

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ο σκοπός της Συνδυαστικής είναι η απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου. Παρακάτω, θα δούμε βασικούς τύπους οι οποίοι θα μας βοηθήσουν στο σκοπό αυτό. Η απαρίθμηση όμως των στοιχείων ενός συνόλου, δεν είναι πάντοτε απλή υπόθεση. Θα προσπαθήσουμε, όσο αυτό είναι δυνατό, να ομαδοποιήσουμε τις ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού. Αρχίζουμε πρώτα από τη θεμελιωδέστερη αρχή, επάνω στην οποία στηρίζονται οι υπόλοιπες, την **Βασική αρχή της απαρίθμησης**.

### 1. Βασική αρχή της απαρίθμησης

Αν μία διαδικασία γίνεται σε  $k$  φάσεις από τις οποίες η πρώτη φάση μπορεί να εκτελεσθεί κατά  $n_1$  διαφορετικούς τρόπους, η δεύτερη φάση κατά  $n_2$  διαφορετικούς τρόπους, η  $k$  φάση κατά  $n_k$  τρόπους, τότε η συνολική διαδικασία γίνεται κατά  $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$  τρόπους.

### Ασκήσεις

- Ένα φροντιστήριο έχει τρεις κενές θέσεις, μια μαθηματικού μια φιλόλογου και μια φυσικού. Για την κάλυψη των θέσεων αυτών υπάρχουν 2 μαθηματικοί, 4 φιλόλογοι και 3 φυσικοί. Με πόσους τρόπους μπορεί ο ιδιοκτήτης του φροντιστηρίου να καλύψει αυτές τις θέσεις;
- Πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αριθμοί που αποτελούνται από διαφορετικά ψηφία;
- Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να συμπληρώσουμε 4 διαδοχικά κενά χρησιμοποιώντας για κάθε κενό από ένα ψηφίο, με την προϋπόθεση το τελευταίο ψηφίο να μην είναι το 6.
- Θέλουμε να κατασκευάσουμε πινακίδες κυκλοφορίας οχημάτων που να περιέχουν τρία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου, τα οποία να ακολουθούνται από ένα τετραψήφιο αριθμό π.χ YKK - 2130. Να υπολογίσετε πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούμε να κατασκευάσουμε.
- Υπάρχουν 4 λεωφοριακές γραμμές που συνδέουν τις πόλεις Α και Β και 3 γραμμές που συνδέουν τη Β με τη Γ. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει:
  - Από την Α στη Γ μέσω της Β
  - Από την Α προς τη Γ μέσω Β με επιστροφή στην Α πάλι μέσω Β.
  - Α - Β - Γ - Β - Α χωρίς να χρησιμοποιηθεί δύο φορές το ίδιο λεωφορείο;
- Πόσοι δρόμοι συνδέουν τις πόλεις Α και Β, αν οι Β και Γ συνδέονται με 4 δρόμους,

ενώ η μετάβαση από το Α στο Γ μέσω Β με επιστροφή χωρίς χρησιμοποίηση του ίδιου δρόμου δύο φορές μπορεί να γίνει με 240 διαφορετικούς τρόπους; ( 5 δρόμοι )

## 2. Μεταθέσεις

Μεταθέσεις των  $n$  στοιχείων ενός συνόλου, ονομάζουμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε σε σειρά τα  $n$  αυτά στοιχεία.

Το πλήθος των μεταθέσεων  $n$  στοιχείων ισούται με:  $n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  και το συμβολίζουμε  $M_n$ .

Το γινόμενο  $n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  συμβολίζεται  $n!$  και διαβάζεται «  $n$  παραγοντικό ». Ισχύει δηλαδή ότι:  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ , και  $0! = 1$ .

