

## Μάθημα 8 Αναγωγή στο 1<sup>ο</sup> Τεταρτημόριο

### 8.1 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1<sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

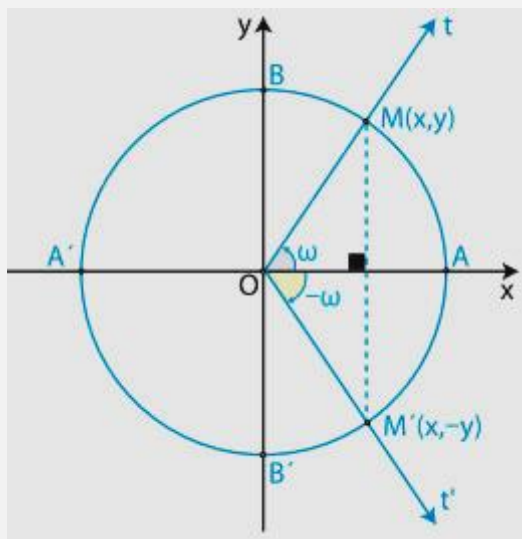
Όπως θα δούμε στη συνέχεια ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οποιαδήποτε γωνίας  $\omega'$  μπορεί να γίνει με τη βοήθεια γωνιών οι οποίες παίρνουν τιμές από  $0^\circ$  έως  $90^\circ$

#### (α) Γωνίες Αντίθετες $(\omega, -\omega)$

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  είναι αντίθετες, δηλαδή  $\omega' = -\omega$ , τότε όπως φαίνεται στο σχήμα τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ .

Οπότε τα σημεία αυτά έχουν την **ίδια τετμημένη** και **αντίθετες τεταγμένες**.

Άρα οι αντίθετες γωνίες θα έχουν το **ίδιο συνημίτονο** και **αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς, δηλαδή**

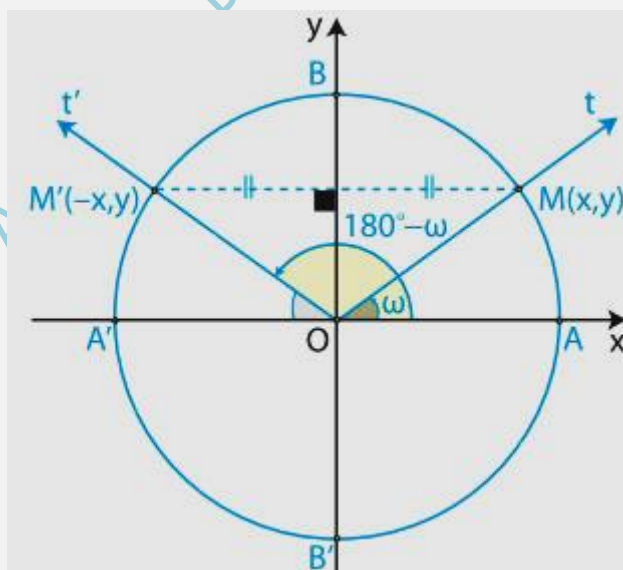


$$\sin(-\omega) = \sin \omega$$

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$



#### (β) Γωνίες με άθροισμα $180^\circ$ (Παραπληρωματικές)

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  είναι παραπληρωματικές, δηλαδή έχουν άθροισμα  $180^\circ$  είναι  $\omega' + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega' = 180^\circ - \omega$ , τότε όπως φαίνεται στο σχήμα τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y$ .

Οπότε τα σημεία αυτά, έχουν την **ίδια τεταγμένη και τετμημένες αντίθετες**.

**Άρα οι παραπληρωματικές έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς, δηλαδή**

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

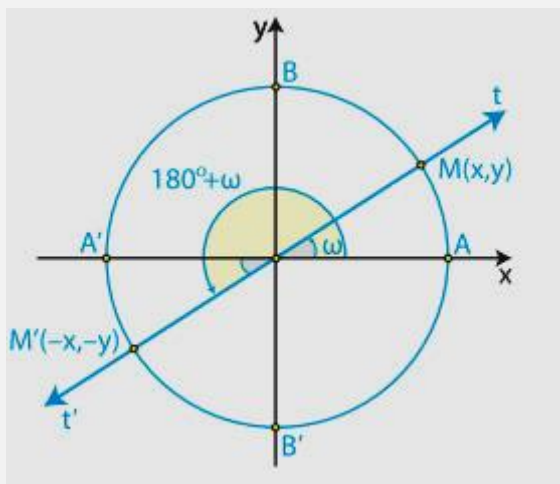
$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi\omega$$

### (γ) Γωνίες που διαφέρουν κατά $180^\circ$

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  διαφέρουν κατά  $180^\circ$  δηλαδή  $\omega' = 180^\circ + \omega$ , τότε όπως φαίνεται στο σχήματα σημεία **M και M'** είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων  $y'y$ . Οπότε τα σημεία αυτά έχουν **αντίθετες συντεταγμένες**.



**Άρα οι γωνίες που διαφέρουν κατά  $180^\circ$  έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, δηλαδή**

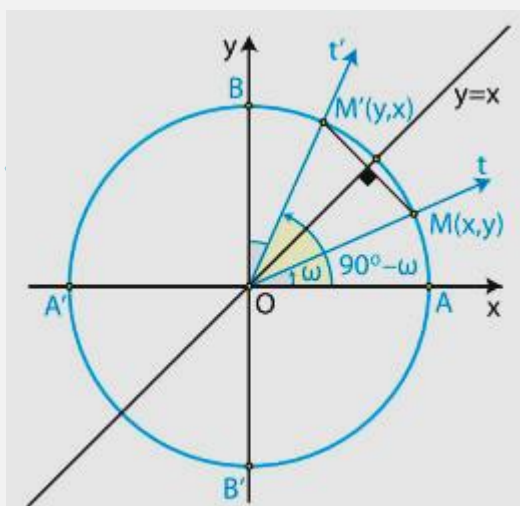
$$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

### (δ) Γωνίες με άθροισμα $90^\circ$ (Συμπληρωματικές)



Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  είναι συμπληρωματικές, δηλαδή έχουν άθροισμα  $90^\circ$  δηλαδή  $\omega' + \omega = 90^\circ \Leftrightarrow \omega' = 90^\circ - \omega$ , τότε όπως φαίνεται στο σχήματα σημεία **M και M'** είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της γωνίας  $xOy$ .

Οπότε η τετμημένη του ενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου.

Άρα αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα  $90^\circ$ , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας με τη συνεφαπτομένη της άλλης., δηλαδή

$$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega, \quad \epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega, \quad \sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

### (ε) Μνημονικός Κανόνας

- i) Οι γωνίες της μορφής  $\frac{\pi}{2} - \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **1ο** τεταρτημόριο
- ii) Οι γωνίες της μορφής  $\frac{\pi}{2} + \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **2ο** τεταρτημόριο
- iii) Οι γωνίες της μορφής  $\frac{3\pi}{2} - \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **3ο** τεταρτημόριο
- iv) Οι γωνίες της μορφής  $\frac{3\pi}{2} + \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **4ο** τεταρτημόριο
- v) Οι γωνίες της μορφής  $\pi - \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **2ο** τεταρτημόριο
- vi) Οι γωνίες της μορφής  $\pi + \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **3ο** τεταρτημόριο
- vii) Οι γωνίες της μορφής  $2\pi - \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **3ο** τεταρτημόριο
- viii) Οι γωνίες της μορφής  $2\pi + \theta$  έχουν τελική πλευρά στο **4ο** τεταρτημόριο

• Αν η γωνία  $\omega$  είναι της μορφής  $2\pi \pm \theta$  ή  $\pi \pm \theta$  τότε το πρόσημο των τριγωνομετρικών της αριθμών καθορίζεται από τον **αρχικό** τριγωνομετρικό αριθμό και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η γωνία, ενώ ο τριγωνομετρικός αριθμός δεν αλλάζει

(ημίτονο  $\leftrightarrow$  ημίτονο, συνημίτονο  $\leftrightarrow$  συνημίτονο, εφαπτομένη  $\leftrightarrow$  εφαπτομένη και συνεφαπτομένη  $\leftrightarrow$  συνεφαπτομένη)

• Αν η γωνία  $\omega$  είναι της μορφής  $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$  ή  $\frac{\pi}{2} \pm \theta$  τότε το πρόσημο των τριγωνομετρικών της αριθμών καθορίζεται από τον **αρχικό** τριγωνομετρικό αριθμό και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η γωνία, ενώ ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει.

(ημίτονο  $\leftrightarrow$  συνημίτονο και εφαπτομένη  $\leftrightarrow$  συνεφαπτομένη)

### Εφαρμογή – Παράδειγμα 1.

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών : α)  $\frac{5\pi}{6}$       β)  $\frac{3\pi}{4}$

Λύση

$$\alpha) \text{ Έχουμε } \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Άρα } \eta\mu \frac{3\pi}{4} = \eta\mu \frac{4\pi - \pi}{4} = \eta\mu \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi - \pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = \epsilon\varphi \frac{4\pi - \pi}{4} = \epsilon\varphi \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sigma\varphi \frac{3\pi}{4} = \sigma\varphi \frac{4\pi - \pi}{4} = \sigma\varphi \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sigma\varphi \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\beta) \text{ Έχουμε } \frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Άρα } \eta\mu \frac{5\pi}{6} = \eta\mu \frac{6\pi - \pi}{6} = \eta\mu \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi - \pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi \frac{5\pi}{6} = \epsilon\varphi \frac{6\pi - \pi}{6} = \epsilon\varphi \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi \frac{5\pi}{6} = \sigma\varphi \frac{6\pi - \pi}{6} = \sigma\varphi \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sigma\varphi \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

**Εφαρμογή – Παράδειγμα 2.**

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\alpha) \eta\mu \left( 2\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\beta) \epsilon\varphi \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\gamma) \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\delta) \eta\mu \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\epsilon) \sigma\varphi \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

Λύση

$$\alpha) \eta\mu \left( 2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \text{ γιατί έχουμε } 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ άρα δεν έχουμε αλλαγή και η γωνία}$$

$2\pi + \frac{\pi}{6}$  έχει τελική πλευρά στο **1ο** τεταρτημόριο στο οποίο το ημίτονο είναι θετικό.

β)  $\varepsilon\phi\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\varepsilon\phi\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , γιατί έχουμε  $2\pi - \frac{\pi}{6}$  άρα δεν έχουμε αλλαγή και η γωνία  $2\pi - \frac{\pi}{6}$  έχει τελική πλευρά στο **4ο** τεταρτημόριο στο οποίο η εφαπτομένη είναι αρνητική.

γ)  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$  γιατί έχουμε  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ , άρα έχουμε αλλαγή και η γωνία  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  έχει τελική πλευρά στο **2ο** τεταρτημόριο στο οποίο το συνημίτονο (ο **αρχικός** τριγωνομετρικός αριθμός) είναι αρνητικός

δ)  $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$  γιατί έχουμε  $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ , άρα έχουμε αλλαγή και η γωνία  $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  έχει τελική πλευρά στο **4ο** τεταρτημόριο στο οποίο το ημίτονο (ο **αρχικός** τριγωνομετρικός αριθμός) είναι αρνητικός

ε)  $\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  γιατί έχουμε  $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ , άρα έχουμε αλλαγή και η γωνία  $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$  έχει τελική πλευρά στο **3ο** τεταρτημόριο στο οποίο η συνεφαπτομένη (ο **αρχικός** τριγωνομετρικός αριθμός) είναι θετικός

### Εφαρμογή – Παράδειγμα 3

Σε κάθε τρίγωνο **ΑΒΓ** ισχύει:

α)  $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ ,  $\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)$ ,  $\varepsilon\phi A = -\varepsilon\phi(B + \Gamma)$  και  $\sigma\phi A = -\sigma\phi(B + \Gamma)$   
Με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων Α, Β, Γ βρίσκουμε αντίστοιχους τύπους για τα  $\eta\mu B$ ,  $\eta\mu \Gamma$  κ.λ.π.

β)  $\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B + \Gamma}{2}$ ,  $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B + \Gamma}{2}$ ,  $\varepsilon\phi\frac{A}{2} = \sigma\phi\frac{B + \Gamma}{2}$  και  $\sigma\phi\frac{A}{2} = \varepsilon\phi\frac{B + \Gamma}{2}$

Με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων Α, Β, Γ βρίσκουμε αντίστοιχους τύπους για τα  $\eta\mu\frac{B}{2}$ ,  $\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$  κ.λ.π.

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ορίζονται, για παράδειγμα η  $\varepsilon\phi A$  ορίζεται αν  $A \neq 90^\circ$

Λύση

$$\text{Ισχύει } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi - \hat{A} \Leftrightarrow \frac{B + \Gamma}{2} = \frac{\pi - \hat{A}}{2}.$$

Έτσι έχουμε:

$$\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu(\pi - A) = \eta\mu A \text{ και } \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} = \eta\mu \frac{\pi - A}{2} = \eta\mu \left( \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}$$

Ομοίως για τις άλλες σχέσεις

**Εφαρμογή – Παράδειγμα 4**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\frac{29\pi}{6} \text{ rad}$

Λύση

Επειδή η γωνία είναι μεγαλύτερη από  $2\pi$ , θα την γράψουμε στη μορφή  $2k\pi \pm \theta$ .

Η διαίρεση  $29:6$  δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 5 οπότε  $29 = 4 \cdot 6 + 5 \Leftrightarrow \frac{29}{6} = 4 + \frac{5}{6}$ .

$$\text{Επομένως } \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Έτσι έχουμε:

$$\eta\mu \frac{29\pi}{6} = \eta\mu \left( 4\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = \eta\mu \frac{5\pi}{6} = \eta\mu \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{29\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \left( 4\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{29\pi}{6} = \varepsilon\varphi \left( 4\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{6} = \varepsilon\varphi \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi \frac{29\pi}{6} = \sigma\varphi \left( 4\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = \sigma\varphi \frac{5\pi}{6} = \sigma\varphi \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\varphi \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

**Κατηγορία Α. Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο.**

Με την βοήθεια των προηγούμενων εφαρμογών και των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, μπορούμε να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς διαφόρων γωνιών και να αποδείξουμε διάφορες τριγωνομετρικές σχέσεις.

**Εφαρμογή – Παράδειγμα 5.**

Λύση

Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 120^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}, \quad \eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 315^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 45^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon\varphi 225^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ + 45^\circ) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

$$\sigma\varphi 210^\circ = \sigma\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \eta\mu(-45^\circ) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon\varphi 135^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$$

**Οπότε** 
$$\frac{(-\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)} = -1$$

**Εφαρμογή – Παράδειγμα 6.**

Να αποδείξετε ότι 
$$\frac{\varepsilon\varphi(3\pi + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \eta\mu(5\pi - \alpha) \cdot \eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

Λύση

Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(3\pi + \alpha) = \varepsilon\varphi(2\pi + \pi + \alpha) = \varepsilon\varphi(\pi + \alpha) = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\alpha$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu(5\pi - \alpha) = \eta\mu(4\pi + \pi - \alpha) = \eta\mu(\pi - \alpha) = \eta\mu\alpha$$

$$\eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{Οπότε } \frac{\varepsilon\phi(3\pi+\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha-2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \eta\mu(5\pi-\alpha) \cdot \eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\varepsilon\phi\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\alpha}{\varepsilon\phi\alpha \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = 1$$

**Εφαρμογή – Παράδειγμα 7.**

α) Αν  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{2}$  να αποδείξετε ότι:  $2\left[1 + \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \varepsilon\phi(5\pi - \omega)\right] > \sigma\upsilon\nu^2(9\pi - \omega)$

α) Αν  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$  να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) \cdot \varepsilon\phi(8\pi + \omega) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cdot \varepsilon\phi(9\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega < 0$$

**Λύση**

**Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ**

**Άσκηση 108.** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 3\varepsilon\phi\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$B = \frac{\eta\mu(270^\circ - \alpha) \cdot \eta\mu(180^\circ + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ + \alpha) \cdot \varepsilon\phi(90^\circ - \alpha)}{\eta\mu(90^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu(360^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha) \cdot \varepsilon\phi(270^\circ + \alpha)}$$

$$A. \quad \Gamma = \frac{\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right)}{\varepsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \varepsilon\phi(3\pi + \alpha)}$$

$$\Delta = \frac{\eta\mu A + \eta\mu(B + \Gamma) + \eta\mu(A + B + \Gamma)}{\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}}$$



$$E = \frac{\sin(\pi - \theta) \cdot \varepsilon\phi(11\pi + \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sin(17\pi + \theta) \cdot \sigma\phi\left(\frac{19\pi}{2} + \theta\right)}$$

**Άσκηση 109.** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 120^\circ \cdot \sin 135^\circ \cdot \eta\mu 150^\circ$$

$$B = \frac{\eta\mu \frac{19\pi}{6} \cdot \sin \frac{27\pi}{4} \cdot \varepsilon\phi \frac{17\pi}{3}}{\sigma\phi \frac{20\pi}{3} \cdot \eta\mu \frac{37\pi}{4} \cdot \sin \frac{46\pi}{3}}$$

$$\Gamma = \sigma\phi \frac{3\pi}{7} \cdot \sigma\phi \frac{\pi}{14} + \eta\mu^2 \frac{\pi}{7} + \eta\mu^2 \frac{5\pi}{14}$$

$$\Delta = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} + 222\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - 222\right)$$

$$E = \sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 180^\circ$$

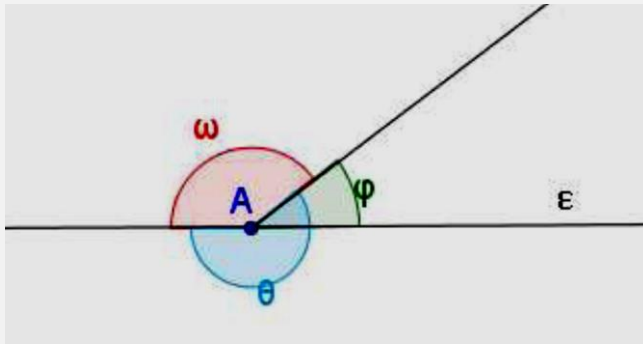
$$Z = \varepsilon\phi 1^\circ \varepsilon\phi 2^\circ \dots \varepsilon\phi 89^\circ$$

**Άσκηση 110. α)** Να λύσετε το σύστημα:  $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ .

**β)** Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες

$\omega$  με  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\sin \omega + \eta\mu \omega = -1$ , και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

**Άσκηση 111.** Δίνεται  $\eta\mu \varphi = \frac{3}{5}$ , όπου  $\varphi$  η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



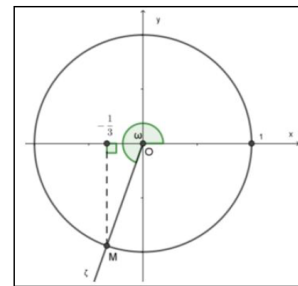
- α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας  $\varphi$ .  
 β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών  $\theta$  και  $\omega$  του σχήματος.

### Άσκηση 112.

#### 1. ΘΕΜΑ\_2\_20942

Στο σχήμα δίνεται γωνία  $\widehat{xOz} = \omega$  με  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ .

- α) Να αιτιολογήσετε ότι  $\sin \omega = -\frac{1}{3}$ .  
 β) Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$ .  
 γ) Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας  $\pi - \omega$ .



### Άσκηση 113.

#### 2. ΘΕΜΑ\_2\_20761

Δίνεται γωνία  $\omega$  η οποία είναι ίση με  $-1125^\circ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\omega$  ισούται με  $-\frac{25\pi}{4}$  ακτίνια (rad).  
 β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .

### Άσκηση 114.

#### 3. ΘΕΜΑ\_2\_18229

Έστω  $\theta$  μια γωνία για την οποία ισχύει  $\sin \theta = -\frac{2}{3}$  και  $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

- α) Να βρείτε το  $\eta\mu\theta$ .  
 β) Αν  $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \sin(\pi - \theta)\sin(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta)\eta\mu(-\theta)$ .

## Άσκηση 115.

## 4. ΘΕΜΑ\_2\_15060

Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο

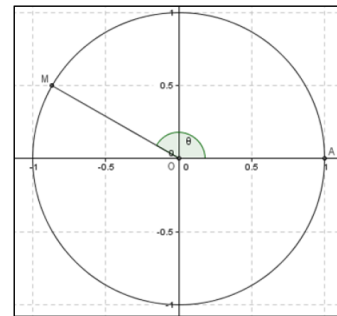
$M\left(x, \frac{1}{2}\right)$  και τη γωνία  $\theta$  με  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  η οποία έχει αρχική πλευρά

την OA και τελική την OM.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει  $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ .

β) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας  $\theta$ .

γ) Να βρείτε τη γωνία  $\theta$ .



## Άσκηση 116.

## 5. ΘΕΜΑ\_2\_15999

Δίνεται η παράσταση  $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = \eta\mu\theta$ .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, όταν  $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  και  $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$ .

## Άσκηση 117.

## 7. ΘΕΜΑ\_2\_22002

Δίνεται ότι  $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α)  $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$

β)  $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$

γ)  $\eta\mu 162^\circ$

## Άσκηση 118.

## 6. ΘΕΜΑ\_2\_21237

Δίνεται ότι  $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$ .

α) Να δείξετε ότι:

i.  $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii.  $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$

β) Αν για την γωνία  $\theta$  έχουμε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , να βρείτε το  $\sigma\upsilon\nu\theta$ .

## Άσκηση 119.

## 8. ΘΕΜΑ\_2\_17936

Στον τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία  $\widehat{AOZ} = \theta$ .

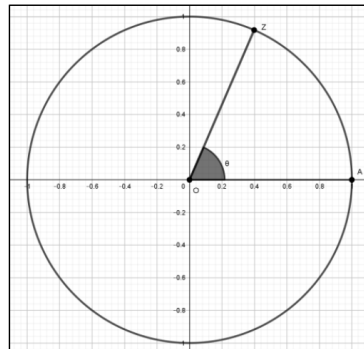
α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε

αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών  $3\pi + \theta$  και  $\frac{\pi}{2} + \theta$ .

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί  $\sin \theta = 0,4$ .

ii. Με χρήση του β) i. ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\sin(3\pi + \theta)$  και  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ .



## Άσκηση 120.

## 9. ΘΕΜΑ\_2\_17933

Στον τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία  $\widehat{AOZ} = \theta$ .

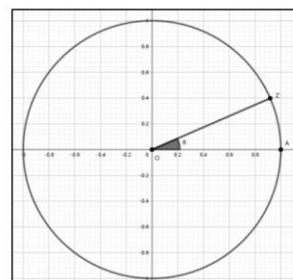
α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις

τελικές πλευρές των γωνιών  $3\pi + \theta$  και  $4\pi - \theta$ .

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί  $\eta\mu \theta = 0,4$ .

ii. Με χρήση του β) i. ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu(3\pi + \theta)$  και  $\eta\mu(4\pi - \theta)$ .



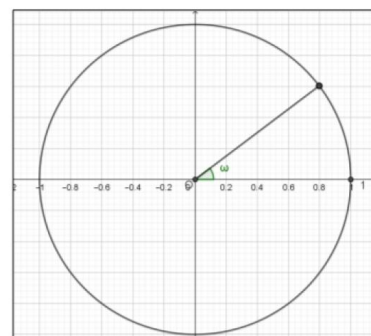
## Άσκηση 121

## 10. ΘΕΜΑ\_2\_15193

Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ , με  $\sin \omega = 0,8$ .

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , των οποίων το συνημίτονο είναι  $-0,8$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία  $\hat{\omega}$ .



## Άσκηση 122.

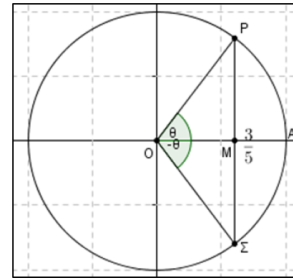
## 11. ΘΕΜΑ\_2\_15266

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες  $\theta$  και  $-\theta$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί  $\sin\theta = \frac{3}{5}$ .

β) Να βρείτε το  $\eta\mu\theta$ .

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας  $-\theta$ .



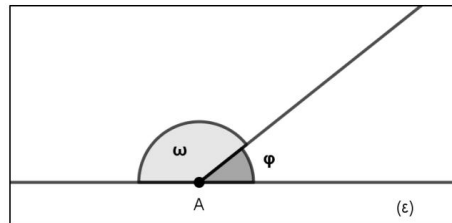
## Άσκηση 123.

## 12. ΘΕΜΑ\_2\_15652

Δίνεται  $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ , όπου  $\varphi$  η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας  $\varphi$ .

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας  $\omega$ .



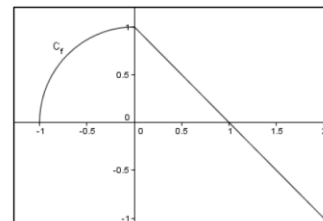
## Άσκηση 124.

## 13. ΘΕΜΑ\_4\_18231

Έστω  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(-\frac{3}{5}\right)$ ,  $f\left(-\frac{5}{9}\right)$ .



γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$ , να βρείτε τους αριθμούς

$f(\sin 120^\circ)$ ,  $f(\eta\mu 120^\circ)$ .

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x-2)$ ,  $x \geq 1$ .

A. P a n t e r o s