

Μάθημα 17 Λογαριθμική Συνάρτηση

17.1 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω a ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Όπως είδαμε για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_a x$, οπότε αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο λογάριθμο του, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \log_a x$$

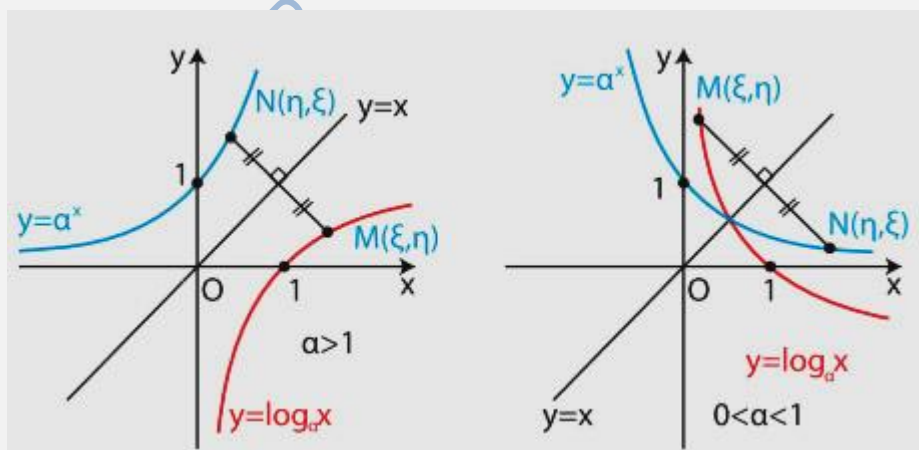
Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση το a** .

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, τότε:

Αν το σημείο $M(\xi, \eta) \in C_f \Leftrightarrow f(\xi) = \eta \Leftrightarrow a^\xi = \eta \Leftrightarrow \log_a \eta = \xi \Leftrightarrow g(\eta) = \xi \Leftrightarrow N(\eta, \xi) \in C_g$.

Τα σημεία όμως $M(\xi, \eta)$ και $N(\eta, \xi)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$, οπότε:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_a x$ και $y = a^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

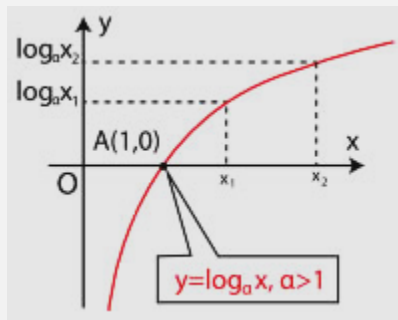


Όπως θα δούμε στην Γ Λυκείου οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται αντίστροφες και συμβολίζονται με f^{-1} και g^{-1} είναι δηλαδή: $f^{-1}(x) = g(x)$ και $g^{-1}(x) = f(x)$.

Αποδεικνύεται δε ότι έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

Έτσι σύμφωνα με αυτά και όσα είδαμε για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχουμε ότι:

• Αν $a > 1$ τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$



• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A = (0, +\infty)$, άρα η γραφική της παράσταση εκτείνεται σε 1ο, 4ο τεταρτημόριο.

• Έχει σύνολο τιμών το $g(A) = \mathbb{R}$

• Είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A = (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

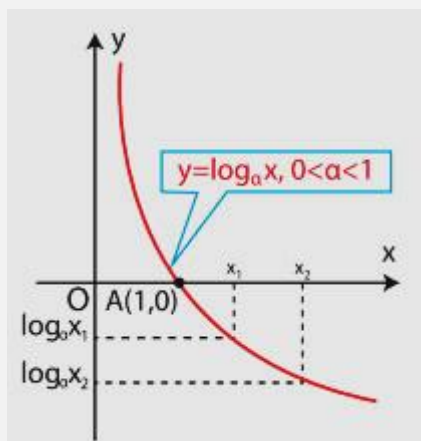
• Για $x=1$ είναι $g(1) = \log_a 1 = 0$ άρα τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $A(1,0)$

• Καθώς το x μικραίνει και τείνει να γίνει μηδέν με τιμές θετικές, λέμε τότε ότι τείνει στο 0^+ , οι τιμές της g μικραίνουν απερίοριστα και τείνουν στο $-\infty$, **συμβολικά** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.

Γι αυτό λέμε ότι η γραφική παράσταση της g έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' . (ή αλλιώς τον αρνητικό ημιάξονα των y)

• Καθώς το x αυξάνει απερίοριστα, λέμε τότε ότι τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της g αυξάνουν επίσης απερίοριστα και τείνουν στο $+\infty$, **συμβολικά** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.

• Αν $0 < a < 1$ τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$



• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A = (0, +\infty)$, άρα η γραφική της παράσταση εκτείνεται σε 1ο, 4ο τεταρτημόριο.

• Έχει σύνολο τιμών το $g(A) = \mathbb{R}$

• Είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A = (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2.$$

• Για $x=1$ είναι $g(1) = \log_{\alpha} 1 = 0$ άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$

• Καθώς το x μικραίνει και τείνει να γίνει μηδέν από τιμές θετικές, λέμε τότε ότι τείνει στο 0^+ , οι τιμές της g αυξάνουν απεριορίστα και τείνουν στο $+\infty$,
συμβολικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\alpha} x = +\infty$.

Γι αυτό λέμε ότι η γραφική παράσταση της g έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy . (ή αλλιώς τον θετικό ημιάξονα των y)

• Καθώς το x αυξάνει απεριορίστα, λέμε τότε ότι τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της g μικραίνουν απεριορίστα και τείνουν στο $-\infty$, **συμβολικά** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$

17.1.1. Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_{\alpha} x$ με $\alpha > 1$ είναι "1-1", αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R}$ με

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{ή} \\ x_1 > x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1) < g(x_2) \\ \text{ή} \\ g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

Ομοίως και για την $g(x) = \log_{\alpha} x$ με $0 < \alpha < 1$.

Έτσι έχουμε την ισοδυναμία: $\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Σχόλιο:

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη για την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων, όπως θα δούμε παρακάτω.

Εφαρμογή – Παράδειγμα 1.

Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2(x^2 - x) = 1 + \log_2(x - 1)$

Λύση

Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον

$$(x^2 - x > 0 \text{ και } x - 1 > 0) \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ή } x > 1 \text{ και } x > 1) \Leftrightarrow x > 1 \quad (1)$$

Με αυτούς τους περιορισμούς η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\log_2(x^2 - x) &= 1 + \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - x) = \log_2 2 + \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x^2 - x) &= \log_2[2(x - 1)] \Leftrightarrow x^2 - x = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \\ (\text{γιατί η συνάρτηση } g(x) &= \log_2 x \text{ είναι "1-1"})\end{aligned}$$

Δεκτή μόνο η $x = 2$ λόγω της (1)

Εφαρμογή – Παράδειγμα 2.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

α) $\varphi(x) = \ln x$ β) $f(x) = \ln x + 1$ γ) $g(x) = \ln(x - 2)$

Λύση

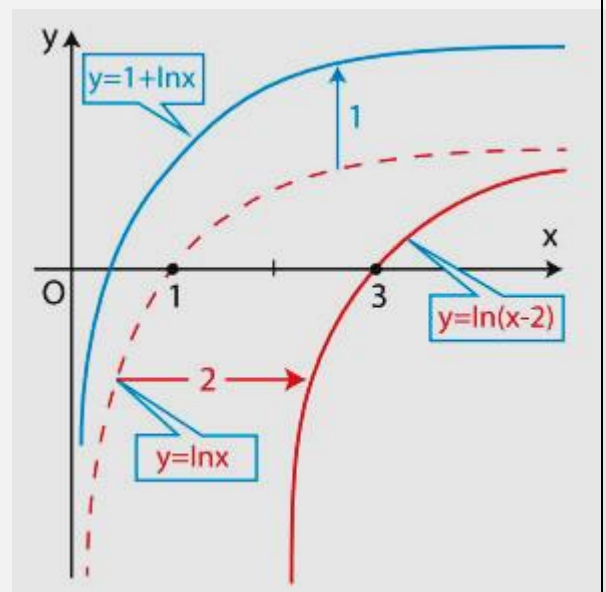
Για τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \ln x$ κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	3	4	5
$\varphi(x) = \ln x$	-1,6	-1,2	-0,7	-0,4	0	0,7	1,1	1,4	1,6

