

Μάθημα 5**Μετατοπίσεις****14/10/2024****5.1. Παράλληλη – Κατακόρυφη Μεταφορά**

Αν είναι γνωστή ή δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , και $c > 0$ τότε:

α) Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) + c$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά c μονάδες προς τα πάνω.

β) Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) - c$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά c μονάδες προς τα κάτω.

γ) Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x + c)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της f κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

δ) Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x - c)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της f κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

ε) Η γραφική παράσταση της $g(x) = -f(x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.

στ) Η γραφική παράσταση της $g(x) = |f(x)|$ συμπίπτει με την C_f για τα $x \in D_f$ τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$, και είναι συμμετρική με την C_f ως προς τον άξονα $x'x$, για τα $x \in D_f$ τέτοια ώστε $f(x) < 0$.

ζ) Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(|x|)$ συμπίπτει με την C_f για τα $x \in D_f, x \geq 0$ και είναι συμμετρική με την C_f ως προς τον άξονα $y'y$, για τα $x \in D_f, x < 0$.

Παράδειγμα 1

Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |x| + 1$

β) $f(x) = |x| - 1$

γ) $f(x) = |x + 1|$

δ) $f(x) = |x + 3| + 2$

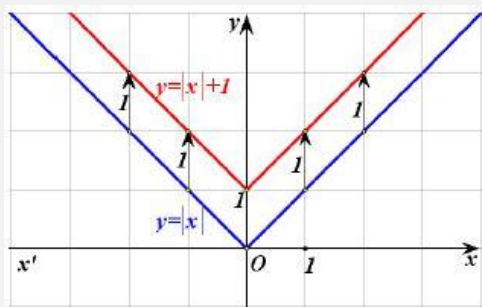
Λύση

α) $f(x) = |x| + 1$

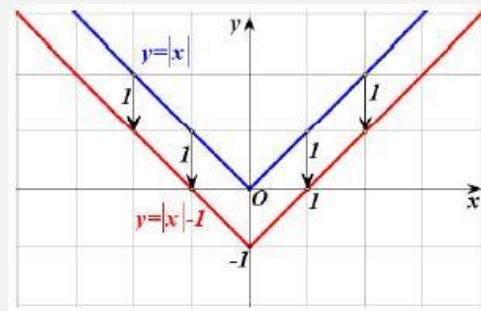
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| + 1$ προκύπτει με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |x|$ (Σχήμα α')

β) $f(x) = |x| - 1$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| - 1$ προκύπτει με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |x|$ (Σχήμα β')



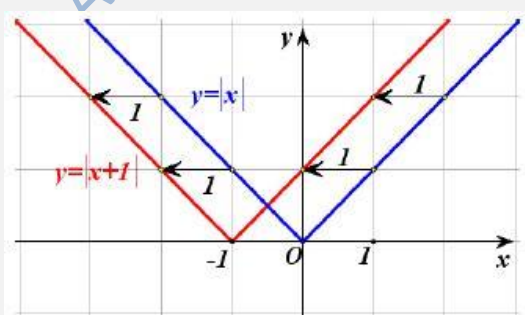
(Σχήμα α')



(Σχήμα β')

γ) $f(x) = |x + 1|$

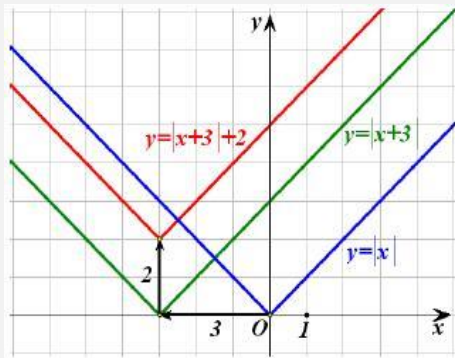
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x + 1|$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά μία μονάδα, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |x|$ (Σχήμα γ')



(Σχήμα γ')

$$\delta) f(x) = |x+3| + 2$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x+3| + 2$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά τρεις μονάδες, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |x|$ και στην συνέχεια μετατοπίζουμε την συνάρτηση $h(x) = |x+3|$ δύο μονάδες προς τα πάνω. (Σχήμα δ')



(Σχήμα δ')

Παράδειγμα 2

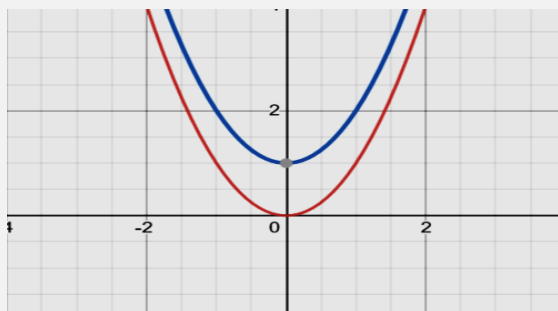
Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^2 + 1 \quad \beta) f(x) = x^2 - 1 \quad \gamma) f(x) = (x+1)^2 \quad \delta) f(x) = (x-1)^2 + 1$$