## Ασκήσεις

### Α' ΟΜΑΔΑ

1. α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| $n$  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

β) Να υπολογίσετε τα:  $\frac{8!}{4!4!}$ ,  $\frac{1!+2!+3!+4!+5!}{2!}$ ,  $\frac{n!}{(n-3)!}$ ,  $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$

2. Σε ένα τελικό Ολυμπιακών Αγώνων συμμετέχουν 8 αθλητές από τους οποίους κανένας δεν είναι φαβορί για οποιαδήποτε θέση. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν οι αθλητές;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν 4 επιβάτες να καθίσουν στα 4 καθίσματα ενός ΙΧ αυτοκινήτου;
4. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΑΡΙΘΜΟΣ υπάρχουν;
5. Μία κάλπη περιέχει 10 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 10. Εξάγουμε διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση ένα ένα τα σφαιρίδια, καταγράφοντας τον αριθμό καθενός. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν;
6. Διαθέτουμε 10 αριθμημένα σφαιρίδια από το 1 έως το 10 και 10 κουτιά. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τακτοποιήσουμε τα σφαιρίδια στα κουτιά έτσι ώστε σε κάθε κουτί να αντιστοιχεί ένα μόνο σφαιρίδιο;

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη γραμμή 4 αγόρια και 3 κορίτσια έτσι, ώστε να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;
2. Έχουμε 10 αυτοκίνητα από τα οποία τα 3 είναι τύπου FIAT τα 4 τύπου TOYOTA και τα υπόλοιπα 3 τύπου FORD. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα αυτοκίνητα ώστε τα αυτοκίνητα ίδιου τύπου να είναι μαζί;
3. Τρεις άνδρες και τέσσερις γυναίκες θα καθίσουν σε επτά αριθμημένες θέσεις. Οι γυναίκες θα καθίσουν στις μονές θέσεις και οι άνδρες στις ζυγές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

### Παρατήρηση:

Οι ασκήσεις 1, 2, 3 της δεύτερης ομάδας είναι συνδυασμός μετάθεσης και βασικής αρχής της απαρίθμησης.

## 3. Διατάξεις

Αν  $A$  είναι ένα σύνολο με  $n$  στοιχεία, θα ονομάζουμε διάταξη των  $n$  στοιχείων του  $A$  ανά  $k$ , καθένα από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε  $k$  διαφορετικά στοιχεία του  $A$  και να τα βάλουμε σε μία σειρά. Οι διατάξεις των  $n$  στοιχείων του  $A$  ανά  $k$  χωρίζονται σε 2 κατηγορίες:

- α) Τις διατάξεις χωρίς επανάληψη
- β) Τις διατάξεις με επανάληψη.

### α) ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Το πλήθος των διατάξεων των  $n$  στοιχείων ανά  $k$  συμβολίζεται με  $\Delta_k^n$  και ισχύει ότι

$$\Delta_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}. \text{ Αν δεχθούμε ότι } 0! = 1, \text{ τότε για } n = k \text{ ο τύπος δίνει } \Delta_k^n = n! \text{ και είναι}$$

η μετάθεση των  $n$  στοιχείων του συνόλου  $A$ . Ισχύει ότι  $n \geq k$ .

### β) ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Αν  $A$  είναι ένα σύνολο με  $n$  στοιχεία, τότε θα λέμε διάταξη με επανάληψη των  $n$  στοιχείων του  $A$  ανά  $k$  καθέναν από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε  $k$  στοιχεία του  $A$ , όχι υποχρεωτικά διαφορετικά, και να τα

βάλουμε σε μία σειρά. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι:  $\Delta_k^n = n^k$

## Ασκήσεις

### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 θεατές σε 7 καρέκλες μιας σειράς θεάτρου;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν 4 επιβάτες να καθίσουν στα 6 καθίσματα ενός λεωφορείου;
3. Για 100 θέσεις Α Γυμνασίου ενός πρότυπου σχολείου, γίνεται κλήρωση στην οποία συμμετέχουν 300 μαθητές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή;
4. Μία κάλπη περιέχει 10 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 10. Εξάγουμε διαδοχικά ένα ένα 5 σφαιρίδια, καταγράφοντας τον αριθμό καθενός. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν, αν η εξαγωγή γίνεται:
  - α) Χωρίς επανατοποθέτηση.
  - β) Με επανατοποθέτηση.
5. Από μία τράπουλα τραβάμε διαδοχικά 4 φύλλα. Πόσες τετράδες φύλλων μπορούμε να πάρουμε αν η εξαγωγή γίνεται:
  - α) Χωρίς επανατοποθέτηση.
  - β) Με επανατοποθέτηση.
6. Για ποιες τιμές του  $n$  το πλήθος των διατάξεων των  $n$  ανά 3 ισούται με το πλήθος των διατάξεων των  $n$  ανά 4;
7. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 όταν:
  - α) Έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά.
  - β) Τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.
8. Να βρεθεί πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε αν περιστρέψουμε τέσσερις φορές μία ρουλέτα με τα ψηφία 1 έως 9. ( Με επανάληψη)

### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση:  $2\Delta_2^v + 50 = \Delta_2^{2v}$ .
2. Τέσσερα άτομα εισέρχονται στο ασανσέρ στο ισόγειο μιάς 7ώροφης πολυκατοικίας. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν στους ορόφους της πολυκατοικίας;
3. Πόσες είναι οι διαφορετικές στήλες που πρέπει να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟΠΟ ώστε να είμαστε σίγουροι ότι θα πιάσουμε 13άρι;

4. Αν οι πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων περιέχουν τρία γράμματα που ακολουθούνται από ένα τετραψήφιο αριθμό, πόσες τέτοιες διαφορετικές πινακίδες μπορούμε να σχηματίσουμε;

## 4. Συνδυασμοί

Αν έχουμε ένα σύνολο  $A$  με  $n$  στοιχεία, τότε κάθε υποσύνολό του με  $k$  στοιχεία λέγεται συνδυασμός των  $n$  στοιχείων του  $A$  ανά  $k$ .

Το πλήθος των συνδυασμών των  $n$  στοιχείων ανά  $k$  το συμβολίζουμε  $\binom{n}{k}$  και το διαβάζουμε « συνδυασμοί των  $n$  ανά  $k$  ».

Ισχύει ότι:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

### Παρατήρηση:

Από πρώτη άποψη, ο συνδυασμός των  $n$  στοιχείων ανά  $k$  φαίνεται ότι δεν διαφέρει από τη διάταξη των  $n$  στοιχείων ανά  $k$ .

Η διαφορά όμως, είναι ότι **στη μεν διάταξη μας ενδιαφέρει η σειρά των  $n$  στοιχείων, στο δε συνδυασμό όχι.**

Για το λόγο αυτό, για να βρούμε τους συνδυασμούς των  $n$  ανά  $k$ , διαιρούμε τις διατάξεις των  $n$  ανά  $k$  με  $k!$

## Ασκήσεις

### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Σε ένα διαγώνισμα Φυσικής, οι διαγωνιζόμενοι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σε έξη από τις εννέα ερωτήσεις. Με πόσους τρόπους μπορεί ένας μαθητής να διαλέξει τις ερωτήσεις που θα απαντήσει;
2. Με πόσους τρόπους μπορούμε από μία τράπουλα με 52 χαρτιά να επιλέξει 5;
3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από 8 παιδιά μία ομάδα μπάσκετ η οποία αποτελείται από 5 άτομα;
4. Στο παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ επιλέγουμε 6 από τους 49 αριθμούς. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τους αριθμούς αυτούς;
5. Σε ένα τραπέζι κάθονται 10 άτομα και πρόκειται να κάνουν μία πρόποση. Με πόσους τρόπους θα τσουγκρίσουν τα ποτήρια τους ανά 2;
6. Τέσσερα χωριά μιας περιοχής πρόκειται να συνδεθούν ανά δύο μεταξύ τους με δρόμους. Πόσοι δρόμοι χρειάζεται να κατασκευασθούν;

7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μία τάξη 30 μαθητών μία επιτροπή πέντε ατόμων;
8. Θεωρούμε ένα κύκλο και 10 σημεία επάνω σ'αυτόν.  
α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα 10 αυτά σημεία;  
β) Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά;
9. Να δείξετε ότι: α)  $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$  β)  $\binom{v}{\kappa} = \binom{v}{v-\kappa}$ .