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και ενώνοντας τα με μια συνεχή καμπύλη βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \ln x$.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x + 1$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi(x) = \ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Η γραφική παράσταση της $g(x) = \ln(x - 2)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi(x) = \ln x$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



17.2 Βασικές κατηγορίες ασκήσεων

Μέθοδος – Κατηγορία 1: Ασκήσεις που αφορούν την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων και καταλήγουμε σε εξισώσεις της μορφής:

$$\bullet \log_{\alpha} f(x) = \beta \Leftrightarrow f(x) = \alpha^{\beta}$$

$$\bullet \log_{\alpha} f(x) = \log_{\alpha} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις εξισώσεις $f(x) = \alpha^{\beta}$ και $f(x) = g(x)$ με όλους τους γνωστούς τρόπους.

Να τονίσουμε ιδιαίτερος τους περιορισμούς για τα $f(x), g(x)$

• Αν έχουμε εξίσωση της μορφής $\alpha^{f(x)} = \beta$ και το β δεν γράφεται στη μορφή $\beta = \alpha^{\kappa}$ με $\kappa \in \mathbb{Q}$, τότε:

είτε «λογαριθμίζουμε» και τα δύο μέλη με βάση το α , και έχουμε:

$$\log_{\alpha} \alpha^{f(x)} = \log_{\alpha} \beta \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_{\alpha} \alpha = \log_{\alpha} \beta \Leftrightarrow f(x) = \log_{\alpha} \beta.$$

είτε γράφουμε $\beta = \alpha^{\log_{\alpha} \beta}$ οπότε: $\alpha^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow \alpha^{f(x)} = \alpha^{\log_{\alpha} \beta} \Leftrightarrow f(x) = \log_{\alpha} \beta$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 1.

Να λυθεί οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2^x - 7 = 0$$

$$\beta) 5^x - 32 = 0$$

Λύση

$$\alpha) 2^x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 7 \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 7 \Leftrightarrow x \cdot \log_2 2 = \log_2 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7$$

$$\beta) 5^x - 32 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 32 \Leftrightarrow 5^x = 5^{\log_5 32} \Leftrightarrow x = \log_5 32$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 2.

Να λυθεί η εξίσωση: $2 \log 3 + \log(2^x - 3^x) = x \log 2 + \log 5$

Λύση

Περιορισμοί: Πρέπει $2^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3^x \Leftrightarrow x < 0$.

Για $x < 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 2\log 3 + \log(2^x - 3^x) &= x\log 2 + \log 5 \Leftrightarrow \log 3^2 + \log(2^x - 3^x) = \log 2^x + \log 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log[9(2^x - 3^x)] &= \log(2^x \cdot 5) \Leftrightarrow 9(2^x - 3^x) = 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x &= 9 \cdot 3^x \Leftrightarrow 4 \cdot 2^x = 9 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 3.

Να λυθεί η εξίσωση: $\log_{x+2} 17x^2 - 6x + 8 = 3$

Λύση

Περιορισμοί:

$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} 17x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq -1 \end{cases} \text{ άρα } x \in (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \log_{x+2} 17x^2 - 6x + 8 = 3 &\Leftrightarrow (x+2)^3 = 17x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= 17x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^3 - 11x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \cdot x^2 - 11x + 18 &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 9 \text{ οι οποίες είναι δεκτές.} \end{aligned}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 4.