Λύση

$$\alpha) f(x) = x^2 + 1$$

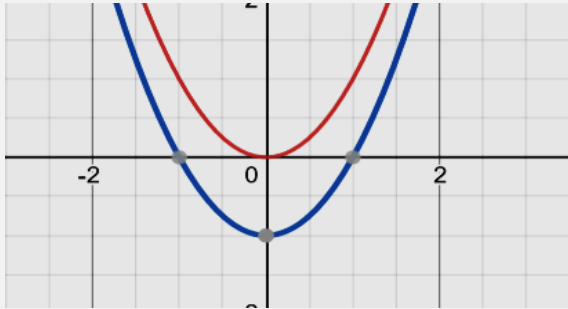
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ προκύπτει με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2$ (Σχήμα α')



(Σχήμα α')

$$\beta) f(x) = x^2 - 1$$

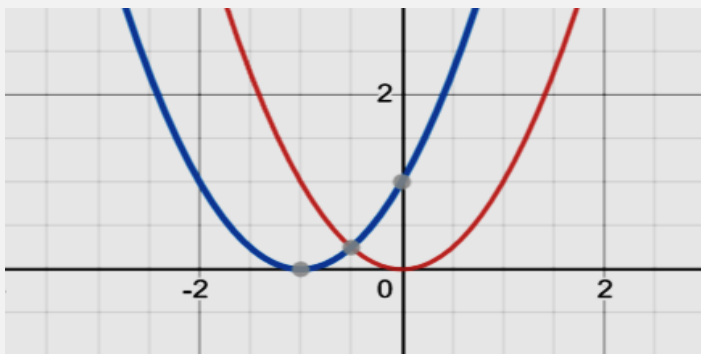
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 1$ προκύπτει με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2$ (Σχήμα β')



(Σχήμα β')

$$\gamma) f(x) = (x+1)^2$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x+1)^2$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2$ (Σχήμα γ')

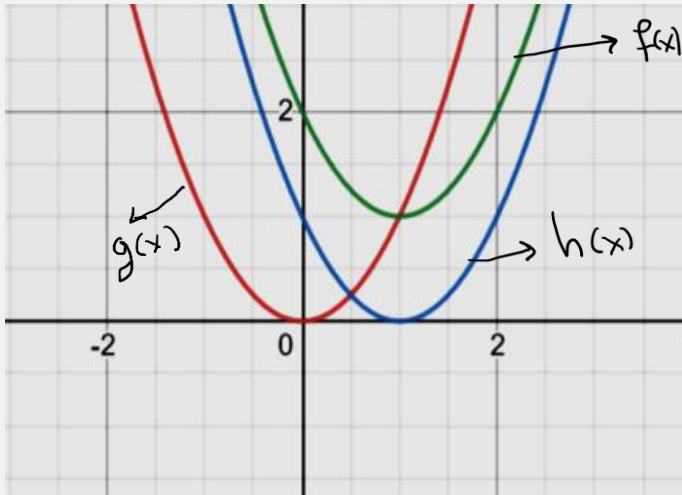


(Σχήμα γ')

$$\delta) f(x) = (x-1)^2 + 1$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^2 + 1$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά μια μονάδα της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης $g(x) = x^2$ και στην συνέχεια μετατοπίζουμε την συνάρτηση $h(x) = (x-1)^2$ μια μονάδα προς τα πάνω. (Σχήμα δ')



Παράδειγμα 3

Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = -2x^2 + 8x - 9 \quad \beta) f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Λύση

α) Με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνων έχουμε:

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 4 = -2x^2 + 4x - 2 - 2 = -2(x^2 - 2x + 1) - 2 = -2(x-1)^2 - 2$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2(x-1)^2 - 2$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά μια μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = -2x^2$ και στην συνέχεια μετατοπίζουμε την συνάρτηση $h(x) = -2(x-1)^2$ δύο μονάδες προς τα πάνω. (Σχήμα δ')

Σχόλιο

Από την Α Λυκείου ξέρουμε ότι $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, οπότε για το τριώνυμο $f(x) = -2x^2 + 4x - 4$ έχουμε:

$$\alpha = -2, \frac{b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1, \Delta = 16 - 4(-2)(-4) = 16 - 32 = -16, \text{ άρα}$$

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 4 = -2(x-1)^2 - \frac{-16}{-8} = -2(x-1)^2 - 2$$

Παράδειγμα 4

Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \beta) f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \gamma) f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Λύση

