

ΕΥΘΕΙΑ

Ερωτήσεις από τη Θεωρία

1. Δώστε τον ορισμό της εξίσωσης μιας γραμμής C .
2. Δώστε τον ορισμό του συντελεστή διεύθυνσεως μιας ευθείας ϵ . Σε ποια περίπτωση δεν ορίζεται;
3. Ποια είναι η σχέση των συντελεστών διεύθυνσεως τους αν μία ευθεία είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα;
4. Ποιός είναι ο συντελεστής διεύθυνσεως της διχοτόμου δ της 1ης και 3ης γωνία των αξόνων, και ποιός της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων;
5. Ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσεως λ_1 και λ_2 ,
 - α) παράλληλες,
 - β) κάθετες.
6. Να αναφέρετε τούς τύπους οι οποίοι εκφράζουν ευθείες με τις ιδιότητες:
 - α) Διέρχεται από σημείο $A(x_0, \psi_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως λ .
 - β) Διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$
 - γ) Διέρχεται από το σημείο $A(x_1, 0)$ και είναι κάθετη στον x'/x
 - δ) Διέρχεται από το σημείο $B(0, \psi_1)$ και είναι κάθετη στον ψ'/ψ
 - ε) Διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_1)$
 - στ) Διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_1, \psi_2)$
 - ζ) Διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$
 - η) Διέρχεται από το σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως α .
 - θ) Διέρχεται από το $O(0, 0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως λ .
7. Ποια είναι η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας;
8. Σε ποιο διάνυσμα είναι παράλληλη η ευθεία $Ax + B\psi + \Gamma = 0$;

9. Σε ποιο διάνυσμα είναι κάθετη η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$;
10. Να αναφέρετε τις εξισώσεις των αξόνων $x'x$ και $y'y$.
11. Να αναφέρετε τον τύπο ο οποίος δίνει την απόσταση σημείου $A(x_0, y_0)$ από ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$.
12. Να αναφέρετε τον τύπο ο οποίος δίνει το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{AG}$, ή τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ .
13. Να αναφέρετε τις συντεταγμένες του μέσου ευθυγράμμου τμήματος AB , με $A(\alpha, \beta)$ και $B(\gamma, \delta)$.

Ερωτήσεις κρίσεως

1. Η εξίσωση $ax + by + \gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία;
2. Τι παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = 0$;
3. Τι παριστάνει η εξίσωση $|x| + |y| = 0$;
4. Τι παριστάνει η εξίσωση $|x-1| + |y+4| = 0$;
5. Τι συμπεραίνουμε για μια ευθεία αν ο συντελεστής διεύθυνσής της δεν ορίζεται;
6. Ποιός είναι ο συντελεστής διεύθυνσής της ευθείας $2x+3y-5 = 0$;
7. Ποιός είναι ο συντελεστής διεύθυνσής της ευθείας $4x+(\lambda -1)y+8 = 0$;
8. Πως βρίσκουμε την εξίσωση μιας ευθείας αν δέν ορίζεται ο $\sigma\delta$ της;
9. Ποιό είναι το πρόσημο του συντελεστής διεύθυνσής μιάς ευθείας αν αυτή σχηματίζει με τον $x'x$: α) οξεία γωνία, β) αμβλεία γωνία.

ΕΙΔΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α. Ασκήσεις που μας ζητούν εξίσωση ευθείας, η οποία έχει κάποιες ιδιότητες.

Οι ιδιότητες αυτές, αφορούν:

- α) Τον προσανατολισμό της ευθείας στο επίπεδο.
- β) Κάποια σημεία από τα οποία διέρχεται.

Στην περίπτωση αυτή, αξιοποιούμε την παραλληλία και την καθετότητα, με τούς γνωστούς τύπους: $\lambda_1 = \lambda_2$, και $\lambda_1 \lambda_2 = -1$.

Γνωρίζοντας την εξίσωση μιάς ευθείας, άρα και τον συντελεστή διεύθυνσής της, μπορούμε να βρούμε και τον συντελεστή διεύθυνσεως ευθείας, η οποία είναι παράλληλη ή κάθετη σε αυτή.

Από τα δεδομένα τώρα του προβλήματος, βρίσκουμε την εξίσωση και της άλλης ευθείας.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία:

- α) Διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): \psi = 3\chi + 5$
- β) Διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία $(\xi): \psi = 2\chi - 1$
- γ) Διέρχεται από τα σημεία $A(2,4)$ και $B(3,4)$
- δ) Διέρχεται από τα σημεία $A(7,7)$ και $B(7,10)$
- ε) Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}(1, -3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$.
- στ) Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}(1, -3)$ και διέρχεται από το σημείο $B(5, 1)$.
- ζ) Διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB , όπου $A(1, 2)$ και $B(0, -4)$.

2. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσεως ευθείας (ε) που σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία: α) $\pi/3$ β) $\pi/4$ γ) 0 δ) $5\pi/6$ ε) $-3\pi/4$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$ και:

- α) Έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = -1/2$
- β) Σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\varphi = 2\pi/3$
- γ) Είναι παράλληλη με τον άξονα $\chi'\chi$
- δ) Είναι παράλληλη με τον άξονα $\psi'\psi$

3. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσεως της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από τα σημεία: α) $A(2,4)$ και $B(3,-5)$ β) $A(1, 2\sqrt{3})$ και $B(2, 3\sqrt{3})$ γ) $A(4, 4\sqrt{3}+2)$ και $B(7, 5\sqrt{3}+2)$

Ποιά γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $\chi'\chi$ σε κάθε περίπτωση;

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το $M(1,-1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $5x-9y+12=0$
(ΘΕΜΑ 1983) Απάντηση: $y = \frac{5}{9}x - \frac{14}{9}$
6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ), η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-1,2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x-4y+12=0$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , έτσι ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το σημείο $\Gamma(\lambda, 2\lambda+3)$.
7. Να βρεθούν οι πραγματικοί α, β , ώστε η ευθεία $y = (2\alpha+3)x + \beta - 4$ να διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$ και $B(-2,-21)$.
8. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $\epsilon_1 : y = (\lambda-1)x + 3$ και $y = (2\lambda+1)x + 10$, να είναι
α) παράλληλες β) κάθετες.
8. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού α , για τις οποίες η ευθεία $(\alpha-2)x + (\alpha^2-16)y - 5 = 0$, είναι παράλληλη: α) στον άξονα x'/x και β) στον άξονα y'/y .
10. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τα σημεία:
α) $A(2,4)$ και $B(3,-1)$ β) $A(4,0)$ και $B(-12,5)$ γ) $A(1,2)$ και $B(-2,-3)$
δ) $A(0,0)$ και $B(1,1)$
11. Βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ευθείες $\epsilon_1 : \alpha x + 2y = \beta$ και $\epsilon_2 : x + \beta y = 1$ τέμνονται : α) στο $A(3,-4)$ β) στο σημείο $B(-1,3)$ γ) στο σημείο $\Gamma(0,0)$.
12. Να αποδείξετε ότι δύο ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι παράλληλες, αν και μόνο αν είναι της μορφής :
 $y = \lambda x + \kappa_1$ και $y = \lambda x + \kappa_2$ για τις ϵ_1, ϵ_2 αντίστοιχα, όπου $\lambda, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$.
Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τις ευθείες (ϵ_1) : $x = \xi_1$ και (ϵ_2) : $x = \xi_2$ με $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και από την τομή των ευθειών $3x-2y+3=0$ και $x+y=0$.
14. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,4)$. Να βρεθούν:
α) Η εξίσωση της AB .
β) Η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην AB και τέμνει τον x'/x στο σημείο $x_0 = 2$
γ) Η γωνία που σχηματίζει η AB με τους άξονες.

15. Να αποδείξετε ότι είναι συνευθειακά τα σημεία:

α) $A(0,2)$, $B(2,0)$, $\Gamma(1,1)$ β) $A(1,-3)$, $B(0,-1)$, $\Gamma(-1,1)$ γ) $A(-1,-1)$, $B(2,8)$, $\Gamma(1,5)$.

Παρατήρηση: Για να δείξουμε ότι τρία σημεία A , B , Γ , είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να θυμηθούμε τον τύπο που μας δίνει την απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, που μάθαμε στην Α' Λυκείου...

Ισχύει ότι: $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

16. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : x = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - y - 3 = 0$, $\varepsilon_3 : x + 2y - 4 = 0$.

Να αποδειχθεί ότι ορίζουν τρίγωνο ορθογώνιο αλλά όχι ισοσκελές.

17. Αν τα σημεία $K(3, \lambda)$ και $L(9, 2\lambda + 1)$ απέχουν μεταξύ τους 10 μονάδες μήκους, να υπολογισθεί ο πραγματικός λ .

18. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(4,1)$, και $\Gamma(7,2)$.

Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία τομής της ευθείας $\psi = x$ με τις AB και $A\Gamma$.

19. α) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες με εξισώσεις $3x - 6y + 4 = 0$ και $2x - 4y + 3 = 0$, είναι παράλληλες.

β) Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση.

20. α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ , ώστε η εξίσωση $(2\lambda^2 - 5\lambda - 3)x + (2\lambda^2 + 5\lambda + 2)y + \lambda^2 + 2 = 0$ να παριστάνει ευθεία.

β) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τιμές του λ , ώστε η παραπάνω ευθεία να είναι:

i) παράλληλη στον x'/x

ii) κάθετη στην πρώτη διχοτόμο των αξόνων.

21. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1, -3)$ και $B(2, 4)$.

22. Να βρείτε την γωνία των ευθειών με εξισώσεις: $\varepsilon_1 : x + y + 2 = 0$, και $3x - 4y + 5 = 0$

23. Να βρείτε την γωνία των ευθειών με εξισώσεις: $\varepsilon_1 : x = 3$, και $x + y + 1 = 0$.

24. Να βρείτε τη γωνία των ευθειών με εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = 0$, και $x = y$.

Παρατήρηση: Για να βρούμε τη γωνία δύο ευθειών ε_1 και ε_2 βρίσκουμε πρώτα την οξεία γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που είναι παράλληλα στην ευθεία και κατόπιν την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ από τον τύπο:

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}.$$

25. Να βρείτε τη εξίσωση της ευθείας η οποία είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:

$$\varepsilon_1: x - \psi + 1 = 0 \text{ και } x - \psi + 5 = 0.$$

26. Να βρείτε τη εξίσωση της ευθείας η οποία είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:

$$\varepsilon_1: \psi = x - 1 \text{ και } \psi = x + 4$$

26. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού κ η εξίσωση

$$(\kappa+1)x + (\kappa-4)\psi + (\kappa^2-3\kappa+2) = 0$$

παριστάνει ευθεία γραμμή. Για ποια τιμή του κ η ευθεία αυτή:

α) Είναι παράλληλη στον x'/x .

β) Είναι παράλληλη στον ψ'/ψ .

γ) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Είναι κάθετη στην ευθεία $x - 2\psi + 6 = 0$

ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην προηγούμενη περίπτωση.

27. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού κ η εξίσωση

$$(\kappa^2 - \kappa)x + (\kappa^2 - 3\kappa + 2)\psi + (\kappa + 1) = 0 \text{ παριστάνει ευθεία γραμμή.}$$

Τότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον x'/x :

28. Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\psi + 6) + \lambda(2x - \psi + 4) = 0$, λ πραγματικός. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση αυτή διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Παρατήρηση 1^η: Για να αποδείξουμε ότι μία οικογένεια ευθειών διέρχονται από το ίδιο σημείο, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α) Παίρνουμε δύο τυχαίες τιμές του λ και βρίσκουμε τις εξισώσεις δύο ευθειών της οικογένειας.

β) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

γ) Αποδεικνύουμε ότι το σημείο που βρήκαμε επαληθεύει την εξίσωση της οικογένειας των ευθειών.

Παρατήρηση 2^η : Για να βρούμε την εξίσωση ευθείας η οποία είναι μεσοπαράλληλη δύο γνωστών ευθειών ε_1 και ε_2 ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- α) Παίρνουμε μία τυχαία ευθεία ε η οποία τέμνει τις δύο ευθείες (προσέχουμε μόνο να μην είναι παράλληλη με αυτές)
- β) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ε με τις ε_1 και ε_2 , έστω τα A , B .
- γ) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB .
- δ) Η εξίσωση της ευθείας που ζητάμε έχει το σ.δ των ε_1 , ε_2 και διέρχεται από το σημείο M .

30. Να βρείτε τη εξίσωση της γραμμής στην οποία κινούνται τα σημεία του επιπέδου τα οποία έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(3, 2)$.
31. Οι κορυφές ενός τριγώνου είναι $A(t, 2t + 1)$, $B(2t - 1, 2 - t)$ και $\Gamma(t + 3, 3t)$, t πραγματικός.
Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το κέντρο βάρους του τριγώνου.
32. Σημείο $K(x, y)$ του επιπέδου κινείται έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου KAB , όπου $A(-2, -1)$, είναι σταθερό και ισούται με 12τ.μ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K .
33. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία A και B του επιπέδου είναι σταθερή.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε σαν αρχή των αξόνων το μέσο O του AB , με $(AB) = 2a$)

Παρατήρηση : Στα προβλήματα των γεωμετρικών τόπων ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- α) Αν δεν μας δίνουν τις συντεταγμένες σημείων, κατασκευάζουμε σύστημα συντεταγμένων και τοποθετούμε το σχήμα μας με τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε το μικρότερο δυνατό πλήθος μεταβλητών.
- β) Θεωρούμε ένα σημείο M του γεωμετρικού τόπου με συντεταγμένες (x, y) και γράφουμε την εξίσωση που ικανοποιούν τα x, y .
- γ) Κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στην εξίσωση του σημείου M .
Αν οι συντεταγμένες του M εξαρτώνται από κάποια παράμετρο, τότε απαλείφουμε την παράμετρο.

Β. Ασκήσεις που μας ζητούν να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ένα γνωστό τετράπλευρο της γεωμετρίας, ή μας ζητούν κάποια άλλη γεωμετρική ιδιότητα.

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τούς γεωμετρικούς ορισμούς των τετραπλεύρων.

Για να δείξουμε παραλληλία ή καθετότητα, αξιοποιούμε τούς συντελεστές διευθύνσεως των ευθειών.

Για να δείξουμε ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων, δείχνουμε ότι αυτά έχουν το ίδιο μήκος, χρησιμοποιώντας τον τύπο της απόστασης δυο σημείων.

Ασκήσεις

1. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $\psi = 0$, $\chi - \psi + 3 = 0$, $5\chi + 5\psi - 7 = 0$.
Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο που ορίζουν, είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
2. Το τρίγωνο ΑΒΓ ορίζεται από τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $\Gamma(-1,-2)$. Να βρεθούν:
α) Η εξίσωση του ύψους ΑΔ
β) Το μήκος του ΑΔ
3. Αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$, $\Gamma(4,-1)$ αποτελούν τρεις από τις κορυφές ενός παραλληλογράμου, να βρεθούν οι συντεταγμένες της 4ης κορυφής.
4. Δίνεται το σημείο $K(3,4)$ και η ευθεία $2\psi - \chi + 2 = 0$.
Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού Κ ως προς την ευθεία.
5. Έστω $A(0,-1)$, $B(3,5)$, $\Gamma(1,-3)$ και $\Delta(1,3)$ τέσσερα σημεία του επιπέδου.
α) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής Κ της διαγωνίου ΓΔ με τον χ/χ .
γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.
6. Δίνονται τα σημεία $A(-2,1)$, $B(2,1)$, $\Gamma(0,\alpha)$. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το τρίγωνο που ορίζουν τα σημεία να είναι ισόπλευρο.
7. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1,0)$, $B(2,3)$, $\Gamma(-1,2)$ και $\Delta(-2,-1)$ αποτελούν κορυφές ρόμβου, του οποίου να βρεθεί το εμβαδόν.

8. Δίνονται τα σημεία $A(-2,2)$ και $B(2,0)$. Να βρεθεί σημείο K της ευθείας $\chi-\psi+2=0$, ώστε η απόστασή του από το B να είναι διπλάσια της απόστασης από το A .
9. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία $\epsilon: 3\chi-\psi-3=0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνα εμβαδού $37,5 \text{ cm}^2$.
10. Η ευθεία $\epsilon_1: \chi+\psi-2=0$ τέμνει τον $\chi'\chi$ στο A και τον $\psi'\psi$ στο B , ενώ η $\epsilon_2: \chi-\psi+4=0$, τέμνει τον $\chi'\chi$ στο Γ και την ϵ_1 στο Δ . Να αποδείξετε ότι:
 - α) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta A$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
 - β) Αν O είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο λόγος των εμβαδών των $\Gamma\Delta A$ και AOB είναι $4,5$.
11. Δίνονται τα σημεία $A(-1,1)$, $B(1,3)$, $\Gamma(-3,4)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των υψών $A\Delta$ και ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$.
12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 6)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(7, -2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις:
 - α) των πλευρών του.
 - β) των υψών του
 - γ) των διαμέσων του.
13. Τα σημεία $A(3, -1)$ και $B(5, 7)$ είναι δύο κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$, ενώ το σημείο $H(4, -1)$ είναι το ορθόκεντρό του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του $AB\Gamma$.
14. Να βρείτε το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(-2, 2)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(4, 0)$.
15. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφή $A(1, 2)$ και οι εξισώσεις των δύο διαμέσων του είναι $\psi = 1$ και $\psi = 1/3\chi + 1/3$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.
16. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ όταν $A(-4, -5)$ και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $\psi = -\chi + 1$ και $\psi = 1/2\chi + 3/2$.
17. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ όταν $A(4, 1)$ και ένα ύψος και μία διά μέσός του έχουν εξισώσεις αντίστοιχα $\psi = -\chi - 1$ και $\psi = 1/2\chi + 3/2$.
18. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ αν $A(1, 2)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου που φέρνουμε από την ίδια κορυφή είναι αντίστοιχα $\psi = 2\chi + 4$ και $\psi = -\chi + 1$.

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι σε ασκήσεις που αφορούν γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα, παραλληλόγραμμο, ρόμβους κ.λ.π), θα μας βοηθήσουν πολύ:

α) Ένα πρόχειρο σχήμα.

β) Αν έχουμε σημεία και γραμμές, να ελέγχουμε αν τα σημεία ανήκουν ή όχι στις γραμμές.

(Αυτό θα μας βοηθήσει πολύ και στην κατασκευή του σχήματος)

19. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου οι δύο πλευρές έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: \psi = \chi + 1$ και $\varepsilon_2: \psi = -\chi + 2$. Αν η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 3)$, να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του και της διαγωνίου του $A\Gamma$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Η γραμμή με εξίσωση $\psi = \lambda\chi + \beta$ με $\lambda \neq 0$ παριστάνει η οποία τέμνει τον άξονα χ/χ στο σημείο..... και τον άξονα ψ/ψ στο σημείο..... Ο λ ονομάζεται..... και ισούται με την.....της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα.....
Αν το $\lambda > 0$, τότε η ευθεία σχηματίζει με τον χ/χγωνία, ενώ αν $\lambda < 0$, η ευθεία σχηματίζει.....γωνία.
- β) Η γραμμή με εξίσωση $\chi = \alpha$ παριστάνει.....που είναι.....στον άξονα χ/χ στο..... και έχει συντελεστή διεύθυνσεως.....
- γ) Η γραμμή με εξίσωση $\psi = \beta$ παριστάνει.....που είναι.....στον άξονα ψ/ψ στο..... και έχει συντελεστή διεύθυνσεως.....
- δ) Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής..... με ή
- ε) Η ευθεία με εξίσωση..... είναι παράλληλη στο διάνυσμα....., ενώ η ευθεία με εξίσωση.....είναι κάθετη στο διάνυσμα.....
- στ) Ο άξονας χ/χ έχει εξίσωση....., ενώ ο άξονας ψ/ψ έχει εξίσωση.....

2. Να σημειώσετε με το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- | | | |
|--|----------|-----------|
| α) Από το σημείο $A(\alpha, \beta)$ περνούν άπειρες ευθείες με εξίσωση $\psi = \lambda\chi + \kappa$. | Σ | Λ |
| β) Η εξίσωση $\psi = 2\chi$ γράφεται $\psi = 2\chi + 0$. | Σ | Λ |
| γ) Η εξίσωση $\psi = 2$ γράφεται $\psi = 0\chi + 2$. | Σ | Λ |
| δ) Η ευθεία $-\psi = \chi + 4$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον χ/χ . | Σ | Λ |
| ε) Αν ο συντελεστής διεύθυνσεως μιας ευθείας δεν ορίζεται η ευθεία δεν έχει γραφική παράσταση. | Σ | Λ |
| στ) Οι ευθείες $\psi = 2\chi$ και $2\psi - 4\chi = 0$ είναι παράλληλες | Σ | Λ |

ζ) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ έχει εξίσωση $\alpha/\chi + \beta/\psi = 1$.	Σ	Λ
η) Η ευθεία $\chi - \psi = 1$ διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$	Σ	Λ
θ) Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(2, 0)$ έχει εξίσωση $\chi + 2 = 0$	Σ	Λ
ι) Ο συντελεστής διεύθυνσής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2)$ και $(1, -7)$ δεν ορίζεται	Σ	Λ
ια) Η ευθεία $\psi = \alpha\chi$ είναι κάθετη στην ευθεία $\psi = 1/\alpha\chi$.	Σ	Λ
ιβ) Η εξίσωση $100\chi^2 - 4\psi^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες που διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$.	Σ	Λ
ιγ) Αν $\varepsilon_1: \chi = -2$ και $\varepsilon_2: \psi = 7$, είναι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.	Σ	Λ

3. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Αν η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $(\chi, 2)$ και $(1, 0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $(2, 3)$ και $(-2, 1)$, τότε το χ είναι:

A: 3 B: -2 Γ: 2 Δ: 1 E: 5

- β) Αν μία ευθεία τέμνει τον ψ/ψ στο σημείο $(0, 4)$ και ορίζεται από τα σημεία $(-2, 3)$ και $(6, \beta)$, τότε το β είναι:

A: 4 B: 7 Γ: 3 Δ: -3 E: -2

- γ) Αν το διάνυσμα $\vec{\delta} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ με $|\vec{\delta}| = 1$ είναι παράλληλο στην ευθεία $\psi = 2\chi + 3$, τότε είναι:

A: $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ B: $\alpha = 1/2$ και $\beta = 1/3$ Γ: $\alpha/\beta = 2/3$
Δ: $\alpha/\beta = 3/2$ E: $\alpha/\beta = 1/2$

4. Δίνεται η εξίσωση $\psi = \lambda\chi + \beta$, λ πραγματικός, $\beta \neq 0$. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Όταν το λ παραμένει σταθερό και το β μεταβάλλεται, η εξίσωση παριστάνει.....
β) Όταν το β παραμένει σταθερό και το λ μεταβάλλεται, η εξίσωση παριστάνει.....

5. Έστω η ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$. Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο ($<$ ή $>$ ή $=$) στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Η ε δεν διέρχεται από το πρώτο τεταρτημόριο $\Leftrightarrow \lambda \dots 0$ και $\beta \dots 0$.
β) Η ε δεν διέρχεται από το δεύτερο τεταρτημόριο $\Leftrightarrow \lambda \dots 0$ και $\beta \dots 0$.
γ) Η ε δεν διέρχεται από το τρίτο τεταρτημόριο $\Leftrightarrow \lambda \dots 0$ και $\beta \dots 0$.
δ) Η ε δεν διέρχεται από το τέταρτο τεταρτημόριο $\Leftrightarrow \lambda \dots 0$ και $\beta \dots 0$.
ε) Η ε βρίσκεται στο 1^ο και το 2^ο τεταρτημόριο $\Leftrightarrow \lambda \dots 0$ και $\beta \dots 0$.

6. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β.
(Η πρώτη στήλη περιέχει εξισώσεις ευθειών και η δεύτερη συντελεστές διευθύνσεως)

ΣΤΗΛΗ Α			ΣΤΗΛΗ Β
α) $\chi + \frac{1}{2}\psi + 1 = 0$	1	α	1. - 4/3
β) $\frac{x}{3} + \frac{\psi}{4} = 1$	2	β	2. Δεν ορίζεται
γ) $8\psi + 4 = 0$	3	γ	3. - 2
δ) $2\chi + 3 = 0$	4	δ	4. 0
ε) $-2\chi + 3\psi + 5 = 0$	5	ε	5. 2/3
		ζ	6. - 1/2

7. Να σημειώσετε με το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- | | | |
|--|---|---|
| α) Οι ευθείες με εξισώσεις $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma = 0$ και $\alpha\chi + \beta\psi + \delta = 0$ είναι παράλληλες. | Σ | Λ |
| β) Το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta} = (\alpha, 0)$ είναι κάθετο στον ψ/ψ | Σ | Λ |
| γ) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$ είναι κάθετο στην $B\chi + A\psi + \Gamma = 0$ | Σ | Λ |
| δ) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda A, \lambda B)$ είναι κάθετο στην $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ | Σ | Λ |
| ε) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, -B)$ είναι παράλληλο στην $B\chi + A\psi + \Gamma = 0$ | Σ | Λ |
| στ) Οι ευθείες με εξισώσεις $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma = 0$ και $\alpha'\chi + \beta'\psi + \gamma' = 0$, είναι κάθετες $\Leftrightarrow \alpha\alpha' = -\beta\beta'$. | Σ | Λ |
| ζ) Η ευθεία που έχει εξίσωση $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma = 0$, αν $\alpha = \beta$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο του 1 ^{ου} και του 3 ^{ου} τεταρτημορίου. | Σ | Λ |
| η) Η ευθεία που έχει εξίσωση $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma = 0$, αν $\alpha = -\beta$ είναι κάθετη στη διχοτόμο του 2 ^{ου} και του 4 ^{ου} τεταρτημορίου. | Σ | Λ |
| θ) Η οξεία γωνία δύο ευθειών είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας που ορίζουν τα κάθετα προς αυτές διανύσματα. | Σ | Λ |
| ι) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$ και είναι κάθετη στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{j}$ έχει εξίσωση $\psi = 3$. | Σ | Λ |

8. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(0, 4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $3\chi - 4\psi = 8$ έχει εξίσωση:

A: $3\chi - 4\psi = 4$

B: $3\chi - 4\psi + 16 = 0$

Γ: $4\psi = -3\chi + 4$

Δ: $\psi = \frac{4}{3}\chi + 4$

E: $\psi = \chi + 4$

β) Αν οι ευθείες $2\psi + \chi + 3 = 0$ και $3\psi + \alpha\chi + 2 = 0$ είναι κάθετες, τότε το α είναι:

A: $\pm 2/3$

B: $-2/3$

Γ: $-3/2$

Δ: 6

E: -6

γ) Αν το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-2, 7)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε , τότε ο λ είναι:

A: $2/7$

B: $-2/7$

Γ: $7/2$

Δ: $-7/2$

E: 1

δ) Η μεσοκάθετος του τμήματος που ορίζεται από τα σημεία $(2, 6)$ και $(-4, 3)$ έχει εξίσωση:

A: $4\chi + 2\psi - 5 = 0$

B: $4\chi - 2\psi + 13 = 0$

Γ: $\chi - 2\psi + 10 = 0$

Δ: $4\chi + 2\psi - 13 = 0$

E: $4\chi + 2\psi + 13 = 0$

ε) Οι ευθείες $\psi = 0$, $\chi = 3\psi$ και $3\chi + \psi = 7$ ορίζουν τρίγωνο:

A: ισοσκελές

B: οξυγώνιο

Γ: αμβλυγώνιο

Δ: ισόπλευρο

E: ορθογώνιο

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Σε καρτεσιανό σύστημα $O\chi\psi$, η εξίσωση ευθείας:

$$(2\lambda^2 + \lambda + 1)\chi - (\lambda^2 - \lambda + 1)\psi - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0 \text{ όπου } \lambda \in A = \{0, 1, 2, \dots, 19\}$$

Παριστάνει τις πορείες 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.

α. Να βρεθεί η θέση του λιμανιού

β. Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο $(1, 2)$ υπάρχει φάρος που δεν λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση, κάποιο από τα πλοία να συγκρουσθεί με τον φάρο.

γ. Εξετάστε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση $11\chi - 3\psi - 22 = 0$.

2. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός αεροδρομίου

προσδιορίζεται από το σημείο $\Delta(2, 4)$ και η προβολή της θέσης ενός αεροπλάνου πάνω στο καρτεσιανό σύστημα δίνεται από το σημείο $K(t+1, t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- α) Να εξετάσετε αν το αεροπλάνο θα περάσει πάνω από το αεροδρόμιο όταν κινείται ευθύγραμμα.
- β) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση του αεροπλάνου από το αεροδρόμιο αν κινείται ευθύγραμμα σε σταθερό ύψος 2 km.

3. Ανοικτά κάποιου λιμανιού υπάρχουν τρεις σηματοδούρες Σ_i , $i = 1, 2, 3$ που οριοθετούν μία τριγωνική περιοχή στην οποία απαγορεύονται οι καταδύσεις. Ο υπεύθυνος λιμενάρχης, ο οποίος, βρίσκεται σε ένα πλοίο κάπου μέσα στην τριγωνική περιοχή, στέλνει τρεις βάρκες με δύο ναύτες η κάθε μία να μετρήσουν τις αποστάσεις των Σ_i , $i = 1, 2, 3$ από το πλοίο.

Η πρώτη βάρκα πλέει 2 ναυτικά μίλια δυτικά και ένα μίλι βόρεια και εκεί συναντά την πρώτη σηματοδούρα.

Η δεύτερη βάρκα πλέει 2 μίλια νότια και 2 ανατολικά και εκεί συναντά την δεύτερη σηματοδούρα. Η τρίτη βάρκα πλέει 3 μίλια βόρεια και 1 μίλι ανατολικά και συναντά την τρίτη σηματοδούρα.

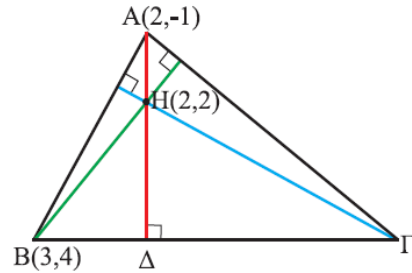
Με τα παραπάνω δεδομένα να υπολογίσετε το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής.

4. Σε ένα χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Ox\psi$ ένα πλοίο ξεκινά από κάποιο λιμάνι Λ και κατευθύνεται προς το λιμάνι O . Το ραντάρ θέσης του πλοίου δίνει για κάθε χρονική στιγμή συντεταγμένες $\Pi_1(t - 40, t - 10)$, $t \geq 0$.
 - α) Που βρίσκεται το λιμάνι Λ στον χάρτη;
 - β) Πόσο απέχει το λιμάνι Λ από το λιμάνι O ;
 - γ) Βρίσκεται το πλοίο στη σωστή πορεία για το λιμάνι O ;
 - δ) Αν η θέση ενός άλλου πλοίου προσδιορίζεται από το σημείο $\Pi_2(t + 10, t - 30)$, $t \geq 0$ υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συναντηθούν;
 - ε) Ποια είναι η απόσταση τους τη χρονική στιγμή $t = 10$;



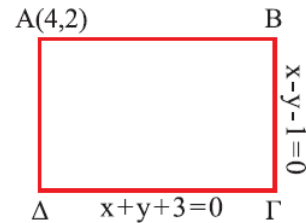
1. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και H ορθόκεντρό του. Αν είναι $A(2,-1)$, $B(3,4)$ και $H(2,2)$, να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .

Λύση:



2. Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda - 1)x + (\lambda - 3)y + 3\lambda + 6 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.
 - Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

3. Οι δύο πλευρές ορθογωνίου παρ/μου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις: $x + y + 3 = 0$ και $x - y - 1 = 0$ και η μία κορυφή του $A(4,2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου καθώς και του σημείου τομής των διαγωνίων του.



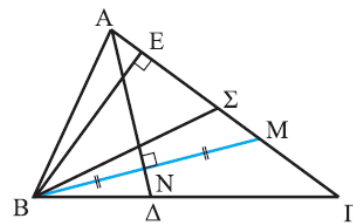
4. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 + 8x + 16 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο ευθείες (η) και (θ).
 - Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (η) και (θ) είναι κάθετες.
 - Να βρείτε σημείο $K(a,b)$, $a > 0$ και $b > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (4, a)$ να είναι παράλληλο προς μία από τις δύο ευθείες (η) και (θ) και το διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (-8, 2b)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.
 - Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που διέρχεται από το σημείο K και το κέντρο του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου γνωρίζουμε:

- την εξίσωση της διχοτόμου AD : $3x + y = 10$
- την εξίσωση του ύψους BE : $x - y = 6$
- την εξίσωση της διάμεσου BS : $13x - 3y = 8$

Να βρείτε:

- Τις συντεταγμένες της κορυφής B .
- Το συμμετρικό του B ως προς την AD έστω M .
- Την εξίσωση της AG .
- Τις συντεταγμένες των κορυφών A και Γ .

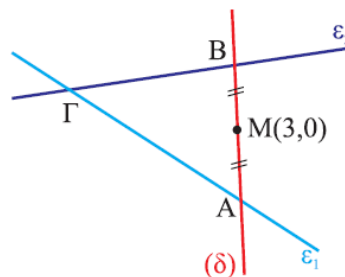


6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(2,3)$, $v_a : 3x - 5y + 6 = 0$ και $\mu_a : x - 11y + 2 = 0$. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.

7. Δίνονται οι ευθείες:

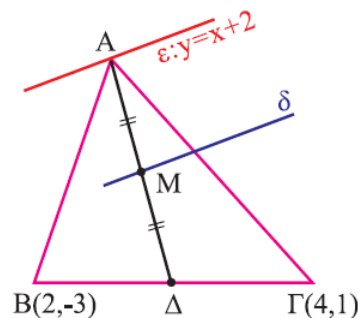
$$(\varepsilon_1): y = 2x - 3 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y + x + 3 = 0$$

- α. Βρείτε την ευθεία (δ) που περνάει από το $M(3, 0)$ και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα A, B αντίστοιχα ώστε το M να είναι μέσο του AB .
 β. Αν Γ το κοινό σημείο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ βρείτε το εμβαδόν του $AB\Gamma$.



8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(2, -3)$ και $\Gamma(4, 1)$ ενώ η κορυφή A κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x - y + 2 = 0$ και M το μέσο της διαμέσου $A\Delta$

- α. Δείξτε ότι το M κινείται σε ευθεία (δ) παράλληλη στην (ε).
 β. Βρείτε την απόσταση του M από την (ε).
 γ. Αν $(AB\Gamma) = 10\tau.μ.$ βρείτε το M .



9. Δίνεται η εξίσωση (ε): $(\lambda - 2)x - (2\lambda + 1)y + 2 - \lambda = 0$.

- i. Δείξτε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθείες που περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο να βρείτε.
 ii. Βρείτε για ποια τιμή του λ η απόσταση του $A(2, 2)$ από την ευθεία (ε) είναι $\frac{3}{\sqrt{5}}$
 iii. Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία (ε) είναι
 • παράλληλη στον $x'x$
 • παράλληλη στον $y'y$
 • περνάει από το $0(0, 0)$
 iv. Αν λ_1, λ_2 δύο τιμές του λ ώστε $\lambda_1\lambda_2 = -1$, δείξτε ότι οι αντίστοιχες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που προκύπτουν από την (ε) για τις τιμές λ_1, λ_2 τέμνονται κάθετα.

10. Δίνονται οι εξισώσεις: i. $\lambda x - y + 1 = 0$ ii. $(\lambda + 1)x - (1 - \lambda)y + 4 = 0$

- α. Δείξτε ότι και οι δύο εξισώσεις παριστάνουν ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β. Βρείτε για ποιες τιμές των λ η ευθεία με εξίσωση την i. είναι παράλληλη στην ευθεία: $\zeta_1: 4x - 2y + 3 = 0$.
 γ. Βρείτε για ποιες τιμές των λ η ευθεία με εξίσωση την ii. είναι κάθετη στην ευθεία: $\zeta_2: x - 3y + 4 = 0$.
 δ. Δείξτε ότι οι ευθείες που βρήκατε στα β. και γ. τέμνονται και βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.
 ε. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες με εξίσωση την ii. διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:
 - i. Διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.
 - ii. Διέρχεται από το σημείο $B(-1,-2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $(\delta): -x + y - 1 = 0$.
 - iii. Διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x = 2$.
2. Ευθεία (ε) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 135° και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0,4)$.
 - i. Να βρείτε την εξίσωση της (ε) .
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (δ) που είναι κάθετη στην (ε) στο σημείο της $B(-2,6)$.
3. Έστω τα σημεία $K(-3,1)$, $\Lambda(5,-1)$ και $M(-7,2)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ίδια ευθεία και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία αυτή με τους άξονες.
4. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 2\lambda)x + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)y + \lambda + 1 = 0$ (1).
 - i. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία γραμμή;
 - ii. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία είναι παράλληλη στον $x'x$;
 - iii. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
5. Δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,0)$ και η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$.
 - i. Να βρείτε σημείο M της ευθείας (ε) ώστε το τρίγωνο ABM να είναι ορθογώνιο στο M .
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABM .
6. Το Πολεμικό μας Ναυτικό εκτελεί άσκηση με πραγματικά πυρά, σε θαλάσσια περιοχή στο Βόρειο Αιγαίο, η περίμετρος της οποίας περιγράφεται από την εξίσωση: $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 40 = 0$. Την ίδια χρονική στιγμή θαλαμηγός που βρίσκεται στη θέση $\Theta(2,-10)$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων αποφασίζει να κινηθεί για ανεφοδιασμό σε κάνισμα με κατεύθυνση νησί που βρίσκεται στη θέση $N(2,14)$. Με δεδομένο ότι η θαλαμηγός κινείται σε ευθεία γραμμή πιστεύεται ότι οι επιβάτες της θα κινδυνεύσουν; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας.)
 Ας υποθέσουμε ότι στην θέση $M(1,-4)$ υπάρχει και άλλος ένας σταθμός ανεφοδιασμού. Μετά τη λήξη της άσκησης, ο καπετάνιος της θαλαμηγού ποιον από τους δύο σταθμούς θα πρέπει να επιλέξει ώστε να διανύσει τη μικρότερη δυνατή απόσταση;
 (Θεωρήστε ότι η θαλαμηγός ξεκινάει από το σημείο $\Theta(2,-10)$).

7. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : \lambda x - (\lambda - 3)y = \lambda - 2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : (\lambda + 3)x - \lambda y = \lambda$$

- i. Να δείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής τους.

8. Έστω τα σημεία $A(\kappa+2, \lambda-2)$ και $B(\lambda, \kappa)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι το μέσο M του AB κινείται σε ευθεία (ε) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- ii. Δείξτε ότι η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην AB .
- iii. Βρείτε την απόσταση του σημείου $\Delta(-3, -3)$ από την ευθεία (ε) .

9. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, 6)$ και η βάση του $B\Gamma$ έχει εξίσωση: $4x - 3y - 9 = 0$. Αν το σημείο $M(3, 1)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 45 τ.μ. :

- i. να υπολογίσετε την $d(A, B\Gamma)$,
- ii. να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$,
- iii. να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .

10. Οι συντεταγμένες ενός σημείου $M(x, y)$ επαληθεύουν την εξίσωση:

$$x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 4xy + 2 = 0$$

- i. Να αποδείξετε ότι το M κινείται σε δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.
- iii. Να βρείτε την απόσταση των δύο ευθειών.

