

Μάθημα 13 Πολυωνυμικές Εξισώσεις - Ανισώσεις

13.1 Συνοπτική Θεωρία

α) Πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, $\alpha_n \neq 0$.

β) Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του αντίστοιχου πολυωνύμου $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

γ) Θεώρημα ακεραίων ριζών.

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, $\alpha_n \neq 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Σχόλια

i). Αν ο ακέραιος ρ δεν είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 , τότε δεν είναι ακέραια ρίζα της εξίσωσης.

ii) Πιθανές ακέραιες ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου

δ) Θεώρημα ρητών ριζών.

Αν ο ρητός $\rho = \frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_n x^n +$

$\alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, $\alpha_n \neq 0$, τότε ο αριθμητής κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου και ο παρονομαστής λ είναι διαιρέτης του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου.

ε) Ρίζα πολλαπλότητας ν

• Όταν ισχύει $P(x) = (x - \rho)^2 \pi(x)$ και $\pi(\rho) \neq 0$, λέμε ότι το $P(x)$ έχει **διπλή ρίζα** ή ρίζα πολλαπλότητας δύο το ρ .

• Όταν ισχύει $P(x) = (x - \rho)^\nu \pi(x)$ και $\pi(\rho) \neq 0$, λέμε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα πολλαπλότητας ν το ρ .

Μέθοδος 7.

Επίλυση της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$, βαθμού ≥ 3 .

α) Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων με τις μεθόδους της παραγοντοποίησης:

- ομαδοποίηση
- εξαγωγή κοινού παράγοντα
- διάσπαση όρων
- εφαρμογή ταυτοτήτων
- μετασχηματισμός του $P(x)$ στη μορφή $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$ με το σχήμα Horner σε συνδυασμό με τα θεωρήματα των ακεραίων και ρητών ριζών)

β) Οπότε ισοδύναμα έχουμε $P(x)=0 \Leftrightarrow P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_k(x)=0 \Leftrightarrow P_1(x)=0$ ή $P_2(x)=0$ ή $\cdots$ ή $P_k(x)=0$.

Σχόλιο: Μια πολυωνυμική εξίσωση νιοστού **βαθμού** έχει **n το πολύ** πραγματικές ρίζες.

Παρατηρήσεις:

- Μία πολυωνυμική εξίσωση με ομόσημους συντελεστές δεν έχει θετικές ρίζες.
- Αν το άθροισμα των συντελεστών είναι μηδέν τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 1.
- Αν οι συντελεστές των αρτίων δυνάμεων και ο σταθερός είναι θετικοί αριθμοί ενώ οι συντελεστές των περιττών δυνάμεων είναι αρνητικοί (και αντίστροφα), τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητικές ρίζες.
-

Πολυωνυμικές εξισώσεις που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες (Διτετράγωνες).

Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha x^{2v} + \beta x^v + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με την αντικατάσταση $x^v = y$ ανάγονται στην μορφή $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$, την οποία επιλύουμε ως προς y .

Στη συνέχεια από την σχέση $x^v = y$ προσδιορίζουμε τις τιμές του x .

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Η εξίσωση $x^v = \alpha$, $v \in \mathbb{N}^*$ $\alpha \in \mathbb{R}$, το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

- Η εξίσωση $x^v = \alpha$, $v \in \mathbb{N}^*$ $\alpha \in \mathbb{R}$

α	ν	Ρίζες της $x^\nu = \alpha$
$\alpha = 0$	Άρτιος ή Περιττός	$x = 0$ (πολλαπλότητας ν)
$\alpha > 0$	Άρτιος	Δύο ρίζες αντίθετες $x = \pm \sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha > 0$	Περιττός	Μοναδική ρίζα την $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha < 0$	Άρτιος	Αδύνατη
$\alpha < 0$	Περιττός	Μοναδική ρίζα την $x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

- Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0 = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$

Δ	Ρίζες	Μορφή τριωνύμου
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha}$	$f(x) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$
$\Delta < 0$	Δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$	Δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

Εφαρμογή – Παράδειγμα 32.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 = 0$ β) $x^3 + 4 = 0$ γ) $x^6 + 57 = 0$ δ) $x^6 - 64 = 0$ ε) $x^{15} - 4^{15} = 0$

Λύση

α) $x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (πολλαπλότητας 6)

β) $x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -4 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$

γ) $x^6 + 57 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -57$ (αδύνατη στο $\mathbb{R}$)

δ) $x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{2^6} \Leftrightarrow x = \pm 2$

ε) $x^{15} - 4^{15} = 0 \Leftrightarrow x^{15} = 4^{15} \Leftrightarrow x = \sqrt[15]{4^{15}} \Leftrightarrow x = 4 = 2^2$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 33.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 + 3x^2 = 0$