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ προκύπτει με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\beta) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x-1}$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ προκύπτει με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά μία μονάδα της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης $g(x) = -\frac{2}{x}$ και στη συνέχεια μετατοπίζουμε προς τα πάνω κατά μια μονάδα την συνάρτηση $h(x) = -\frac{2}{x+1}$

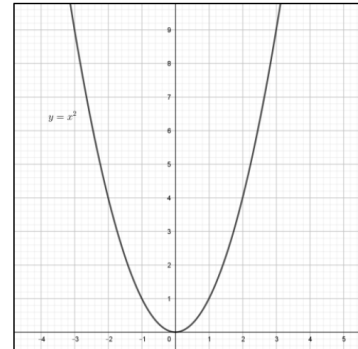
Άσκηση 55

1. ΘΕΜΑ_2_32674

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων.

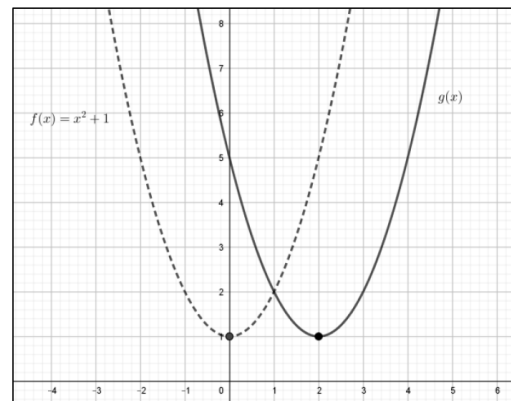


Άσκηση 56

2. ΘΕΜΑ_2_20671

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;
ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

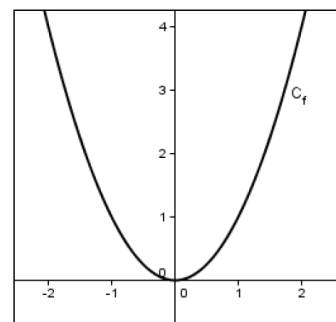


Άσκηση 57

3. ΘΕΜΑ_2_21673

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

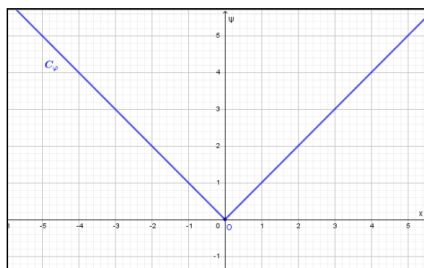
- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$.
- γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$.



Άσκηση 58

4. ΘΕΜΑ_2_14972

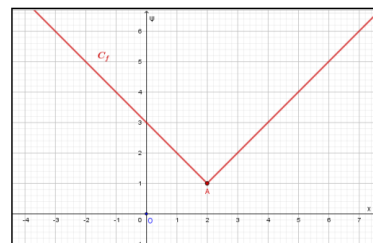
Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2|+1$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , η οποία δίνεται στο διπλανό σχήμα, να βρείτε:

- τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα,
- το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;



Άσκηση 59

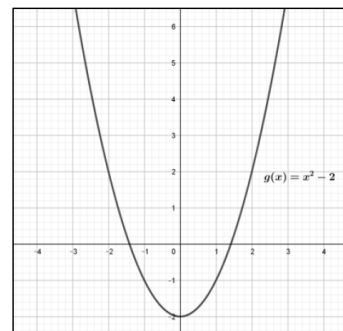
5. ΘΕΜΑ_2_15811

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

- να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.
- να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο σχήμα.



Άσκηση 60

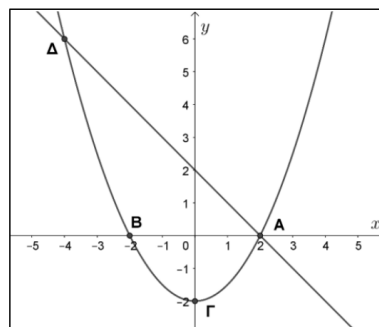
10. ΘΕΜΑ_4_14294

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.

α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ να βρείτε τις τιμές των a , b και γ .

β) Αν $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

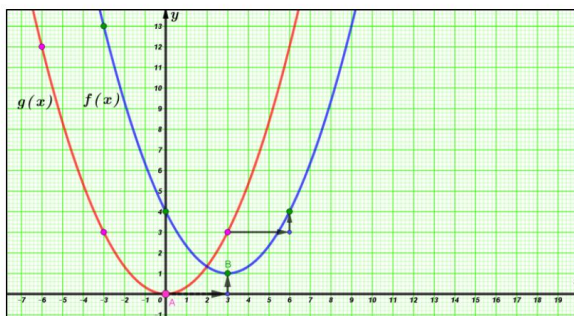
γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.



Άσκηση 61

6. ΘΕΜΑ_2_14983

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.



