και } \gamma = \frac{1}{2}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 8.

Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει

$$(2x-1)P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Η δοθείσα σχέση ισχύει μόνο όταν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 2ου βαθμού, δηλαδή όταν είναι της μορφής $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$

Έχουμε:

$$(2x-1)P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \Rightarrow (2x-1)(ax^2 + \beta x + \gamma) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax^3 + 2\beta x^2 + 2\gamma x - ax^2 - \beta x - \gamma = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^3 + (2\beta - \alpha)x^2 + (2\gamma - \beta)x - \gamma = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2 \\ 2\beta - \alpha = -5 \\ 2\gamma - \beta = 4 \\ -\gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta - 1 = -5 \\ 2\gamma - \beta = 4 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta = -4 \\ 2 - \beta = 4 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -2 \text{ και } \gamma = 1$$

Άρα τελικά είναι $P(x) = x^2 - 2x + 1$

Εφαρμογή - Παράδειγμα 9.

Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύει ότι $P(0) = 0$ και $P(x+1) - P(x) = x(x+1), x \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\text{Για } x=0 \text{ η δοθείσα γράφεται } P(1) - P(0) = 0 \stackrel{(P(0)=0)}{\Leftrightarrow} P(1) = 0$$

$$\text{Για } x=1 \text{ η δοθείσα γράφεται } P(2) - P(1) = 2 \stackrel{(P(1)=0)}{\Leftrightarrow} P(2) = 2$$

$$\text{Για } x=-1 \text{ η δοθείσα γράφεται } P(0) - P(-1) = 0 \stackrel{(P(0)=0)}{\Leftrightarrow} P(-1) = 0$$

Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού θα είναι της μορφής

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha \neq 0$$

Έχουμε:

$$P(0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 + \delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0, \text{ οπότε } P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x, \alpha \neq 0$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (1)$$

$$P(2) = 2 \Rightarrow \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \quad (2)$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot (-1)^3 + \beta \cdot (-1)^2 + \gamma(-1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta - \gamma = 0 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2), (3)

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \gamma + \beta + \gamma = 0 \\ 4(\beta - \gamma) + 2\beta + \gamma = 1 \\ \alpha = \beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 0 \\ 6\beta - 3\gamma = 1 \\ \alpha = \beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -3\gamma = 1 \\ \alpha = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = -\frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα τελικά $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x$

Εφαρμογή - Παράδειγμα 10.

Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει: $P(P^2(x)) = 8x^2 + 4x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$

Έστω ότι το $P(x)$ είναι βαθμού n , τότε το $P^2(x)$ θα είναι βαθμού $2n$ και το $P(P^2(x))$ θα είναι βαθμού $2n^2$, άρα για να έχει έννοια η ισότητα θα πρέπει

$$2n^2 = 2 \Leftrightarrow n^2 = 1 \stackrel{(n \in \mathbb{N}^*)}{\Leftrightarrow} n = 1$$

Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού θα είναι της μορφής

$$P(x) = \alpha x + \beta, \alpha \neq 0$$

$$\text{Έχουμε } P^2(x) = (\alpha x + \beta)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 \text{ και}$$

$$P(P^2(x)) = \alpha(\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2) + \beta = \alpha^3 x^2 + 2\alpha^2\beta x + \alpha\beta^2 + \beta$$

$$\text{Οπότε } P(P^2(x)) = 8x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \alpha^3 x^2 + 2\alpha^2\beta x + \alpha\beta^2 + \beta = 8x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 8 \\ 2\alpha^2\beta = 4 \\ \alpha\beta^2 + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ 2 \cdot 2^2\beta = 4 \\ 2\beta^2 + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ 2\beta = 1 \\ 2\beta^2 + \beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \beta = -1 \text{ ή } \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ και } \beta = \frac{1}{2}$$

Άρα τελικά $P(x) = 2x + \frac{1}{2}$

Μέθοδος 3.**Ασκήσεις που αναφέρονται στο βαθμό ενός πολυωνύμου:**

- α. Εύρεση βαθμού για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου.
 β. Εύρεση παραμέτρων ώστε το πολυώνυμο να είναι:

- Νιοστού βαθμού
- Το πολύ νιοστού βαθμού
- Τουλάχιστον νιοστού βαθμού
- Μηδενικού βαθμού

Εφαρμογή – Παράδειγμα 11.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 1)x^3 + (4 - \beta)x^2 + (\gamma - 2)x - \delta + 5$.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι:

- α) Τρίτου βαθμού
 β) Το πολύ δευτέρου βαθμού
 γ) Τουλάχιστον πρώτου βαθμού
 δ) Μηδενικού βαθμού
 ε) Το μηδενικό πολυώνυμο

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού αν και μόνο αν $\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$

β) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το πολύ δευτέρου βαθμού αν και μόνο αν δεν είναι τρίτου βαθμού, δηλαδή $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

γ) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τουλάχιστον πρώτου βαθμού αν και μόνο αν $\gamma - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 2$

δ) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ 4 - \beta = 0 \\ \gamma - 2 = 0 \\ -\delta + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 2 \\ \delta \neq 5 \end{cases}$$

ε) Το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ 4 - \beta = 0 \\ \gamma - 2 = 0 \\ -\delta + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 2 \\ \delta = 5 \end{cases}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 12.

Να βρεθεί ο βαθμός του $P(x) = (\lambda - \lambda^3)x^4 + (\lambda^2 + \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda^3)x + 1 - \lambda^2$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

Λύση

Ο βαθμός του πολυωνύμου καθορίζεται από τον συντελεστή $(\lambda - \lambda^3)$ του x^4

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda - \lambda^3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda^2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, τότε το πολυώνυμο είναι τετάρτου βαθμού.
- Για $\lambda = 0$ έχουμε $P(x) = 1$ άρα είναι μηδενικού βαθμού
- Για $\lambda = 1$ έχουμε $P(x) = 2x^2 + 2x$ άρα είναι δευτέρου βαθμού
- Για $\lambda = -1$ έχουμε $P(x) = 0$ μηδενικό πολυώνυμο, άρα στερείται βαθμού

Άσκηση 200. Βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμητικές τιμές του πολυωνύμου $P(x) = x^3 + (2\alpha - \beta)x^2 + (2 - \alpha)x + \beta - \alpha$ για $x = -1$ και $x = 2$ να είναι 3 και -1 αντίστοιχα.

Άσκηση 201. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 8x + 5$. Να προσδιοριστεί ο αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ αν ισχύει: $P(\alpha + 1) = 5$.

Άσκηση 202 Βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 1.

Άσκηση 203. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το άθροισμα των πολυωνύμων $P(x) = \lambda x^2 - x + \lambda^2 - 5$ και $Q(x) = x^2 + \lambda^2 x - 4\lambda$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Άσκηση 204. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda^2 - 9)x + 2x^3 \text{ είναι ίσα.}$$

Άσκηση 205. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα:

$$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda \text{ και } Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda \text{ είναι ίσα.}$$

Άσκηση 206. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27, \text{ να παίρνει τη μορφή } \lambda(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

Άσκηση 207. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(x^2 + 1)P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$$

Άσκηση 208. Να βρεθεί πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε το τετράγωνο του να ι-

$$\text{σούται με το πολυώνυμο : } P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

Άσκηση 209. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$

$$\text{και } Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

Άσκηση 210

1. ΘΕΜΑ_2_15113

$$\text{Δίνονται τα πολυώνυμα } P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = ax^2 + 7, a \in \mathbb{R}.$$

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Άσκηση 211

2. ΘΕΜΑ_2_20640

$$\text{Δίνεται το πολυώνυμο } P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Άσκηση 212

3. ΘΕΜΑ_2_21998

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-2) \cdot (x^6 + 1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.