## Β' ΟΜΑΔΑ

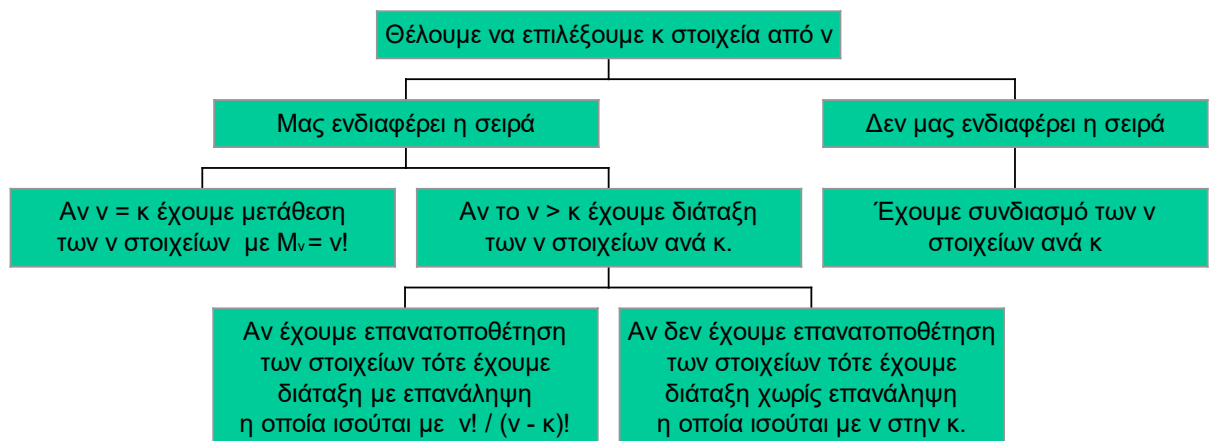
1. Πόσες διαφορετικές σαλάτες με δύο τουλάχιστον είδη μπορούμε να φτιάξουμε από ντομάτα, μαρούλι, αγγούρι και πατάτες; ( Απάντηση: 11 διαφορετικές σαλάτες )
2. Ο διοικητής ενός λόχου έχει τη διοίκηση 70 οπλιτών, 10 υπαξιωματικών και 3 αξιωματικών. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει μία ομάδα ανίχνευσης η οποία να αποτελείται από 1 αξιωματικό, 2 υπαξιωματικούς και 10 οπλίτες.
3. Σε κοινοβούλιο με τρία κόμματα, το καθένα αντιπροσωπεύεται με 180, 90 και 30 βουλευτές. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για το σχηματισμό μιας τριακονταμελούς επιτροπής στην οποία θα μετέχουν 18, 9 και 3 βουλευτές από κάθε κόμμα αντιστοίχως;
4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε 12 άτομα  
α) σε δύο ομάδες των 7 και 5 ατόμων;  
β) σε τρεις ομάδες των 5, 4 και 3 ατόμων; ( Απάντηση: α) 792 β) 27790 )
5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 από 12 πίνακες ζωγραφικής όταν:  
α) Πρέπει υποχρεωτικά να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο πίνακα;  
β) Πρέπει να αποκλείσουμε ένα συγκεκριμένο πίνακα;  
γ) Πρέπει να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο πίνακα και να αποκλείσουμε ένα συγκεκριμένο πίνακα; ( Απάντηση: α) 330 β) 462 γ) 210 τρόπους )
6. Από μία τάξη 10 αγοριών επιλέγουμε 5 για να πάρουν μέρος σε έναν αγώνα μπάσκετ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα επιλέξουμε αν:  
α) Δεν υπάρχει περιορισμός στην επιλογή;  
β) Στην 5μελή ομάδα να συμπεριλαμβάνεται πάντα το ψηλότερο αγόρι της τάξης; ( Απάντηση: 126 τρόπους )
7. Ένα ζαχαροπλαστείο διαθέτει 4 διαφορετικά είδη παγωτού ( βανίλια - σοκολάτα - φράουλα - κεράσι ). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε ένα χωνάκι από 3 μπάλες παγωτού αν:  
α) Όλες οι μπάλες είναι διαφορετικές.  
β) Δύο από τις μπάλες είναι ίδιες; (Απάντηση: α) 4 τρόπους β) 12 τρόπους)

8. Αν  $10 \binom{v}{5} = 21 \binom{v}{3}$  να υπολογίσετε το  $\binom{v}{6}$  όπου  $v$  θετικός ακέραιος.
9. Να αποδείξετε ότι:  $\binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1} = \binom{v}{k}$  όπου  $v \geq k+1, v \in \mathbb{N}^*$ .
10. Αν  $\Delta_{\mu}^v = 3024$  και  $\binom{v}{\mu} = 126, v \geq \mu$ , να υπολογισθεί ο θετικός ακέραιος  $\mu$ . ( $\mu = 4$ )
11. Σε ένα ράφι είναι τοποθετημένα 10 βιβλία που φέρνουν τις ενδείξεις 1, 2, 3, ..., 10. Παίρνουμε από το ράφι στην τύχη 4 βιβλία. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους:
- Μπορεί να επιλεγεί το βιβλίο με την ένδειξη 1.
  - Να μην επιλεγεί το βιβλίο με την ένδειξη 4.
  - Να επιλεγεί το βιβλίο με την ένδειξη 1 και να μην επιλεγεί το βιβλίο με την ένδειξη 4.

Στα απλά προβλήματα απαρίθμησης πρέπει να μπορούμε να κάνουμε διάκριση μεταξύ των προβλημάτων μετάθεσης, διάταξης χωρίς επανάληψη, διάταξης με επανάληψη και συνδυασμών.

Συνήθως, θέλουμε να διαλέξουμε  $k$  αντικείμενα από  $n$  τα οποία μπορεί να είναι διαφορετικά ή όχι, διατεταγμένα ή όχι.

Ο Παρακάτω πίνακας είναι η εποπτική παρουσίαση αυτών που αναφέραμε έως τώρα.



## Γενικές ασκήσεις

- α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να παρκάρουμε 2 αυτοκίνητα σε ένα μέρος 5 θέσεων;
- β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να παρκάρουμε 5 αυτοκίνητα σε ένα μέρος 5 θέσεων;
- γ) Με πόσους τρόπους μπορούμε να παρκάρουμε 5 αυτοκίνητα σε ένα μέρος 2 θέσεων;

2. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να ανεβούν 5 εργαζόμενοι πάνω σε ένα αυτοκίνητο για να πάνε στη δουλειά τους αν γνωρίζουμε ότι μόνο 3 από αυτούς γνωρίζουν να οδηγούν;
3. α) Πόσους τετραψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6;  
 β) Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;  
 γ) Πόσους εξαψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας καθένα από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 μόνο μία φορά;  
 ( Απάντηση: α) 1296 β) 360 γ) 720 )
4. Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ενός ψηφίου:  
 α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 3,4,6,8,9  
 β) Πόσοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι του 600;  
 γ) Πόσοι είναι πολλαπλάσια του 4;  
 ( Απάντηση: α) 60 β) 36 γ) 15 Παρατήρηση:

**Ένας ακέραιος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4, αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό πολλαπλάσιο του 4.**

5. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα , αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων.  
 ( Απάντηση: α)  $5^3 = 125$  β)  $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$  γ)  $5 \cdot 7 = 35$  )
6. α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 6 τόμους μιας εγκυκλοπαίδειας σε ένα ράφι βιβλιοθήκης;  
 β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στο ράφι τους 6 τόμους της προηγούμενης εγκυκλοπαίδειας, 4 τόμους μιας ιστορίας της τέχνης και 5 τόμους μιας λογοτεχνικής ανθολογίας, αν δεν μας ενδιαφέρει να μείνουν πλάι - πλάι τα βιβλία του ίδιου είδους και με πόσους, αν πρέπει κάθε σειρά να τοποθετηθεί ενιαία;  
 ( Απάντηση: α)  $6! = 720$  β)  $15!$  γ)  $6!4!5!3!$  )
7. Πόσες δυνατότητες επιλογής έχει ένας φοιτητής που πρέπει να απαντήσει στις 10 από τις 12 ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος:  
 α) Αν δεν υπάρχει περιορισμός.  
 β) Αν πρέπει οπωσδήποτε να απαντήσει στις 4 πρώτες ερωτήσεις.  
 γ) Αν πρέπει να απαντήσει σε 4 από τις 5 πρώτες ερωτήσεις και σε 6 από τις υπόλοιπες 6;  
 δ) Αν πρέπει να απαντήσει σε 5 τουλάχιστον ερωτήσεις από τις 6 πρώτες.  
 ( Υπόδειξη: Για να βρούμε το (δ) ερώτημα, βρίσκουμε τους τρόπους που απαντάει τις 5 από τις 6 και τους προσθέτουμε στους τρόπους που απαντάει τις 6 από τις 6.  
 ( Απάντηση: α)  $\binom{12}{10} = 66$  β)  $\binom{8}{6} = 28$  γ)  $\binom{5}{4}\binom{7}{6} = 35$  δ)  $36+15 = 51$  τρόποι )
8. Σε 8 διαφορετικές κάλπες τοποθετούμε 5 σφαιρίδια. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορεί να εκτελεσθεί η ενέργεια αυτή στις περιπτώσεις:

- α) Τα σφαιρίδια είναι διακεκριμένα και επιτρέπεται να εισαχθούν περισσότερα από ένα σφαιρίδια σε κάθε κάλη.   
 β) Τα σφαιρίδια είναι διακεκριμένα, αλλά σε κάθε κάλη επιτρέπεται να εισαχθεί το πολύ ένα σφαιρίδιο.   
 γ) Τα σφαιρίδια είναι όμοια, αλλά σε κάθε κάλη εισάγεται το πολύ ένα σφαιρίδιο.   
 ( Απάντηση: α)  $8^5$  β)  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$  γ) 56 τρόποι)
9. Υπάρχουν 42 τρόποι να καταλύσουν 5 επισκέπτες μιας πόλης στα ξενοδοχεία της πόλης χωρίς κανείς να συγκατοικεί με τον άλλο. Πόσα ξενοδοχεία διαθέτει η πόλη;   
 ( Απάντηση: 7 ξενοδοχεία )
10. Ένας σύλλογος αποτελείται από 7 άνδρες και 5 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορούν να εκλέξουν μεταξύ τους τετραμελή αντιπροσωπία   
 α) Χωρίς περιορισμούς.   
 β) Αν πρέπει να αποτελείται από ίσο αριθμό ανδρών και γυναικών.   
 ( Απάντηση: α)  $\binom{12}{4}$  τρόποι β)  $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2}$  τρόποι)
11. Το ίδιο πρόβλημα, αν η αντιπροσωπία αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και ταμία.   
 ( Απάντηση: α)  $\Delta_4^{12} = 11880$  τρόποι β)  $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$  τρόποι)
12. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα ράφι βιβλιοθήκης 5 λογοτεχνικά, 6 ιστορικά και 4 μαθηματικά βιβλία,   
 α) Αν δεν υπάρχει περιορισμός,   
 β) Αν πρέπει τα ομοειδή βιβλία να τοποθετηθούν πλάι - πλάι;   
 ( Απάντηση: α)  $15!$  τρόποι β)  $5!6!4!3!$  τρόποι)
13. Μοιράζονται τα 13 σπαθιά της τράπουλας στους 4 παίκτες έτσι, ώστε ο 1<sup>ος</sup> να πάρει 3, ο δεύτερος 5, ο τρίτος 2 και ο τέταρτος 3 σπαθιά. Πόσες διαφορετικές κατανομές έχουμε;   
 ( Απάντηση:  $\binom{13}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{2}$  τρόποι)
14. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 12 άτομα σε 3 τετράδες, τη μία πίσω από την άλλη;   
 ( Απάντηση:  $12!$  τρόποι)
15. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 12 ποδοσφαιριστές, τους 4 από τον ΠΑΟ, τους 4 από την ΑΕΚ και τους 4 από τον ΟΛΥΜΠΙΑΚΟ;   
 ( Απάντηση:  $\binom{12}{4} \binom{8}{4} \cdot 1 \cdot 3!$  τρόποι)

16. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΟΥΠΟΥΛΟ υπάρχουν;

$$( \text{Απάντηση: } \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \cdot 1 \text{ τρόποι} )$$

17. Με πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι 5 άτομα  
( Υπόδειξη: Θεωρήστε την θέση του ενός ατόμου σαν πρώτη, οπότε έχετε να τοποθετήσετε τα υπόλοιπα 4 )

$$( \text{Απάντηση: } 4! \text{ τρόποι} )$$

18. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν κυκλικά γύρω από μία φωτιά στην παραλία 5 αγόρια και 5 κορίτσια, ώστε κάθε κορίτσι να κάθεται ανάμεσα σε δύο αγόρια;

( Υπόδειξη: Τοποθετήστε πρώτα τα αγόρια όπως στην προηγούμενη άσκηση και κατόπιν τα κορίτσια στα κενά )

$$( \text{Απάντηση: } 4! \cdot 5! \text{ τρόποι} )$$

19. Πόσοι φυσικοί αριθμοί με όλα τα ψηφία τους διαφορετικά υπάρχουν μεταξύ του 1000 και 9999;

$$( \text{Απάντηση: } 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \text{ τρόποι} )$$

20. Πόσους τετραψήφιους αριθμούς, που είναι πολλαπλάσια του 5, μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, χωρίς να υπάρχουν ίσα ψηφία σε οποιουδήποτε από αυτούς τους αριθμούς.

( Υπόδειξη: είναι οι αριθμοί που λήγουν σε 0 και οι αριθμοί που λήγουν σε 5  
δηλ.  $5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$  )

$$( \text{Απάντηση: } 108 \text{ αριθμοί} )$$

21. Από μία τάξη με 15 αγόρια και 12 κορίτσια θα επιλεγεί μία επιτροπή 4 παιδιών.

α) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η επιτροπή;

β) Πόσες από τις επιτροπές αυτές θα περιλαμβάνουν ένα τουλάχιστον κορίτσι;

γ) Πόσες από τις επιτροπές αυτές θα περιλαμβάνουν ένα ακριβώς κορίτσι;

$$( \text{Απάντηση: } \alpha) \binom{27}{4} \quad \beta) \binom{27}{4} - \binom{15}{4} = 16185 \quad \gamma) \binom{15}{3} \binom{12}{1} )$$

22. Επτά ταξιδιώτες θα διανυκτερεύσουν στα επτά ξενοδοχεία μιάς πόλης. Με πόσους μπορεί να γίνει αυτό όταν:

α) Δεν πρέπει δύο οποιοιδήποτε από τους ταξιδιώτες να διανυκτερεύσουν στο ίδιο ξενοδοχείο.

β) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

$$( \text{Απάντηση: } \alpha) 7! = 5040 \text{ τρόποι} \quad \beta) 7^7 = 823543 \text{ τρόποι} )$$

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Γνωρίζουμε ότι:  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ . Αυτό σημαίνει, ότι, για να βρούμε την

πιθανότητα να συμβαίνει ένα ενδεχόμενο  $A$  θα πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων, όσο και το πλήθος των ευνοικών περιπτώσεων.

- Ο υπολογισμός του πλήθους των δυνατών περιπτώσεων είναι συνήθως απλό πρόβλημα συνδυαστικής αρκεί να ξεκαθαρίσουμε πόσα στοιχεία παίρνουμε και από ποιο σύνολο.
- Ο υπολογισμός του πλήθους των ευνοικών περιπτώσεων είναι πολλές φορές σύνθετο πρόβλημα.
- Πολλές φορές, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την  $P(A')$  και να βρούμε την  $P(A)$  από τη σχέση:  $P(A) = 1 - P(A')$ . Πρέπει όμως να προσέξουμε αν πραγματικά τα ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  είναι πραγματικά αντίθετα.
- Αν ένα ενδεχόμενο είναι ένωση ενδεχομένων, εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων.

### Ασκήσεις

1. Το ασανσέρ ενός πενταόροφου ξενοδοχείου ξεκινά από το ισόγειο με 5 άτομα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ : Τα 5 άτομα κατέβηκαν σε διαφορετικούς ορόφους.  
( Απάντηση:  $5!/5^5 = 0,0384$  )

2. Η ομάδα των ενόρκων σε ένα δικαστήριο αποτελείται από 8 ενόρκους που κληρώθηκαν από 40 άτομα. Να βρείτε την πιθανότητα ένα συγκεκριμένο άτομο από τα 40 να

εξελέγη ένορκος.

$$( \text{ Απάντηση: } P(A) = \frac{\binom{39}{7}}{\binom{40}{8}} = \frac{1}{5} )$$

3. Να βρείτε την πιθανότητα μεταξύ 5 φίλων δύο τουλάχιστον να έχουν το ίδιο ζώδιο.

$$( \text{ Απάντηση: } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{55}{144} = 0,68 )$$

4. Διαλέγουμε στην τύχη 3 μαθητές από μία παρέα 15 μαθητών από τους οποίους 5 μαθαίνουν κιθάρα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A$ : Κανένας μαθητής δεν μαθαίνει κιθάρα.

- B: Ένας και μόνο ένας μαθητής μαθαίνει κιθάρα.  
 Γ: Τουλάχιστον ένας μαθητής μαθαίνει κιθάρα.  
 ( Απάντηση:  $P(A) = 24/91$ ,  $P(B) = 0$ ,  $49$   $P(\Gamma) = 1 - P(A) = 67/91$  )
5. Ένα κουτί περιέχει 5 κόκκινες μπάλες, 3 γαλάζιες και 4 πράσινες. Παίρνουμε ταυτόχρονα 3 μπάλες. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:  
 A: Όλες οι μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα.  
 B: Υπάρχει τουλάχιστον μία πράσινη μπάλα.  
 Γ: Οι μπάλες είναι όλες του ίδιου χρώματος.  
 Δ: Υπάρχει μόνο μία κόκκινη μπάλα και μία άλλη είναι γαλάζια.  
 E: Υπάρχει τουλάχιστον μία πράσινη μπάλα ή όλες οι έχουν διαφορετικό χρώμα.  
 ( $P(A) = 3/11$ ,  $P(B) = 1 - P(B') = 41/55$   $P(\Gamma) = 3/44$   $P(\Delta) = 15/44$   $P(E) = 41/55$  )
6. Μία τάξη κέρδισε σε διαγωνισμό ένα ταξίδι για 4 άτομα. Τα 4 άτομα επιλέγονται ανάμεσα στους 32 μαθητές μιας τάξης με κλήρωση.  
 α) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:  
 A. Η Χριστίνα και ο Παναγιώτης επιλέγονται για το ταξίδι.  
 B. Η Χριστίνα και ο Παναγιώτης δεν επιλέγονται για το ταξίδι.  
 β) Γιατί το άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων A και B δεν είναι 1;  
 ( Απάντηση: α)  $P(A) = 3/248$ ,  $P(B) = 189/248$ , β) δεν είναι αντίθετα)
7. Στα ράφια μιας βιβλιοθήκης υπάρχουν 16 βιβλία, 5 του Γκαίτε, 7 του Ουγκώ και 4 της Σωτηρίου. Παίρνουμε στην τύχη 3 από αυτά. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:  
 A: Τα 3 βιβλία να είναι του ίδιου συγγραφέα.  
 B: Υπάρχει τουλάχιστον ένα βιβλίο του Γκαίτε.  
 Γ: Δύο από τα βιβλία έχουν γραφτεί από άνδρες.  
 Δ: Δεν υπάρχουν βιβλία που γράφτηκαν από την Σωτηρίου ή τα 3 βιβλία δεν είναι του ίδιου συγγραφέα.  
 ( Απάντηση: A)  $P(A) = 7/80$ ,  $P(B) = 79/112$ ,  $P(\Gamma) = 33/70$ ,  $P(\Delta) = 139/140$ )
8. Ο διευθυντής τσίρκου κράτησε 5 νούμερα για να συνθέσει το θέαμα του τσίρκου: Τα σοφά σκυλιά, αυτόν που έχει παραισθήσεις, τους κλόουν, τον μάγο και τους ακροβάτες.  
 α) Με πόσους τρόπους μπορεί ο διευθυντής να συνθέσει το πρόγραμμά του;  
 β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:  
 A: Το νούμερο 'κλόουν' είναι το τελευταίο του προγράμματος.  
 B: Με το νούμερο 'ακροβάτες' αρχίζει ή τελειώνει το πρόγραμμα.  
 Γ: Το νούμερο 'μάγος' ακολουθεί αμέσως μετά τους κλόουν.  
 Δ: Το νούμερο 'τα σοφά σκυλιά' βρίσκεται ανάμεσα στα νούμερα 'κλόουν' και 'μάγος'.  
 ( Απάντηση: A)  $P(A) = 1/5$ ,  $P(B) = 2/5$ ,  $P(\Gamma) = 1/5$ ,  $P(\Delta) = 1/10$ )