β) $x^3 + x^6 = 0$

γ) $x^6 - 7^{12} \cdot x^2 = 0$

δ) $x^8 - 81x^4 = 0$

Λύση

$$\alpha) x^6 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^4 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (διπλή)} \\ x^4 = -3 \text{ (αδύνατη)} \end{cases}$$

$$\beta) x^6 + 3x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^3 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (τριπλή)} \\ x = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

γ)

$$x^6 - 7^{12} \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4 - 7^{12}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^4 - 7^{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^4 = 7^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (διπλή)} \\ x = \pm \sqrt[4]{7^{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (διπλή)} \\ x = \pm 7^3 \end{cases}$$

δ)

$$x^8 - 81x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(x^4 - 81) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \\ x^4 - 81 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (πολλαπλότητα 4)} \\ x = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3 \end{cases}$$

Εφαρμογή - Παράδειγμα 34.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 + 3x^3 - 4 = 0$

β) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

Λύση

Με αντικατάσταση προκύπτουν εξισώσεις 2^{ου} βαθμού και στην συνέχεια εξισώσεις της μορφής $x^y = a$:

Έχουμε:

α) $x^6 + 3x^3 - 4 = 0$

Θέτουμε $x^3 = y$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y = 1 \text{ ή } y = -3) \Leftrightarrow (x^3 = 1 \text{ ή } x^3 = -3) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -\sqrt[3]{3})$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $-\sqrt[3]{3}, 1$.

$$\beta) x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

Θέτουμε $x^2 = y \geq 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y = 4 \text{ ή } y = -2) \Leftrightarrow \left(x^2 = 4 \text{ ή } \underbrace{x^2 = -2}_{\text{(αδύνατη)}} \right) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2)$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $-2, 2$.

Εφαρμογή – Παράδειγμα 35.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$\beta) x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$$

$$\gamma) x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

Λύση

$$\alpha) x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

Θα λύσουμε την εξίσωση με ομαδοποίηση:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \left(x-2=0 \text{ ή } \underbrace{x^2+1=0}_{\text{(αδύνατη)}} \right) \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 2.

$$\beta) x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρετές $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου

Αφού το άθροισμα των συντελεστών είναι διάφορο του μηδενός ($1-3+1+2=1 \neq 0$) το 1 δεν είναι ρίζα

1	-3	1	2	$\rho = 2$
↓	2	-2	-2	
1	-1	-1	$\upsilon = 0$	

Άρα το 2 είναι ρίζα και η εξίσωση γράφεται

$$(x-2)(x^2-x-1) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ή } \underbrace{x^2-x-1=0}_{\Delta=1+4=5} \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς: $2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\gamma) x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

Αφού οι συντελεστές είναι ομόσημοι η εξίσωση δεν έχει θετικές ρίζες.

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες $-1, -2$ του σταθερού όρου

1	3	6	4	$\rho = -1$
↓	-1	-2	-4	
1	2	4	$\nu = 0$	

Άρα το -1 είναι ρίζα και η εξίσωση γράφεται

$$(x+1)(x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \text{ ή } \underbrace{x^2+2x+4=0}_{\Delta=4-16=-12} \Leftrightarrow x=-1$$

Οπότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x = -1$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 36

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^3 - 9x + 8 = 0$$

$$\beta) x^3 + 27 = 3(x^2 + x - 6) - x^2 + 9$$

Λύση

$$\alpha) x^3 - 9x + 8 = 0$$

Εδώ αντί να κάνουμε σχήμα Horner μπορούμε να διασπάσουμε τον όρο $-9x$ και να κάνουμε ομαδοποίηση.

Έχουμε:

$$x^3 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 8(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - 8(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)[x(x + 1) - 8] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 8) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } \underbrace{x^2 + x - 8 = 0}_{\Delta=1+32=33} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

Οπότε ρίζες της εξίσωσης οι αριθμοί $1, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$ και $\frac{-1 - \sqrt{33}}{4}$

$$\beta) x^3 + 27 = 3(x^2 + x - 6) - x^2 + 9$$

Εδώ παρατηρούμε ότι το $x + 3$ είναι παράγοντας των πολυωνύμων

$$x^3 + 27, x^2 + x - 6, x^2 - 9$$

Έτσι έχουμε:

$$x^3 + 27 = 3(x^2 + x - 6) - x^2 + 9 \Leftrightarrow x^3 + 3^3 = 3(x-2)(x+3) - (x-3)(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 3x + 3^2) - 3(x-2)(x+3) + (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)[x^2 - 3x + 9 - 3(x-2) + (x-3)] = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 5x + 12) = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \text{ ή } \underbrace{x^2 - 5x + 12 = 0}_{\Delta = 25 - 48 = -23 < 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Οπότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x = -3$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 37

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$ να έχει διπλή ρίζα το 1 και στη συνέχεια να βρείτε και την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

Λύση

Έστω $P(x) = x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$, ή εξίσωση $P(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα το 1 αν και μόνο αν $P(1) = 0$ και $P'(1) = 0$ όπου $P'(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) \div (x-1)$. Θα βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης αυτής με το σχήμα Horner

1	$\alpha - \beta$	2α	-5	4	$\rho = 1$
	1	$\alpha - \beta + 1$	$3\alpha - \beta + 1$	$3\alpha - \beta - 4$	
1	$\alpha - \beta + 1$	$3\alpha - \beta + 1$	$3\alpha - \beta - 4$	$v = 3\alpha - \beta$	

συντελεστές του πηλίκου

Άρα το πηλίκο $\pi(x) = x^3 + (\alpha - \beta + 1)x^2 + (3\alpha - \beta + 1)x + 3\alpha - \beta - 4$ και υπόλοιπο $v = 3\alpha - \beta$

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 3\alpha \quad (1)$$

$$\pi(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + (\alpha - \beta + 1) \cdot 1^2 + (3\alpha - \beta + 1) \cdot 1 + 3\alpha - \beta - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha - \beta + 1 + 3\alpha - \beta + 1 + 3\alpha - \beta - 4 = 0 \Leftrightarrow 7\alpha - 3\beta = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 7\alpha - 3(3\alpha) = 1 \Leftrightarrow -2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως } \beta = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \text{ και } \pi(x) = x^3 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1\right)x^2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1\right)x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 4 \Leftrightarrow$$

$$\pi(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$$

$$\text{Για } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ και } \beta = -\frac{3}{2} \text{ η εξίσωση γράφεται}$$

$$\pi(x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 + x - 4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \text{ ή } x = 1$$

1	2	1	-4	$\rho = 1$
↓	1	3	4	
1	3	4	$\nu = 0$	

$$\text{Οπότε: } x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ή } \underbrace{x^2 + 3x + 4 = 0}_{\Delta = 9 - 16 = -7}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 38

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2v} + 2\lambda x - 2 = 0, v \in \mathbb{N}, v \geq 1, \lambda \in \mathbb{Z}^*$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, άρα οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2$

- Για $x = 1$ η εξίσωση γράφεται: $1^{2v} + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

- Για $x = -1$ η εξίσωση γράφεται: $(-1)^{2v} - 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

- Για $x = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$2^{2v} + 4\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2v-1} + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 - 2^{2v-1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 - 2^{2v-1}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

- Για $x = -2$ η εξίσωση γράφεται:

$$(-2)^{2v} - 4\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2v-1} + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -1 - 2^{2v-1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 - 2^{2v-1}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Επομένως η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Μέθοδος 8:**Επίλυση πολυωνυμικής ανίσωσης** $P(x) \geq 0$ ή $P(x) \leq 0$

βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρία

α) Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων με τις μεθόδους της παραγοντοποίησης (ομαδοποίηση, διάσπαση όρων, εφαρμογή ταυτοτήτων και το σχήμα Horner σε συνδυασμό με τα θεωρήματα των ακεραίων και ρητών ριζών).

Δηλαδή στη μορφή: $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) \geq 0$ ή ≤ 0

β) Επιλύουμε την εξίσωση $P(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0$ ή $P_2(x) = 0$ ή ... ή $P_k(x) = 0$.

γ) Σχηματίζουμε συγκεντρωτικό πίνακα στον οποίο σημειώνουμε τα πρόσημα των παραγόντων $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ και στη συνέχεια το πρόσημο του γινομένου.

δ) Επιλέγουμε τα διαστήματα που επαληθεύουν την ανίσωση

Εφαρμογή – Παράδειγμα 39

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

β) $x^3 + 5x^2 - 20x - 64 < 0$

γ) $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$

Λύση

α) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2$ είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου

Αφού το άθροισμα των συντελεστών ισούται με το μηδέν ($3 - 1 - 9 + 9 - 2 = 0$) το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2$

Κάνουμε το σχήμα Horner:

3	-1	-9	9	-2	$\rho = 1$
↓	3	2	-7	2	
3	2	-7	2	$\nu = 0$	
Συντελεστές πηλίκου					

Η ανίσωση γράφεται $(x-1)(3x^3+2x^2-7x+2) \leq 0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολωνύμου $3x^3+2x^2-7x+2$ είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου

Αφού το άθροισμα των συντελεστών ισούται με το μηδέν ($3+2-7+2=0$) το 1 είναι ρίζα του πολωνύμου $3x^3+2x^2-7x+2$

Κάνουμε το σχήμα Horner:

3	2	-7		2	$\rho = 1$
↓	3	5		-2	
3	5	-2		$\nu = 0$	

Η σχέση (1) γράφεται:

$$(x-1)(x-1)(3x^2+5x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+5x-2) \leq 0$$

• Λύνουμε την εξίσωση: $(x-1)^2(3x^2+5x-2) = 0$

$$(x-1)^2(3x^2+5x-2) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } \underbrace{3x^2+5x-2=0}_{\Delta=25+24=49, x=\frac{-5\pm 7}{6}} \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=\frac{1}{3}$$

• Κάνουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty \quad -2 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad +\infty$			
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$3x^2+5x-2$	+	-	+	+
Γινόμενο	+	-	+	+

• Λύσεις της ανίσωσης τα $x \in \mathbb{R}$ με $x \in \left[-2, \frac{1}{3}\right] \cup \{1\}$

β) $x^3+5x^2-20x-64 < 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολωνύμου $x^3+5x^2-20x-64$ είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$ του σταθερού όρου

Αφού το άθροισμα των συντελεστών δεν ισούται με το μηδέν

$(1+5-20-64=-78 \neq 0)$ το 1 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + 5x^2 - 20x - 64$

Επειδή έχουμε πολλούς διαιρέτες και η παραγοντοποίηση με το σχήμα Horner είναι επίπονη, θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο

$x^3 + 5x^2 - 20x - 64$ με άλλους τρόπους.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } x^3 + 5x^2 - 20x - 64 &= x^3 - 4^3 + 5x^2 - 20x = (x-4)(x^2 + 4x + 16) + 5x(x-4) = \\ &= (x-4)(x^2 + 4x + 16 + 5x) = (x-4)(x^2 + 9x + 16) \end{aligned}$$

Επομένως η ανίσωση γράφεται: $(x-4)(x^2 + 9x + 16) < 0$

- Λύνουμε την εξίσωση:

$$(x-4)(x^2 + 9x + 16) = 0 \Leftrightarrow x-4=0 \text{ ή } \underbrace{x^2 + 9x + 16 = 0}_{\Delta = 81 - 64 = 17, x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}} \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

- Κάνουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	$\frac{-9-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-9+\sqrt{17}}{2}$	4	$+\infty$
$x-4$	-	-	-	+	+
$x^2+9x+16$	+	-	+	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+	+

- Λύσεις της ανίσωσης τα $x \in \mathbb{R}$ με $x \in \left(-\infty, \frac{-9-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}, 4\right)$

γ) $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$

Επειδή το πολυώνυμο $x^4 - 13x^2 + 36$ είναι ειδικής μορφής (διτετράγωνη) θα λύσουμε την ανίσωση με αντικατάσταση.

- Θέτουμε $x^2 = y$ και η ανίσωση γράφεται: $y^2 - 13y + 36 \leq 0$

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Leftrightarrow (\Delta = 169 - 144 = 25) y = 4 \text{ ή } y = 9$$

$$\bullet y^2 - 13y + 36 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 9$$

- Λύνουμε την τελευταία ανίσωση ως προς x

$$4 \leq y \leq 9 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow (|x| \geq 2 \text{ και } |x| \leq 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \text{ και } -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 3$$

- Λύσεις της ανίσωσης τα $x \in \mathbb{R}$ με $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$

Μέθοδος 10.

Ασκήσεις που αφορούν τη θέση της γραφικής παράστασης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με τους άξονες ή τη σχετική θέση δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων.

(1) Σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f :

α) Με τον άξονα $x'x$: Λύνουμε την εξίσωση

β) Με τον άξονα $y'y$: Θέτουμε $x = 0$ και υπολογίζουμε το $y = f(0)$.

(2) Εύρεση διαστημάτων στα οποία η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης φαίνεται «πάνω» ή «κάτω» από τον άξονα $x'x$.

Λύνουμε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ αντίστοιχα.

(3) Εύρεση σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων f, g .

Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

(4) Εύρεση διαστημάτων στα οποία η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης φαίνεται «πάνω» ή «κάτω» από την γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g .

Λύνουμε τις ανισώσεις $f(x) > g(x)$ ή $f(x) < g(x)$ αντίστοιχα.

Εφαρμογή – Παράδειγμα 40

Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Λύση

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον άξονα $x'x$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0$

Αφού το άθροισμα των συντελεστών $(4 - 3 - 1 = 0)$ είναι μηδέν, η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

4	0	-3	-1	$\rho = 1$
↓	4	4	1	
4	4	1	$\nu = 0$	

Έτσι έχουμε:

$$4x^3 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{2} \text{ (διπλή)}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και $(1, 0)$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 41

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\lambda - 1)x + 2$. Αν το $M(2, 4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f , να βρείτε τα κοινά της σημεία με τον άξονα $x'x$

Λύση

Επειδή το σημείο $M(2, 4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f , ισχύει

$$f(2) = 4 \Leftrightarrow 2^3 + (\lambda - 1) \cdot 2 + 2 = 4 \Leftrightarrow 2\lambda + 8 = 4 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Για $\lambda = -2$: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον άξονα $x'x$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x(x+1) - 2] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=-2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-2,0)$ και $(1,0)$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 42

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x^3-3x^2-5x-2$, $g(x)=x^7+x^6+x^5+1$

Να καθοριστεί η θέση των γραφικών παραστάσεων των f και g ως προς τον άξονα $x'x$.

Λύση

Η θέση της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ καθορίζεται αν βρούμε:

- Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$:

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$

- Τα διαστήματα του x στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$:

Λύνουμε τις ανισώσεις $f(x)>0$, $f(x)<0$ αντίστοιχα

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3-3x^2-5x-2=0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρετές $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου

$$f(1)=3 \cdot 1^3-3 \cdot 1^2-5 \cdot 1-2=-7 \neq 0 \text{ άρα το } 1 \text{ δεν είναι ρίζα του } f(x)$$

$$f(-1)=3 \cdot (-1)^3-3 \cdot (-1)^2-5 \cdot (-1)-2=-3 \neq 0 \text{ άρα το } -1 \text{ δεν είναι ρίζα του } f(x)$$

3	-3	-5	-2	$p=2$
↓	6	6	2	
3	3	1	$v=0$	

Άρα το 2 είναι ρίζα του πολωνύμου $f(x)$ και $f(x)=(x-2)(3x^2+3x+1)$

Οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$(x-2)(3x^2+3x+1)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ή } \underbrace{3x^2+3x+1=0}_{\text{Αδύνατη, } \Delta=9-12=-3<0} \Leftrightarrow x=2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(2,0)$

- Τα πρόσημο της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2
$x-2$	-	+
$3x^2+3x+1$	+	+
$f(x)$	-	+

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$ και κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 43

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + (x+1)^2$$

δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + (x+1)^2 = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Αφού το πολυώνυμο έχει θετικούς συντελεστές δεν έχει αρνητικές ρίζες, άρα πιθανή ακέραια ρίζα το -1 .

1	2	2	2	2	2	1	$\rho = -1$
↓	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	$\nu = 0$	

συντελεστές του πηλίκου

Άρα

$$f(x) = (x+1) \left(\underbrace{x^5 + x^4}_{x^4(x+1)} + \underbrace{x^3 + x^2}_{x^2(x+1)} + x + 1 \right) = (x+1) [x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1)] = (x+1)^2 (x^4 + x^2 + 1)$$

Προφανώς είναι

$$f(x) = (x+1)^2 (x^4 + x^2 + 1) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 44

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 \text{ και } g(x) = 15x^2 + 28x + 12.$$

Λύση

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$

Επειδή $f(x) = 3x^3 + 2x^2 = x^2(3x+2)$ θα εξετάσουμε για ευκολία στην παραγοντοποίηση, αν το $(3x+2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $g(x) = 15x^2 + 28x + 12$

15	28	12	$-\frac{2}{3}$
↓	-10	-12	
15	18	$v=0$	

$$\text{Άρα } g(x) = 15x^2 + 28x + 12 = \left(x + \frac{2}{3}\right)(15x + 18) = \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot 3(5x + 6) = (3x + 2)(5x + 6)$$

Έτσι έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2(3x+2) = (3x+2)(5x+6) \Leftrightarrow x^2(3x+2) - (3x+2)(5x+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)(x^2 - 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \text{ ή } x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 6$$

Για να βρούμε τις τεταγμένες των κοινών σημείων αντικαθιστούμε στον τύπο της f ή στον τύπο της g τις τιμές του x που βρήκαμε.

$$\text{Για } x = -\frac{2}{3}: f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{9} + \frac{8}{9} = 0$$

$$\text{Για } x = -1: f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1)^2 = -3 + 2 = -1$$

Για $x = 6 : f(6) = 3 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 = 648 + 72 = 720$

Άρα σημεία τομής των C_f, C_g είναι τα σημεία $\left(-\frac{2}{3}, 0\right), (-1, -1)$ και $(6, 720)$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 45

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 11)$ και $B(-2, -16)$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με την συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3x^2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η (ε) βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 3x^2$.

Λύση

α) Αφού τα σημεία $A(1, 11)$ και $B(-2, -16)$ έχουν διαφορετικές τετμημένες η ζητούμενη ευθεία (ε) θα είναι της μορφής $(\varepsilon): y = ax + \beta$

Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(1, 11)$ και $B(-2, -16)$, οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωση της.

$$\text{Δηλαδή: } \begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ -2\alpha + \beta = -16 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 22 \\ -2\alpha + \beta = -16 \end{cases} \Rightarrow 3\beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 2$$

$$\text{Για } \beta = 2 : \alpha + \beta = 11 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 11 \Leftrightarrow \alpha = 9$$

$$\text{Οπότε } (\varepsilon): y = 9x + 2$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης

$$f(x) = y \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 = 9x + 2 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 - 9x - 2 = 0 \quad (1)$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολωνύμου $4x^3 - 3x^2 - 9x - 2$ οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου.

Αφού το άθροισμα των συντελεστών δεν ισούται με το μηδέν $(4 - 3 - 9 - 2 = -10 \neq 0)$ το 1 δεν είναι ρίζα του πολωνύμου $4x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

4	-3	-9	-2	$\rho = 2$
↓	8	10	2	
4	5	1	$\nu = 0$	

Οπότε η (1) γράφεται:

$$(x-2)(4x^2+5x+1)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ή } 4x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=-\frac{1}{4}$$

Για $x=2$: $y=9x+2 \Rightarrow y=18+2=20$

Για $x=-1$: $y=9x+2 \Rightarrow y=-9+2=-7$

Για $x=-\frac{1}{4}$: $y=9x+2 \Rightarrow y=-\frac{9}{4}+2=-\frac{1}{4}$

Άρα σημεία τομής τα: $(2,20), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), (-1,-7)$

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η (ε) βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x^3-3x^2$, θα λύσουμε την ανίσωση

$$f(x) < y \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 < 9x + 2 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 - 9x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(4x^2+5x+1) < 0$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα σχηματίζουμε τον πίνακα πρόσημων:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	+	+
$4x^2+5x+1$	+	-	+	+	+
$(x-2)(4x^2+5x+1)$	-	+	-	+	+

Άρα λύσεις της τελευταίας ανίσωσης τα $x \in \mathbb{R}$ με $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{4}, 2\right)$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Άσκηση 243. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 12)

Άσκηση 244

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = -4$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

Άσκηση 245

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 13)

Άσκηση 246

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να δείξετε ότι $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)

Άσκηση 247

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = 3$ να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$. (Μονάδες 15)

Άσκηση 248

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$,

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$. (Μονάδες 12)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 13)

Άσκηση 249

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 10)

Άσκηση 250 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

Άσκηση 251

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 12)

Άσκηση 252

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$. (Μονάδες 7)

Άσκηση 253

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (k - 6)x^2 - 7x + k$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Αν $k = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

Άσκηση 254

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και $P(2) = 10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$. (Μονάδες 13)

Άσκηση 255

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm.

Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.

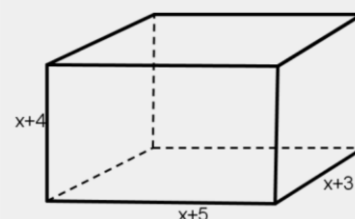
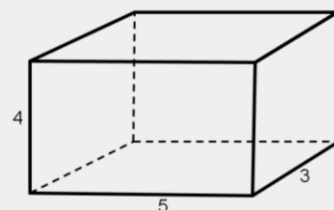
Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x .

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της

$$\text{εξίσωσης } x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0.$$

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$).

(Μονάδες 12)



β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα (α).
(Μονάδες 13)

Άσκηση 256

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (x^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3ax^3 + x^2 + 1$, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το a ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν $a = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

Άσκηση 257

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$. (Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 14)

Άσκηση 258

Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - 2(\lambda - 1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 9)

Άσκηση 259

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x - 2)$ δίνει πηλίκο και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό u .

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το u . (Μονάδες 9)

γ) Αν $u = 10$, να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 8)

Άσκηση 260

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30 \text{ cm}^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

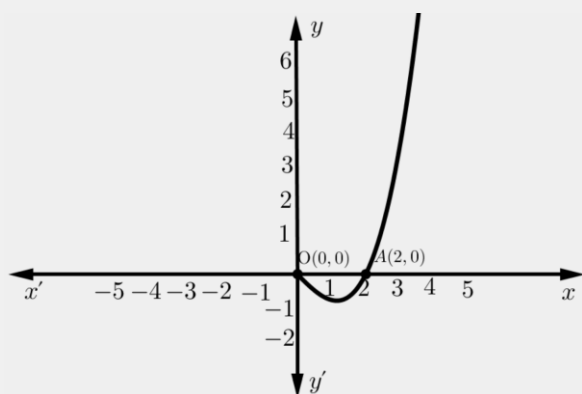
α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y = \frac{60}{x}$ και $(x + 1)^2 = x^2 + y^2$. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$. (Μονάδες 4)

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 5)

Άσκηση 261 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης



$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, x \in \mathbb{R} \text{ και } \gamma, \delta \text{ πραγματικές σταθερές.}$$

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in \mathbb{R} :$$

ι. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

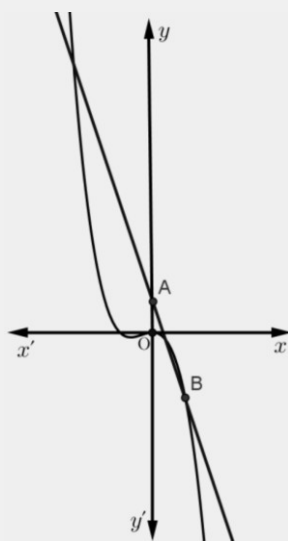
(Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -\frac{3}{4}$

$$\text{και } f(x) = \frac{3}{4}.$$

(Μονάδες 10)

Άσκηση 262



Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, -2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$.

(Μονάδες 9)

Άσκηση 263

1. ΘΕΜΑ_2_18583

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.

α) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

β) Αν $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Άσκηση 264

2. ΘΕΜΑ_2_15989

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

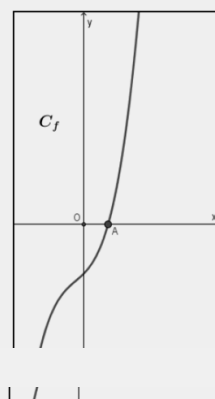
- α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.
- β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Άσκηση 265

3. ΘΕΜΑ_2_20856

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
- β) Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.
 - Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.



Άσκηση 266

4. ΘΕΜΑ_2_18230

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x - 2)$.
- β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Άσκηση 2672

5. ΘΕΜΑ_2_15176

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

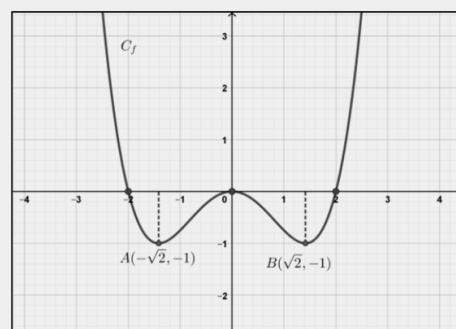
- α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.
- β) Αν $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

Άσκηση 268

6. ΘΕΜΑ_2_15349

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
- β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2}, -1)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
- γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.



Άσκηση 269

7. ΘΕΜΑ_2_15175

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1) \cdot (x^2 + 1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Άσκηση 270

8. ΘΕΜΑ_2_17241

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x+1)$.

β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Άσκηση 271

9. ΘΕΜΑ_2_15674

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Αν $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

Άσκηση 272

10. ΘΕΜΑ_2_15653

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$.

β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2 + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Άσκηση 273

11. ΘΕΜΑ_2_15247

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x) = (2x-1)(x^2 + 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

Άσκηση 274

12. ΘΕΜΑ_2_15246

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x) = (x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

Άσκηση 275

13. ΘΕΜΑ_2_15695

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

Άσκηση 276

14. ΘΕΜΑ_2_15654

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Άσκηση 277

15. ΘΕΜΑ_2_15618

α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Άσκηση 278

16. ΘΕΜΑ_2_15248

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x - 1$ δίνει πηλίκο $x^2 - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$,

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Άσκηση 279

17. ΘΕΜΑ_2_15047

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

Άσκηση 280

18. ΘΕΜΑ_2_15040

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Άσκηση 281

19. ΘΕΜΑ_4_20859

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

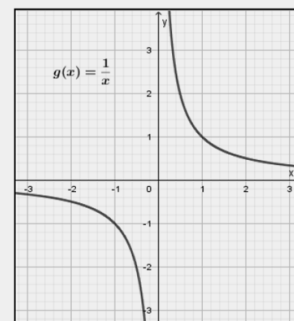
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$

είναι η διπλανή, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$.

Άσκηση 282

20. ΘΕΜΑ_4_37475

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$,

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

γ) $\frac{1}{2} < \sin \theta < 1$ για κάθε γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,

δ) $P(\sin \theta) < 0$ για κάθε γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

Άσκηση 283

21. ΘΕΜΑ_4_20943

Δίνεται η γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x) \quad \text{και} \quad B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.
- β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

Άσκηση 284

22. ΘΕΜΑ_4_20752

Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμετρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου M αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0,8,0,6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1,1)$.

- α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0,8,0,6)$,
- i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$,
- ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \eta\mu(\pi - \omega) + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + \epsilon\phi(-\omega) + \sigma\phi(\pi + \omega)$.
- γ) Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x^3 - 10\eta\mu\omega \cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 285

23. ΘΕΜΑ_4_21240

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

- α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

Άσκηση 286

24. ΘΕΜΑ_4_21155

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β

επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

- α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a=2$, μετά ο Β επιλέγει $b=1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c=2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .
- β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a=-1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.
- γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c=1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.
- δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c=2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13 .

Άσκηση 287

25. ΘΕΜΑ_4_22013

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
- β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$.
- γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 288

26. ΘΕΜΑ_4_18221

Στο σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ .

Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.

α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

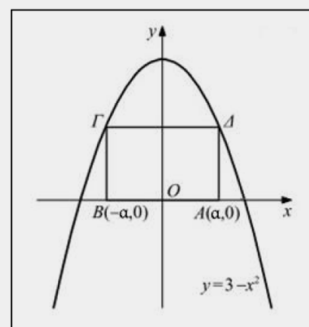
- i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι

$$E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha \text{ τετραγωνικές μονάδες,}$$

- ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.



Άσκηση 289

27. ΘΕΜΑ_4_15174

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $v(x) = 24x - 24$.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .
- β) Για $a = 2$,
- να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.
 - να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.
 - να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 290

28. ΘΕΜΑ_4_17943

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60 \text{ cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

- α) i. Να δείξετε ότι $y = \frac{120}{x}$.
- ii. Αφού εκφράσετε όλες τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσει του x , να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση $x^3 + x^2 - 3600 = 0$.
- β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
- γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 291

29. ΘΕΜΑ_4_17925

Στο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και το σημείο

$A\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$ αυτής.

- α) Να δείξετε ότι $a = -1$.
- β) Για $a = -1$,
- Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.
- γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .



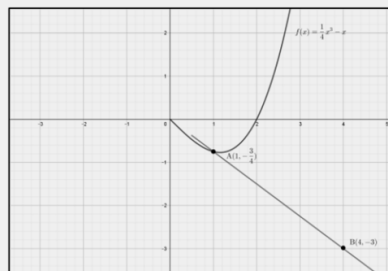
Άσκηση 292

30. ΘΕΜΑ_4_17919

Στο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία που

διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

Άσκηση 293

31. ΘΕΜΑ_4_15790

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

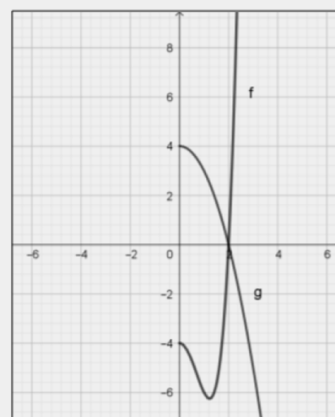
α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Στο σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$, ii. την ανίσωση

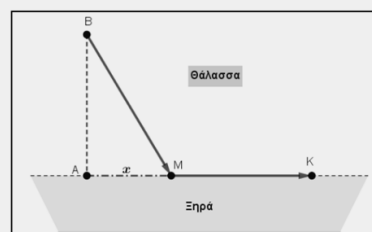
$$f(x) < g(x).$$



Άσκηση 294

32. ΘΕΜΑ_4_15436

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h.



Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου

χρόνου κίνησης t , είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως

$$\text{προς την απόσταση } x \text{ (σε km) είναι η } t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}, x \in [0,4].$$

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή – δρομέα να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

Άσκηση 295

33. ΘΕΜΑ_4_15094

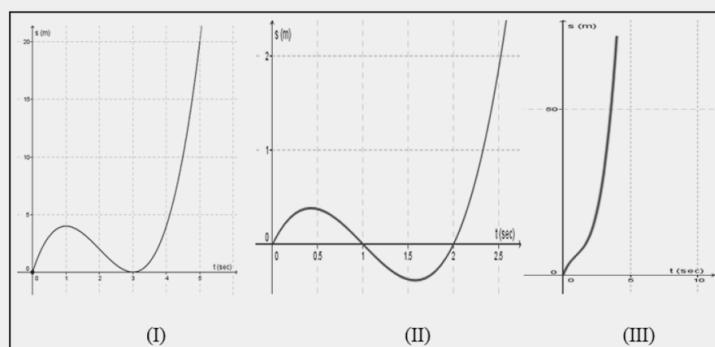
Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



Άσκηση 296

34. ΘΕΜΑ_4_15960

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1$, με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $k = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 297

35. ΘΕΜΑ_4_15431

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1 ,

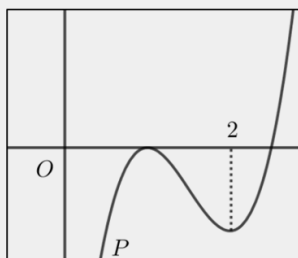
$$\text{να δείξετε ότι } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 \text{ είναι κάτω από τον άξονα } x'x.$$

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η παρακάτω, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



Άσκηση 298

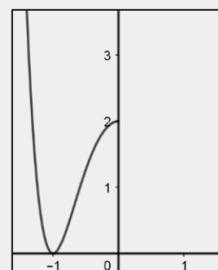
36. ΘΕΜΑ_4_15005

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι f είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να συμπληρώσετε στο σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 299

37. ΘΕΜΑ_4_15677

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$:

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

Άσκηση 300

38. ΘΕΜΑ_4_14955

Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

Άσκηση 301

39. ΘΕΜΑ_4_15250

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

Άσκηση 302

40. ΘΕΜΑ_4_15066

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του,

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.