Να λυθεί η εξίσωση: $2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52$

Λύση

Περιορισμοί:

Πρέπει $x > 0$ και η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52 \Leftrightarrow 2^{\log x} + 3 \cdot (2^2)^{\log x} = 52 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{2\log x} + 2^{\log x} - 52 = 0$$

Θέτουμε $2^{\log x} = y$ και η εξίσωση γίνεται:

$$3y^2 + y - 52 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -\frac{13}{3}$$

$$\text{Για } x = 4: 2^{\log x} = 4 \Leftrightarrow 2^{\log x} = 2^2 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$$

$$\text{Για } x = -\frac{13}{3}: 2^{\log x} = -\frac{13}{3} \text{ (αδύνατη)}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 5.

$$\text{Να λυθεί η εξίσωση: } x^{\frac{\log x + 8}{3}} = 10^{1 + \log x^2}$$

Λύση

Περιορισμοί:

Πρέπει $x > 0$ και εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x^{\frac{\log x + 8}{3}} = 10^{1 + \log x^2} \Leftrightarrow \log x^{\frac{\log x + 8}{3}} = \log 10^{1 + \log x^2} \Leftrightarrow \frac{\log x + 8}{3} \cdot \log x = 1 + \log x^2 \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x + 8 \log x = 3 \log 10 + 2 \log x \Leftrightarrow \log^2 x + 8 \log x = 3 + 6 \log x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x + 2 \log x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \text{ ή } \log x = -3$$

$$\bullet \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$$

$$\bullet \log x = -3 \Leftrightarrow x = 10^{-3}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 6.

$$\text{Να λυθεί η εξίσωση: } \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$$

Λύση

Περιορισμοί:

Πρέπει $x > 0$ και εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} \right)^2 = (10)^2 \Leftrightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Leftrightarrow \log x^{\log \sqrt{x}} = \log 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log \sqrt{x} \cdot \log x = \log 10^2 \Leftrightarrow \log x^{\frac{1}{2}} \cdot \log x = 2 \cdot \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log x \cdot \log x = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log x^2 = 2 \Leftrightarrow \log x^2 = 4 \Leftrightarrow \log x = \pm 2$$

$$\bullet \text{Για } \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$$

• Για $\log x = -2 \Leftrightarrow x = 10^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{100}$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 7.

Να λυθεί η εξίσωση: $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Λύση

Περιορισμοί:

Πρέπει $x > 0$ και αφού $\log_{16} x = \log_{2^4} x = \frac{1}{4} \log_2 x$ και $\log_4 x = \log_{2^2} x = \frac{1}{2} \log_2 x$

εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) \log_2 x = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} \cdot \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$$

Μέθοδος – Κατηγορία 2: Λογαριθμικές Ανισώσεις – Σύγκριση αριθμών

Όπως και στις εξισώσεις εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων και καταλήγουμε σε ανισώσεις της μορφής:

$$\bullet \log_a f(x) > \beta \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a \alpha^\beta \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha > 1) : f(x) > \alpha^\beta \quad (h(x) = \log_a x \nearrow) \\ (0 < \alpha < 1) : f(x) < \alpha^\beta \quad (h(x) = \log_a x \searrow) \end{cases}$$

$$\bullet \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha > 1) : f(x) > g(x) \quad (h(x) = \log_a x \nearrow) \\ (0 < \alpha < 1) : f(x) < g(x) \quad (h(x) = \log_a x \searrow) \end{cases}$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις εξισώσεις $f(x) > \alpha^\beta$ ή $f(x) < \alpha^\beta$ και $f(x) > g(x)$ ή $f(x) < g(x)$ με όλους τους γνωστούς τρόπους.

Να τονίσουμε ιδιαίτερα τους περιορισμούς για τα $f(x), g(x)$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 8.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{32}}$ και $\log_2 32^{\frac{1}{5}}$

Λύση

Εφαρμογή – Παράδειγμα 9.

Να λυθεί η ανίσωση: $\log_2 6 - 2^x < 3 - x$

Λύση

Περιορισμοί:

$$\text{Πρέπει } 6 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 6 \Leftrightarrow \log_2 2^x < \log_2 6 \Leftrightarrow x < \log_2 6 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \log_2 6 - 2^x < 3 - x &\Leftrightarrow \log_2 6 - 2^x < \log_2 2^{3-x} \stackrel{2>1}{\Leftrightarrow} 6 - 2^x < 2^{3-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - 2^x < \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 6 \cdot 2^x - 2^{2x} - 8 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Θέτουμε $2^x = y$ και η (2) γράφεται: $y^2 - 6y + 8 > 0 \Leftrightarrow y < 2 \text{ ή } y > 4$ οπότε

$$2^x < 2 \text{ ή } 2^x > 4 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 2 \Leftrightarrow x \in -\infty, 1 \cup 2, +\infty \quad (3)$$

Από (1), (3) έχουμε: $x \in -\infty, 1 \cup 2, \log_2 6$ (*)

(*) αφού $4 < 6 \Leftrightarrow \log_2 4 < \log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 2^2 < \log_2 6 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_2 2 < \log_2 6 \Leftrightarrow 2 < \log_2 6$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 10.

Να λυθεί η ανίσωση: $x + \log 1 + 2^x > x \log 5 + \log 6$

Λύση

Περιορισμοί:

Πρέπει $1 + 2^x > 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} x + \log 1 + 2^x > x \log 5 + \log 6 &\Leftrightarrow \log 10^x + \log 1 + 2^x > \log 5^x + \log 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log 10^x 1 + 2^x > \log 6 \cdot 5^x \Leftrightarrow 10^x 1 + 2^x > 6 \cdot 5^x \text{ (αφού η } f(x) = \log x \text{ είναι } \nearrow) \\ &\Leftrightarrow 5^x \cdot 2^x 1 + 2^x > 6 \cdot 5^x \stackrel{5^x > 0}{\Leftrightarrow} 2^x 1 + 2^x > 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Θέτουμε $2^x = y$ και η (1) γράφεται: $y(1+y) > 6 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 > 0 \Leftrightarrow y < -3 \text{ ή } y > 2$
οπότε $2^x < -3 \text{ ή } 2^x > 2 \Leftrightarrow$ (αδύνατη ή $x > 1$) άρα $x > 1$

Μέθοδος – Κατηγορία 3: Λογαριθμικά συστήματα

Λογαριθμικό σύστημα λέγεται το σύστημα το οποίο έχει μία τουλάχιστον λογαριθμική εξίσωση.

Για παράδειγμα, τα συστήματα: $(\Sigma_1) \begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ $(\Sigma_2) \begin{cases} xy=40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases}$

Για να λύσουμε ένα λογαριθμικό σύστημα στηρίζομαστε στις ιδιότητες των λογαρίθμων και όσα αναφέραμε για την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων.

Επίλυση του Σ_1

Με τους περιορισμούς $x > 0, y > 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ \log(xy)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases} \text{ επομένως οι αριθμοί } x, y \text{ είναι}$$

λύσεις

$$\text{της εξίσωσης } t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ ή } t = 5$$

Άρα το σύστημα έχει λύσεις τα ζεύγη $(2,5)$ ή $(5,2)$.

Επίλυση του Σ_2

Με τους περιορισμούς $x > 0, y > 0$ έχουμε:

$$(\Sigma_2) \begin{cases} xy=40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(xy) = \log 40 \\ \log x^{\log y} = \log 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x + \log y = \log 4 + \log 10 \\ \log x \cdot \log y = \log 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x + \log y = \log 4 + 1 \\ \log x \cdot \log y = \log 4 \end{cases}$$

$$\text{Θέτουμε } \log x = \omega, \log y = \varphi \text{ και το σύστημα γράφεται: } (\Sigma') \begin{cases} \omega + \varphi = \log 4 + 1 \\ \omega \cdot \varphi = \log 4 \end{cases}$$

επομένως οι αριθμοί ω, φ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$t^2 - (\log 4 + 1)t + \log 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ή } t = \log 4$$

Άρα το σύστημα Σ' έχει λύσεις τα ζεύγη $(1, \log 4)$ ή $(\log 4, 1)$.

Για $\omega = 1$ και $\varphi = \log 4$ έχουμε $\log x = 1$ και $\log y = \log 4$, άρα $x = 10$ και $y = 4$

Για $\omega = \log 4$ και $\varphi = 1$ έχουμε $\log x = \log 4$ και $\log y = 1$, άρα $x = 4$ και $y = 10$

Άρα το Σ_2 έχει λύσεις τα ζεύγη $(10, 4)$ ή $(4, 10)$.

Εφαρμογή – Παράδειγμα 11.

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \cdot \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ \log 5^x + \log 2^y = \log 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ \log 5^x \cdot 2^y = \log 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ 5^x \cdot 2^y = 20 \end{cases}$$

Θέτουμε $\begin{cases} 5^x = \alpha, \alpha > 0 \\ 2^y = \beta, \beta > 0 \end{cases}$ και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha \cdot \beta = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 1 \\ 1 + \beta \cdot \beta = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 1 \\ \beta^2 + \beta - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 1 \\ \beta = 4 \\ \beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Εφαρμογή – Παράδειγμα 12.

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3 \log x + 3 \log y = 8 \\ \log \sqrt{x} - \log \sqrt{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει $x > 0, y > 0$

Με τους περιορισμούς $x > 0, y > 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} 3\log x + 3\log y = 8 \\ \log \sqrt{x} - \log \sqrt{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x^3 + \log y^3 = 8 \\ \log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \log 10^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x^3 \cdot y^3 = \log 10^8 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y^3 = 10^8 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \cdot y \cdot y^3 = 10^8 \\ x = 10y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^6 = 10^5 \\ x = 10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt[6]{10^5} \\ x = 10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[6]{10^5} \\ x = 10 \cdot \sqrt[6]{10^5} \end{cases}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 398 Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί $\log(\alpha\beta) = \log \alpha \cdot \log \beta + 1$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 10$ ή $\beta = 10$

Άσκηση 399 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{1}{2} \log_2 16 + \log_2 10 - \log_2 5 = 3$$

$$\beta) \log 5 + 3 \log 2 - \log 4 = 1$$

$$\gamma) \ln(9 + 4\sqrt{5}) + 2 \ln(\sqrt{5} - 2) = 0$$

$$\delta) e^{\ln 5 + 2 \ln 2} = 20$$

Άσκηση 400. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) 10^{1-\log 2} + 100^{\log 5}$$

$$\beta) \log(\log \sqrt[5]{\sqrt{10}})$$

$$\gamma) 100^{\log 3} + \sqrt{10}^{\log 25}$$

$$\delta) e^{\frac{1}{2} \ln 9} + \sqrt{e}^{-\ln 4}$$

$$\epsilon) 4^{\frac{1}{2} \log_2 20 - 1}$$

$$\sigma\tau) \ln 10 \cdot \log e = 1$$

Άσκηση 401 Έστω α, β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha > \beta \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 6\alpha\beta$$

$$\text{να αποδείξετε ότι } \log\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}$$

Άσκηση 402 Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \ln(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x^2 - \ln(1 + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x - 8 \quad \mu\epsilon \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$

Άσκηση 403. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^x - 7 = 0$

β) $5^x - 32 = 0$

γ) $25^x + 6 = 5^{x+1}$

Άσκηση 404 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\ln(x-1) + 1 = 0$

β) $\log(2x^2 - 1) = 0$

γ) $\ln 3x - \ln(4 - x^2) = 0$

Άσκηση 405. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\log 3 + \log(2^x - 3^x) = x\log 2 + \log 5$

β) $4\log x^2 - \log^2(-x) = 16$

Άσκηση 406. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\ln x + \ln(6 - x) = 3\ln 2$

β) $\ln(4 - x^2) - \ln x = \ln 3$

Άσκηση 407. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^{x-1} = e^{2-x}$

β) $\ln \frac{x}{3} - \frac{\ln x}{3} = 0$

γ) $(2\ln x - 1)\ln x = 1$

δ) $\ln x^2 - \ln^2 x = 0$

Άσκηση 408. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52$

Άσκηση 409. Να λύσετε την εξίσωση: $x^{\frac{\log x + 8}{3}} = 10^{1 + \log x^2}$

Άσκηση 410. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

Άσκηση 411. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{32}}$ και $\log_2 32^{\frac{1}{5}}$

Άσκηση 412. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $e^{x-2} > 2^x$

β) $5^x > 10^{x^2}$

γ) $\log(2x - 4) < 1$

δ) $\ln(|x| - x) > 0$

ε) $(\ln x)^2 < \ln x$

στ) $\ln x < \sqrt{\ln x}$

Άσκηση 413. Να λυθεί η ανίσωση: $\log_2 6 - 2^x < 3 - x$

Άσκηση 414. Να λυθεί η ανίσωση: $x + \log 1 + 2^x > x \log 5 + \log 6$

Άσκηση 415. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \cdot \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases}$$

Άσκηση 416. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3 \log x + 3 \log y = 8 \\ \log \sqrt{x} - \log \sqrt{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άσκηση 417. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(9^x - 3)$

α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in (0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει: $\log 6 + 2 \log \alpha = f(1)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 2 + \log 3^x$

Άσκηση 418. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 5)$

α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι $f(\ln 6) < f(\ln 10)$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{e^{\ln x} + \ln 3 - f(x)}$.

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

δ. Υπάρχει τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της g περνά από το σημείο $N(\alpha, 0)$; (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

Άσκηση 419 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(2x)$ και $g(x) = \log(4^x - 2^{x-1})$.

α). Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β. Να λύσετε την ανίσωση $g(x) < f\left(\frac{1}{4}\right)$.

γ. i) Να αποδείξετε ότι $\log 5 = 1 - \log 2$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $x^{f(x)} = 5, x > 0$

Άσκηση 420 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1}\right)$

- α). Να λυθούν οι εξισώσεις: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 24 = 0$ και $2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$.
- β). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- γ). Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- δ). Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \ln 3 - (x+1)\ln 2$.

Άσκηση 421 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Άσκηση 422

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Άσκηση 423

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - \sqrt{x+1})$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Άσκηση 424

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

Άσκηση 425 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln(x^2)$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.
- γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1})$.

Άσκηση 426 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{6}}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log \sqrt{6}} - 4 = 0$.

Άσκηση 427 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2) - \ln(e^x - 1)$

α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β). Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

γ). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

δ). Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\ln 2$

ε). Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία $y = \ln 2$

Άσκηση 428 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right)$.

α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β). Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$

γ). Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Άσκηση 429

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$.

Άσκηση 430

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

Άσκηση 431

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left(\frac{4^x - 1}{2^x + 5}\right)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

Άσκηση 432

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

Άσκηση 433

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

- α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.
- β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).
- γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

Άσκηση 434

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t) = 200 \cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$).

- α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.
- β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.
- γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Άσκηση 435

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$, $\Gamma(x,\ln x)$.

Άσκηση 436

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6,2) \cup (2,+\infty)$.
- β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$.

Άσκηση 437

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 14$.

Άσκηση 438

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.
- γ) Να βρείτε:
 - i. τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία,
 - ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

Άσκηση 439

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + a$.

Άσκηση 440

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των a, β .

Αν είναι $a = 5, \beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$,

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$,

δ) Αν $P(\ln \kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

Άσκηση 441

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ) $1 < \log 20 < 2$.

δ) $P(\log 20) < 0$.

Άσκηση 442

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

Άσκηση 443

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

Άσκηση 444

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x > 0$.

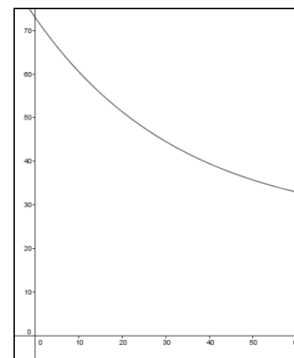
Άσκηση 445

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_o = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_a + ce^{-kt}$, όπου όπου c , k κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

β) Να βρείτε την σταθερά k . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1.2} = 0,3$).

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.