α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

I. $f(x) = g(x+3) + 1$ II. $f(x) = g(x+3) - 1$

III. $f(x) = g(x-3) + 1$ IV. $f(x) = g(x-3) - 1$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

ε

Άσκηση 62

7. ΘΕΜΑ_4_32677

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

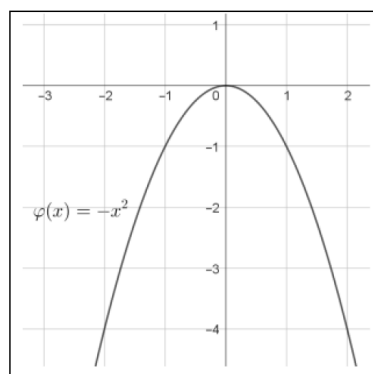
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη,

ii. το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του,

iii. το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

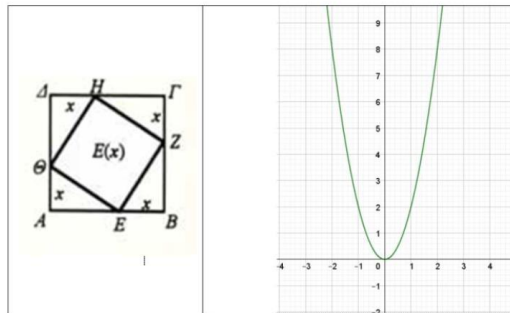


Α.

Άσκηση 63

8. ΘΕΜΑ_4_20713

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία Ε, Ζ, Η, Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, αντίστοιχα, ώστε $EB = ZΓ = ΗΔ = ΘΑ = x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο ΕΖΗΘ.



α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου

ΕΖΗΘ συναρτήσεται της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 2(x-1)^2 + 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνεται ελάχιστο.

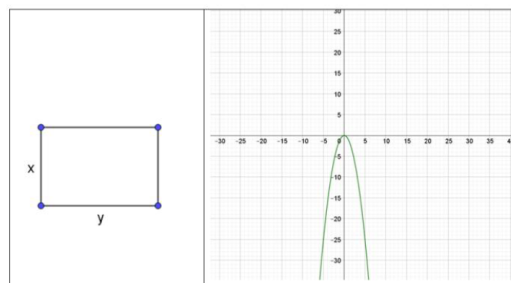
δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο.



Άσκηση 64

9. ΘΕΜΑ_4_20715

Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του

ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

Άσκηση 65

11. ΘΕΜΑ_4_14973

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

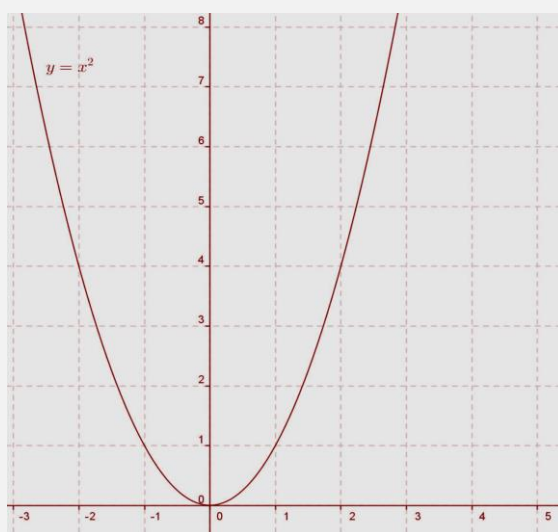
- α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:
- τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .
 - το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;
 - το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Άσκηση 66

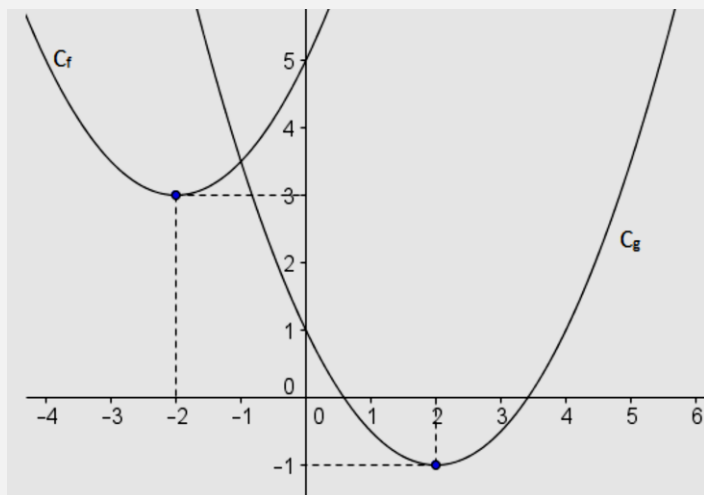
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$.



Άσκηση 67 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .