

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα σχολείο στη Γ' Λυκείου φοιτούν 100 μαθητές. Στην τάξη αυτή δεν υπάρχουν αδέρφια, οπότε οι 100 μαθητές αντιστοιχούν σε 100 διαφορετικές οικογένειες.

Ρωτήσαμε τους 100 μαθητές το πλήθος των παιδιών της οικογένειάς τους. Από τις απαντήσεις τους προέκυψε ότι οι οικογένειες των μαθητών έχουν το πολύ τέσσερα παιδιά. Συγκεκριμένα, οι 56 οικογένειες έχουν δύο παιδιά, 20 οικογένειες έχουν τρία παιδιά, 8 οικογένειες έχουν τέσσερα παιδιά και οι υπόλοιπες έχουν ένα παιδί.

α) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια από τις παραπάνω οικογένειες των μαθητών, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου :

i. «Η οικογένεια του μαθητή έχει τέσσερα παιδιά». (Μονάδες 5)

ii. «Η οικογένεια του μαθητή έχει λιγότερα από τρία παιδιά». (Μονάδες 5)

β) Στην γιορτή αποφοίτησης συμμετείχαν όλοι οι μαθητές της Γ' Λυκείου με τις οικογένειές τους. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τα παρευρισκόμενα παιδιά, ποια είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τέσσερα παιδιά; (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα α)i. και β) και στην περίπτωση που είναι διαφορετικές να δικαιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Μεταξύ των 100 μαθητών της Γ' Λυκείου του σχολείου δεν υπάρχουν αδέρφια, άρα στις αντίστοιχες 100 οικογένειες των μαθητών αυτών οι $100 - (56 + 20 + 8) = 16$ οικογένειες έχουν ένα παιδί. Αφού επιλέγουμε στην τύχη μία από τις οικογένειες καθεμιά από αυτές έχει ίδια πιθανότητα να επιλεγεί οπότε :

- i. Η πιθανότητα του ενδεχομένου : «Η οικογένεια του μαθητή έχει τέσσερα παιδιά»,

$$\text{ισούται με } \frac{\text{πλήθος των οικογενειών με τέσσερα παιδιά}}{\text{πλήθος όλων των οικογενειών}} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

- ii. Η πιθανότητα του ενδεχομένου : «Η οικογένεια του μαθητή έχει λιγότερα από τρία

$$\text{παιδιά}», \text{ ισούται με } \frac{\text{πλήθος των οικογενειών με ένα ή δύο παιδιά}}{\text{πλήθος όλων των οικογενειών}} = \frac{16+56}{100} = 0,72.$$

β) Στη γιορτή για την αποφοίτηση συμμετείχαν όλα τα παιδιά των οικογενειών, οπότε το πλήθος των παιδιών στη γιορτή είναι $16 \cdot 1 + 56 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 220$ παιδιά. Από αυτά τα $8 \cdot 4 = 32$ είναι παιδιά που ανήκουν σε οικογένειες με τέσσερα παιδιά. Επειδή επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα παιδιά καθένα από αυτά έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Οπότε, η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τέσσερα παιδιά ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος των παιδιών που είναι μέλη οικογενειών με τέσσερα παιδιά}}{\text{πλήθος όλων των παιδιών}} = \frac{32}{220} = \frac{8}{55}.$$

γ) Στη γιορτή για την αποφοίτηση κάθε οικογένεια εκπροσωπείται στον δειγματικό χώρο με τόσα στοιχεία όσα είναι και τα παιδιά της. Αντίθετα, στην τυχαία επιλογή από τους μαθητές του σχολείου, κάθε οικογένεια, όσα παιδιά και αν έχει, εκπροσωπείται από ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου. Για αυτό και όταν επιλέγουμε ένα παιδί που συμμετέχει στη γιορτή αποφοίτησης είναι πιο πιθανό να επιλέξουμε παιδί από μια πολυμελή οικογένεια από όταν επιλέγουμε μαθητή του σχολείου.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις οικογένειες που είναι δυνατό να σχηματιστούν με τρία παιδιά. Εξετάζουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους. Για παράδειγμα η τριάδα (α,κ,α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι.

α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα :

A: «Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι κορίτσι».

B: «Και τα τρία παιδιά είναι ίδιου φύλου».

Γ: «Το φύλο του δεύτερου παιδιού είναι διαφορετικό από το φύλο του πρώτου και του τρίτου παιδιού».

(Μονάδες 9)

β) Αν μία οικογένεια αποκτήσει τρία παιδιά :

i. Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι;

(Μονάδες 5)

ii. Ποια είναι η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου;

(Μονάδες 5)

iii. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το ενδεχόμενο Γ έχει ίδια πιθανότητα να συμβεί με το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα. Συμφωνείτε με την άποψή του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αν συμβολίσουμε με «κ» το κορίτσι και με «α» το αγόρι τότε τα τρία παιδιά της οικογένειας με σειρά γέννησης παριστάνονται από τριάδες. Αν η τριάδα (α,κ,α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι, τότε, τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους είναι :

$$A = \{(κ,κ,κ), (κ,κ,α), (κ,α,κ), (κ,α,α)\}$$

$$B = \{(κ,κ,κ), (α,α,α)\}$$

$$\Gamma = \{(κ,α,κ), (α,κ,α)\}$$

β) Το πλήθος των οικογενειών που είναι δυνατόν να σχηματιστούν με τρία παιδιά, αν εξετάσουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους, είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Για το φύλο του 1^{ου} παιδιού έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα. Για καθένα από τα αποτελέσματα αυτά έχουμε επίσης 2 δυνατά αποτελέσματα για το φύλο του 2^{ου} παιδιού. Τέλος για καθένα από τα 4 αποτελέσματα που προέκυψαν από τις δύο πρώτες γεννήσεις έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα και για την 3η γέννηση. Θεωρούμε ότι όλες οι δυνατές τριάδες των παιδιών είναι εξίσου πιθανές, οπότε:

- i. Η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι, δηλαδή η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α, ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- ii. Η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου, δηλαδή η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β, ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Β}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- iii. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Γ ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Γ}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα έχει πιθανότητα να συμβεί ίση με $\frac{1}{4}$, αφού τα δυνατά αποτελέσματα δύο ρίψεων ενός αμερόληπτου κέρματος είναι τα :

$\{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma)\}$ και από αυτά το ευνοϊκό για το ενδεχόμενό μας είναι μόνο το (K,K) .

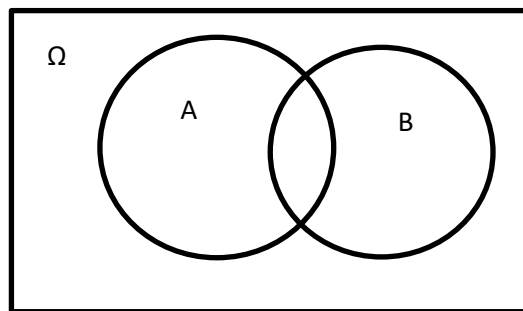
Οπότε πράγματι είναι σωστός ο ισχυρισμός του μαθητή. Τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, με πιθανότητα καθενός να πραγματοποιηθεί ίση με $\frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 2

Από τις 80 μαθήτριες, που είναι παρούσες σήμερα στο σχολείο, πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών έχουν 60. Από τις 60 μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών, οι 15 έχουν επιπλέον και πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών. Επιλέγουμε τυχαία μία μαθήτριά από τις 80.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μαθήτριά που επιλέξαμε να έχει πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών. (Μονάδες 8)

β) Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το Ω περιέχει τις 80 μαθήτριες, το A περιέχει τις μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών και το B περιέχει τις μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών.



i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το διάγραμμα Venn. Στη συνέχεια να χρωματίσετε με το στυλό σας το μέρος του διαγράμματος Venn που περιέχει τις μαθήτριες, οι οποίες έχουν και τα δύο πτυχία: καλής γνώσης αγγλικών και γαλλικών. (Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου “η μαθήτριά που επιλέξαμε έχει και τα δύο πτυχία: καλής γνώσης αγγλικών και γαλλικών”. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

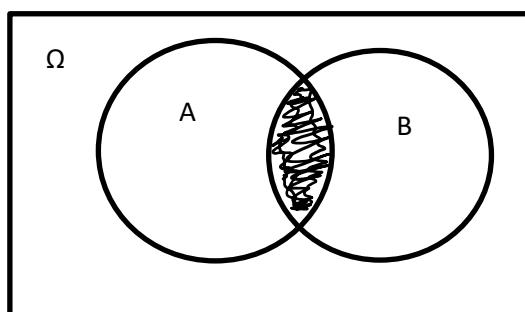
Επιλέγοντας τυχαία μία μαθήτρια από τις 80 έχουμε 80 ισοπίθανα αποτελέσματα.

Έστω τα ενδεχόμενα A : η μαθήτρια έχει πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών και B : η μαθήτρια έχει πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών.

α) Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για την πραγματοποίηση του A , δηλαδή η μαθήτρια που επιλέγουμε τυχαία να έχει πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών είναι 60. Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας $P(A) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$.

β)

i. Το μέρος του διαγράμματος Venn που περιέχει τις μαθήτριες, οι οποίες έχουν και τα δύο πτυχία είναι το «κοινό μέρος» των A και B στο διάγραμμα. Αυτό το μέρος φαίνεται σκιασμένο με στυλό στο παρακάτω σχήμα.



ii. Το ενδεχόμενο «η μαθήτρια που επιλέξαμε έχει και τα δύο πτυχία» αντιστοιχεί σε 15 ευνοϊκά αποτελέσματα, για την πραγματοποίησή του.

Επομένως, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είναι ίση με $\frac{15}{80} = \frac{3}{16}$.

ΘΕΜΑ 2

Από τους 100 μαθητές, που είναι παρόντες σήμερα στο σχολείο, μπλε στυλό έχουν 87. Από αυτούς, 17 μαθητές έχουν και μπλε και μαύρο στυλό.

Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από τους 100.

α) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε στυλό είναι ίση με 0,87. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε και μαύρο στυλό, είναι ίση με 0,17. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε και να μην έχει μαύρο στυλό. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

Επιλέγοντας τυχαία έναν μαθητή από τους 100 έχουμε 100 ισοπίθανα αποτελέσματα.

α) Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο «ο μαθητής που επιλέγουμε τυχαία να έχει μπλε στυλό» είναι 87. Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι $\frac{87}{100} = 0,87$.

β) Εφόσον οι μαθητές που έχουν μπλε και μαύρο στυλό είναι 17, ισάριθμα είναι και τα ευνοϊκά αποτελέσματα για να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο «ο μαθητής έχει μπλε και μαύρο στυλό». Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι $\frac{17}{100} = 0,17$.

γ) Βρίσκουμε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο «ο μαθητής έχει μπλε και δεν έχει μαύρο στυλό», αν από το πλήθος των μαθητών που έχουν μπλε στυλό αφαιρέσουμε το πλήθος των μαθητών που έχουν και μπλε και μαύρο στυλό, άρα είναι $87 - 17 = 70$. Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι $\frac{70}{100} = 0,7$.

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία έχει έναν προσωπικό κωδικό πρόσβασης για το ηλεκτρονικό της ταχυδρομείο, τον οποίο επέλεξε τυχαία. Ο κωδικός αποτελείται από τέσσερις μονοψήφιους αριθμούς (τέσσερα ψηφία), σε τέσσερις αντίστοιχες θέσεις όπως παρακάτω:

— — — —

Η Μαρία δε θυμάται το τελευταίο ψηφίο του προσωπικού κωδικού της.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, επιλέγοντας τυχαία το τελευταίο ψηφίο;

(Μονάδες 8)

β) Επειδή δεν πληκτρολόγησε σωστά τον κωδικό της, αποφάσισε να τον αλλάξει. Ο νέος κωδικός θα έχει επίσης τέσσερα ψηφία σε τέσσερις θέσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 10000 διαφορετικοί κωδικοί που μπορεί να δημιουργήσει η Μαρία.

(Μονάδες 10)

γ) Για να αλλάξει τον κωδικό της επέλεξε τυχαία τον αριθμό κάθε θέσης. Ποια είναι η πιθανότητα στον προσωπικό κωδικό της να μην επαναλαμβάνεται κάποιος από τους αριθμούς;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η Μαρία επέλεξε τυχαία τον προσωπικό της κωδικό. Άρα κάθε ένας από τους δυνατούς κωδικούς είχε την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με το τελευταίο του ψηφίο. Δεν υπάρχει κάποιο ψηφίο που να είναι πιθανότερο να έχει επιλέξει η Μαρία, ως τελευταίο.

Για να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, με δεδομένο ότι τα τρία πρώτα ψηφία τα θυμάται, χρειάζεται να επιλέξει τυχαία το τέταρτο.

Έστω ότι επιλέγει τυχαία το τέταρτο ψηφίο.

Όλες οι πιθανές εκβάσεις (δυνατές περιπτώσεις) είναι 10, δηλαδή θα επιλέξει ένα από τα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Από αυτές ευνοϊκή είναι μία, αυτή που αντιστοιχεί στο σωστό ψηφίο.

Επομένως η πιθανότητα να πετύχει τυχαία το σωστό τέταρτο ψηφίο, άρα και τον σωστό κωδικό είναι $\frac{1}{10}$.

β) Για κάθε θέση, η Μαρία έχει 10 επιλογές ψηφίου.

Επομένως, υπάρχουν $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ διαφορετικοί κωδικοί.

γ) Η Μαρία επιλέγει τυχαία έναν κωδικό, κάτι που αντιστοιχεί σε 10000 διαφορετικές επιλογές κωδικού, όπως είδαμε στο β) ερώτημα.

Αν θεωρήσουμε το ενδεχόμενο "στον κωδικό που επέλεξε η Μαρία κανένα ψηφίο δεν επαναλαμβάνεται", τότε για τα ευνοϊκά αποτελέσματα του ενδεχομένου έχουμε:

Υπάρχουν 10 επιλογές για το πρώτο ψηφίο, 9 επιλογές για το δεύτερο, 8 για το τρίτο και 7 για το τέταρτο. Άρα υπάρχουν $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ διαφορετικοί κωδικοί.

Επομένως η πιθανότητα του παραπάνω ενδεχομένου είναι $\frac{5040}{10000} = \frac{504}{1000} = 0,504$.

ΘΕΜΑ 2

Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο κέρμα τρεις φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα.

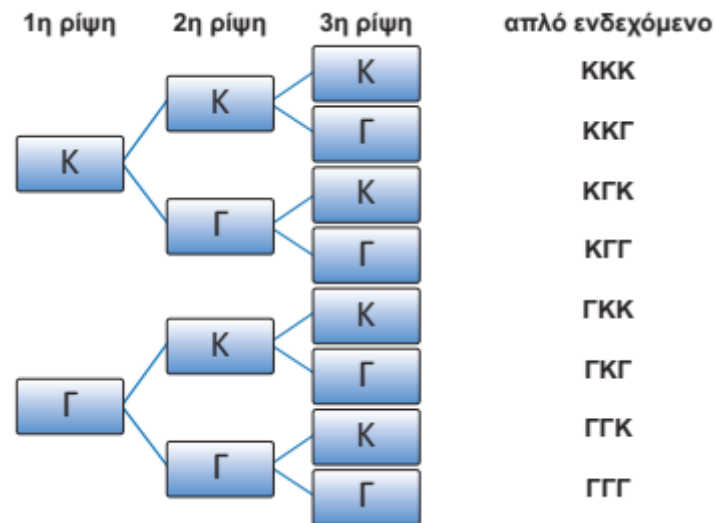
α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε έναν δειγματικό χώρο και το ενδεχόμενο

A : «Το αποτέλεσμα των τριών ρίψεων είναι τουλάχιστον δύο φορές κεφαλή». (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A' του A . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και A' . (Μονάδες 8)

α) Έστω Κ σημαίνει κεφαλή και Γ σημαίνει γράμματα. Για να βρούμε έναν δειγματικό χώρο κατασκευάζουμε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:


$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$
$$A = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}.$$
$$A' = \{\text{K}\Gamma\Gamma, \Gamma\text{K}\Gamma, \Gamma\Gamma\text{K}, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Επειδή έχουμε ένα συνηθισμένο κέρμα, θεωρούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά, οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

Ο Κώστας και ο Νίκος έχουν ο καθένας ένα συνηθισμένο ζάρι και παίζουν το εξής παιχνίδι: Ρίχνει ο καθένας το δικό του ζάρι και καταγράφουν το αποτέλεσμα. Αν και οι δύο αριθμοί που φέρνουν ο Κώστας και ο Νίκος, είναι μεγαλύτεροι από το 2, τότε κερδίζει ο Κώστας. Διαφορετικά κερδίζει ο Νίκος.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο, όπου για παράδειγμα, το αποτέλεσμα $(2, 5)$ να σημαίνει ότι ο Κώστας έφερε 2 και ο Νίκος 5. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες:

- i. να κερδίσει ο Κώστας, (Μονάδες 9)
- ii. να κερδίσει ο Νίκος. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Ο δειγματικός χώρος περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

β) i) Χρωματίζουμε τα κελιά στα οποία και οι δύο αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το 2:

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Το ενδεχόμενο

A: «και οι δύο αριθμοί που φέρνουν ο Κώστας και ο Νίκος, είναι μεγαλύτεροι από το 2», είναι

A =

{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 36 και των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A είναι 16.

Επειδή έχουμε συνηθισμένα ζάρια θεωρούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά. Επομένως από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε ότι η πιθανότητα να κερδίσει ο Κώστας είναι

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

ii) Το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Νίκος είναι το συμπληρωματικό του A. Επομένως η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

ΘΕΜΑ 2

Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από 13 φύλλα: τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, τις φιγούρες βαλέ (J), ντάμα (Q), ρήγα (K) και τον άσο (A). Η Άννα τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα. Έστω τα ενδεχόμενα

A: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός»

και M: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι».

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα $A \cap M$ και $A \cup M$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A , M και $A \cap M$, (Μονάδες 12)

ii. $A \cup M$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Δίνονται τα ενδεχόμενα A: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός» και

M: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι», οπότε έχουμε

$A \cap M$: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός και μπαστούνι».

$A \cup M$: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός ή μπαστούνι».

β) i) Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 52.

Κάθε φυλή έχει 9 αριθμούς: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Άρα το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A είναι $4 \cdot 9 = 36$, οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}.$$

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το M είναι 13, οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(M) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το $A \cap M$ είναι 9, οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A \cap M) = \frac{9}{52}.$$

ii) Από τον προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) = \frac{36}{52} + \frac{13}{52} - \frac{9}{52} = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη ενός μεροληπτικού ζαριού» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Δίνεται ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1» είναι $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ και ότι τα ενδεχόμενα $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ και $\{6\}$ είναι ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{10}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1 ή 5» (Μονάδες 6)

ii. B: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός». (Μονάδες 6)

γ) Έστω ένα δεύτερο πείραμα τύχης «ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού» με τον ίδιο δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Να βρείτε για το δεύτερο πείραμα τύχης τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B του ερωτήματος β) και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = p$, με $0 \leq p \leq 1$.

Από τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας προκύπτει ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων είναι ίσο με 1, άρα

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$\frac{1}{2} + 5p = 1$$

$$5p = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{10}$$

Επομένως

$$P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{10}.$$

β) i) Είναι $A = \{1, 5\}$ άρα

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

ii) Είναι $B = \{2, 4, 6\}$, άρα

$$P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

γ) Αφού όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, από τον κλασικό ορισμό πιθανότητας θα έχουμε

$$P'(\{1\}) = P'(\{2\}) = P'(\{3\}) = P'(\{4\}) = P'(\{5\}) = P'(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Είναι $A = \{1, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, άρα

$$P'(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ και } P'(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Όμως είναι $P(A) = \frac{3}{5}$ και $P(B) = \frac{3}{10}$, άρα

$$P'(A) < P(A) \text{ και } P'(B) > P(B).$$

ΘΕΜΑ 4

Για την εισαγωγή σε μία σχολή, μία γυναίκα ή ένας άνδρας είναι επιλέξιμοι αν το ύψος τους σε cm, είναι τουλάχιστον 170. Η κατανομή του ύψους των γυναικών είναι κανονική με μέση τιμή 163 και τυπική απόκλιση 7 και η κατανομή του ύψους των ανδρών είναι κανονική με μέση τιμή 170. Επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και έναν άνδρα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η πιθανότητα ώστε μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη, είναι 0,16, (Μονάδες 9)
- ii. η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος, είναι 0,5. (Μονάδες 9)

β) Αν για τους άνδρες παραμείνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους στο 170, πόσο θα πρέπει να γίνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους για τις γυναίκες, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα. (Μονάδες 7)

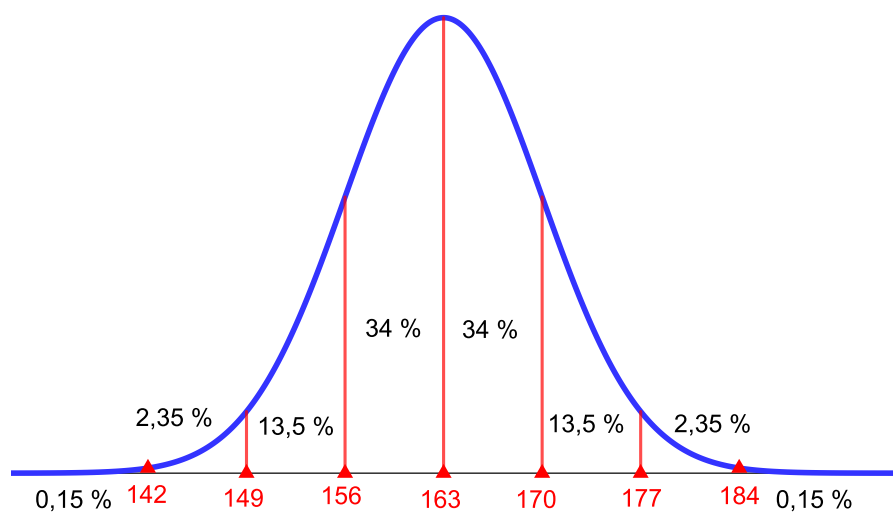
ΛΥΣΗ

α)

i. Τα ύψη των γυναικών είναι κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή $\mu = 163$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 7$. Επομένως το ποσοστό των γυναικών είναι:

- 68 % , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή $(156, 170)$
- 95% , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή $(149, 177)$
- 99,7% , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή $(142, 184)$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκαουσιανή καμπύλη) της κατανομής:



Άρα το ποσοστό των γυναικών με ύψος τουλάχιστον 170, είναι

$$\frac{1}{2} \cdot (100\% - 68\%) = \frac{1}{2} \cdot 32\% = 16\%.$$

Επομένως η πιθανότητα ώστε μια γυναίκα να είναι επιλέξιμη είναι $p_1 = 0,16$.

ii. Τα ύψη των ανδρών είναι κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή $\mu_\alpha = 170$, όσο είναι και η απαίτηση του ελάχιστου ύψους. Άρα το ποσοστό των ανδρών με ύψος τουλάχιστον 170, είναι 50%. Επομένως η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος είναι $p_2 = 0,5$.

β) Για τις γυναίκες το ελάχιστο ύψος, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα, είναι ίσο με τη μέση τιμή της κατανομής του ύψους των γυναικών, που είναι 163, αφού το ποσοστό των γυναικών με ύψος τουλάχιστον 163, είναι 50%. Τότε η πιθανότητα ώστε μια γυναίκα να είναι επιλέξιμη θα είναι $p_1 = 0,5$, ίση με την πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος που παραμένει $p_2 = 0,5$.

ΘΕΜΑ 4

Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή έχει 13 φύλλα με τις παρακάτω ενδείξεις:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, βαλές (J), ντάμα (Q), ρήγας (K) και άσος (A).

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι 270.725.

(Μονάδες 9)

β) Από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα επιλέγουμε τυχαία τέσσερα φύλλα. Να βρείτε τις πιθανότητες να πάρουμε:

i. τέσσερα 10 (δεκάρια), (Μονάδες 8)

ii. τέσσερα φύλλα με την ίδια ένδειξη. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{48! \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48!} = 49 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 13 = 270.725.$$

β) Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο που αποτελείται από όλες τις δυνατές τετράδες των 52 φύλλων, όπου η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία. Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι τότε το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4, που είναι 270.725.

i) Έστω το ενδεχόμενο A: «Τα τέσσερα φύλλα που επιλέγουμε είναι 10 (δεκάρια)».

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 1, η τετράδα των δεκαριών: 10 κούπα, 10 καρό, 10 μπαστούνι και 10 σπαθί.

Σε μια καλά ανακατεμένη τράπουλα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι τετράδες φύλλων είναι εξίσου πιθανές. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{1}{270.725}.$$

ii) Έστω το ενδεχόμενο B: «Τα τέσσερα φύλλα που επιλέγουμε έχουν την ίδια ένδειξη».

Υπάρχουν 13 τετράδες φύλλων με την ίδια ένδειξη. Για παράδειγμα, η τετράδα με ένδειξη 10: 10 κούπα, 10 καρό, 10 μπαστούνι και 10 σπαθί, επίσης η τετράδα με ένδειξη ντάμα (Q): ντάμα κούπα, ντάμα καρό, ντάμα μπαστούνι και ντάμα σπαθί κλπ..

Επομένως το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο B είναι 13.

Όπως προηγουμένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι τετράδες φύλλων είναι εξίσου πιθανές. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = \frac{13}{270.725} = \frac{1}{20.825}.$$

ΘΕΜΑ 4

Ένας δρομέας μεγάλων αποστάσεων, κατέγραψε τα χιλιόμετρα που έτρεξε σε καθεμία από τις 20 ημέρες προπόνησης ενός μήνα και σχημάτισε τον παρακάτω πίνακα:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	20
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

α) Να βρείτε:

- i. τη μέση τιμή, (Μονάδες 7)
- ii. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές. (Μονάδες 6)

γ) Ο δρομέας τον επόμενο μήνα διατήρησε το ίδιο πρόγραμμα προπόνησης, εκτός από την μέγιστη απόσταση την οποία αύξησε σε 28 χιλιόμετρα όπως φαίνεται παρακάτω:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	28
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

Ποια από τα μέτρα θέσης του α) ερωτήματος μεταβάλλονται και ποια όχι; Θα υπάρχουν τώρα ακραίες τιμές; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε

απόσταση σε χιλιόμετρα x_i	αριθμός ημερών v_i	$v_i x_i$
5	4	20
7	5	35
10	5	50
15	5	75
20	1	20
Αθροίσματα	20	200

Οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{200}{20} = 10 \text{ χιλιόμετρα.}$$

ii) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

5, 5, 5, 5, **7, 7, 7, 7, 7**, **10, 10**, 10, 10, 10, **15, 15**, 15, 15, 15, 20

Η διάμεσος δ είναι ο μέσος όρος της 10ης και 11ης παρατήρησης, άρα

$$\delta = \frac{10+10}{2} = 10 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, ενώ το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 είναι ο μέσος όρος της 15ης και 16ης παρατήρησης, άρα

$$Q_1 = \frac{7+7}{2} = 7 \text{ χιλιόμετρα και}$$

$$Q_3 = \frac{15+15}{2} = 15 \text{ χιλιόμετρα.}$$

β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 7 = 8$ χιλιόμετρα.

Το διάστημα $[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ είναι

$$[7 - 1,5 \cdot 8, 15 + 1,5 \cdot 8]$$

$$[7 - 12, 15 + 12]$$

$$[-5, 27]$$

στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι παρατηρήσεις, άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

γ) Η μέγιστη ημερήσια απόσταση από 20 χιλιόμετρα που ήταν, έγινε 28 χιλιόμετρα. Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι τώρα:

5, 5, 5, 5, **7, 7, 7, 7, 7**, **10, 10**, 10, 10, 10, **15, 15**, 15, 15, 15, 28

Επομένως η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο δεν μεταβάλλονται.

Η μέση τιμή αυξάνεται και γίνεται $\frac{200-20+28}{20} = \frac{208}{20} = 10,4$ χιλιόμετρα.

Επειδή το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο δεν μεταβάλλονται, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος παραμένει $Q = Q_3 - Q_1 = 8$ και το διάστημα $[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ παραμένει $[-5, 27]$. Το 28 όμως δεν ανήκει στο διάστημα $[-5, 27]$, άρα είναι ακραία τιμή.

ΘΕΜΑ 4

Σ' ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις α, β, γ και δ . Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ . Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- i. ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση, (Μονάδες 5)
- ii. ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση, (Μονάδες 5)
- iii. ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις, (Μονάδες 5)
- iv. ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Ένας δειγματικός χώρος περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα, όπου για παράδειγμα η επιλογή βγ (απλό ενδεχόμενο) σημαίνει ότι η απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η β και στη δεύτερη η γ.

αα	βα	γα	δα
αβ	ββ	γβ	δβ
αγ	βγ	γγ	δγ
αδ	βδ	γδ	δδ

β) Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση»,

B: «ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση»,

$A \cap B$: «ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις».

Επειδή η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ, θα έχουμε

$$A = \{ \alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta \}, B = \{ \alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta, \delta\delta \} \text{ και } A \cap B = \{ \alpha\delta \}.$$

Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 16. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για τα ενδεχόμενα A, B και $A \cap B$ είναι αντίστοιχα 4, 4 και 1.

Επομένως θα έχουμε

$$\text{i) } P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ii) } P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{iii) } P(A \cap B) = \frac{1}{16}.$$

iv)

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής απάντησε σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση» είναι το $A \cup B$.

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του $A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο

$(A \cup B)'$: «ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις»

Επομένως θα είναι

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}.$$

ΘΕΜΑ 2

Η Μαρία υιοθέτησε μία γατούλα που ερχόταν συνέχεια στην αυλή του σπιτιού της και την ονόμασε Μελιώ. Μετά από δύο εβδομάδες που την είχε στο σπίτι διαπίστωσε ότι η Μελιώ είναι έγκυος. Την πήγε στον κτηνίατρο μαζί με τη μητέρα της και ο κτηνίατρος τους είπε ότι η Μελιώ θα γεννήσει 4 γατάκια.

α) Να γράψετε χρησιμοποιώντας δενδροδιάγραμμα ένα δειγματικό χώρο για τις δυνατές περιπτώσεις του φύλου των τεσσάρων γατιών με τη σειρά γέννησής τους.

(Μονάδες 09)

β) Μία φίλη της Μαρίας υποσχέθηκε ότι αφού γεννηθούν και απογαλακτιστούν τα γατάκια από τη μαμά τους, θα υιοθετήσει τα τρία πρώτα γατάκια που θα γεννηθούν, αν είναι ίδιου φύλου. Ένας γείτονας της Μαρίας υποσχέθηκε να υιοθετήσει το 4^ο γατάκι αν είναι θηλυκό, γιατί έχει ήδη μία θηλυκή γατούλα στο σπίτι του.

i. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων του το ενδεχόμενο

A: «Τα τρία πρώτα γατάκια είναι ίδιου φύλου και το τέταρτο γατάκι είναι θηλυκό».

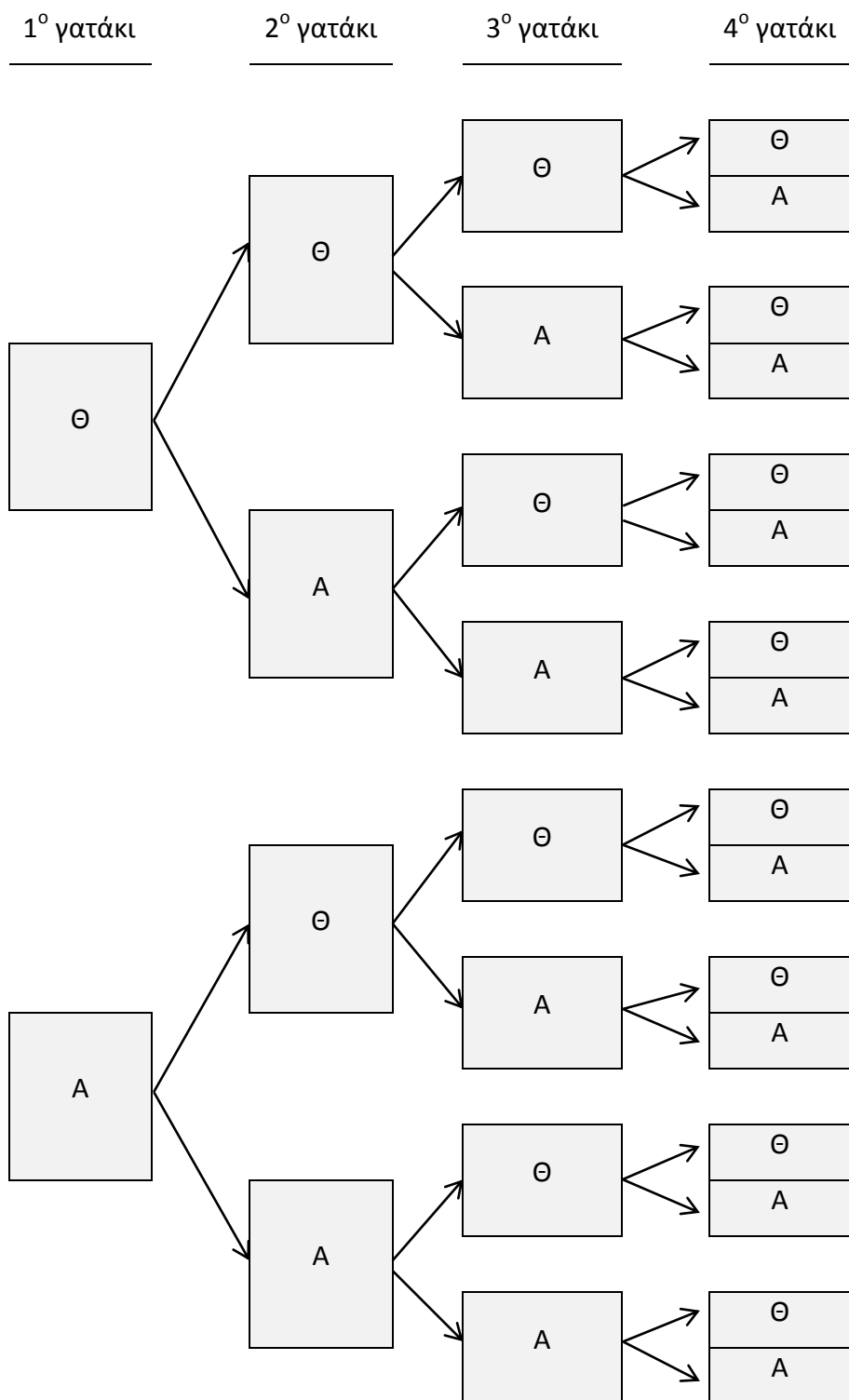
(Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «Υιοθετούνται και τα τέσσερα γατάκια».

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Σχηματίζουμε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:



Άρα ο δ.χ. είναι:

$\Omega = \{\Theta\Theta\Theta\Theta, \Theta\Theta\Theta A, \Theta\Theta A\Theta, \Theta\Theta A A, \Theta A\Theta\Theta, \Theta A\Theta A, \Theta A A\Theta, \Theta A A A, A\Theta\Theta\Theta, A\Theta\Theta A, A\Theta A\Theta, A\Theta A A, A A\Theta\Theta, A A\Theta A, A A A\Theta, A A A A\}$

β)

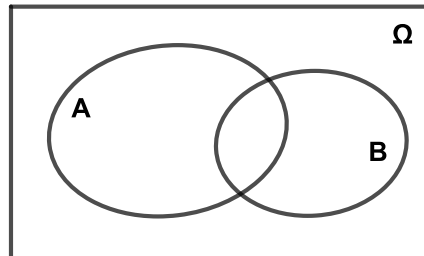
i. $A = \{\Theta\Theta\Theta\Theta, \text{ΑΑΑ}\Theta\}$

- ii. Το ενδεχόμενο «Υιοθετούνται και τα τέσσερα γατάκια» είναι το ενδεχόμενο A: «Τα τρία πρώτα γατάκια είναι ίδιου φύλου και το τέταρτο γατάκι είναι θηλυκό». Επειδή θεωρούμε εξίσου πιθανές τις 16 τετράδες του δειγματικού χώρου, από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

ΘΕΜΑ 2

Ρωτήθηκαν 100 άτομα για το μέσο ή τα μέσα μεταφοράς που χρησιμοποίησαν στις διακοπές τους το περσινό καλοκαίρι. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το A έχει ως στοιχεία τα άτομα που χρησιμοποίησαν πλοίο και το B εκείνους που χρησιμοποίησαν αεροπλάνο. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από τα παραπάνω.



α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα το άτομο που επιλέγουμε:

- i. Χρησιμοποίησε πλοίο και αεροπλάνο.
- ii. Χρησιμοποίησε μόνο αεροπλάνο.

(Μονάδες 08)

β) Από τα 100 άτομα που ρωτήθηκαν, 75 άτομα απάντησαν ότι ταξίδεψαν με πλοίο, 35 άτομα ότι ταξίδεψαν με αεροπλάνο και 20 άτομα ταξίδεψαν και με τα δύο μεταφορικά μέσα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

E_1 : «Το άτομο που επιλέγουμε χρησιμοποίησε ένα τουλάχιστον από τα δύο μέσα».

(Μονάδες 08)

E_2 : «Το άτομο που επιλέγουμε να έχει ταξιδέψει μόνο με αεροπλάνο».

(Μονάδες 09)

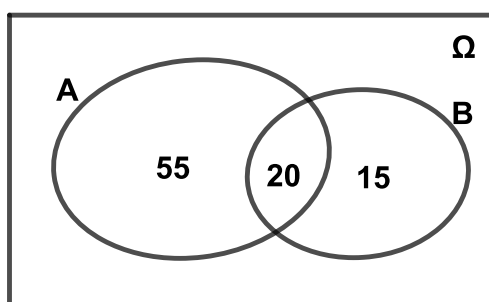
ΛΥΣΗ

α)

i. $A \cap B$

ii. $B - A$

β) Τα 20 άτομα που ταξίδεψαν και με τα δύο μεταφορικά είναι τα κοινά στοιχεία των A και B. Επομένως αν, από τα 75 άτομα που απάντησαν ότι ταξίδεψαν με πλοίο αφαιρέσουμε τα 20 άτομα, έχουμε 55 άτομα. Επιπλέον αν, από τα 35 άτομα που απάντησαν ότι ταξίδεψαν με αεροπλάνο αφαιρέσουμε τα 20 άτομα, έχουμε 15 άτομα. Τα παραπάνω φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα Venn.



Για τα ενδεχόμενα E_1 και E_2 έχουμε ότι: $E_1 = A \cup B$ και $E_2 = B - A$

$$\text{Άρα } P(E_1) = \frac{55+20+15}{100} = \frac{90}{100} \text{ και } P(E_2) = \frac{15}{100}.$$

Εναλλακτική λύση για το β) ερώτημα

Για τα ενδεχόμενα A και B που περιγράφονται στα δεδομένα ισχύει ότι:

$$P(A) = \frac{\text{σύνολο των ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{σύνολο των δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{75}{100} \text{ και}$$

$$P(B) = \frac{\text{σύνολο των ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{σύνολο των δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{35}{100}$$

Για τα ενδεχόμενα E_1 και E_2 έχουμε ότι: $E_1 = A \cup B$ και $E_2 = B - A$.

$$\text{Άρα } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ ή } P(A \cup B) = \frac{75}{100} + \frac{35}{100} - \frac{20}{100} = \frac{90}{100}$$

$$\text{και } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \text{ ή } P(B - A) = \frac{35}{100} - \frac{20}{100} = \frac{15}{100}$$

ΘΕΜΑ 4

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Για παράδειγμα, ένα αποτέλεσμα του παραπάνω πειράματος θα μπορούσε να είναι της μορφής 34, που σημαίνει ότι η ένδειξη της 1^η ρίψης είναι 3 και της 2^{ης} είναι 4.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το γινόμενο των 2 ενδείξεων να είναι 6»

B: «Η ένδειξη στη 2^η ρίψη είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη στην 1^η ρίψη»

Γ: «Το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι 5»

α)

- i. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για το παραπάνω πείραμα τύχης.

(Μονάδες 04)

- ii. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα A, B, Γ. (Μονάδες 06)

- iii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup \Gamma$ και $B - \Gamma$. (Μονάδες 06)

β) Μετά τη 2^η ρίψη, κάνουμε και 3^η ρίψη με το ίδιο ζάρι.

- i. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα στις 3 ρίψεις του ζαριού; (Μονάδες 04)

- ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, να έχουμε την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις. (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α)

- i. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης «Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης», περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

$1^n \backslash 2^n$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δ.χ. αποτελείται από τα παραπάνω 36 διατεταγμένα ζεύγη.

- ii. Ο αριθμός 6 γράφεται: $6 = 1 \cdot 6$ ή $6 = 2 \cdot 3$. Οπότε θα πρέπει να έχουμε στις 2 ρίψεις του ζαριού τις ενδείξεις (1,6) ή (6,1) και (2,3) ή (3,2). Δηλαδή:

$$A = \{ (1,6), (6,1), (2,3), (3,2) \}$$

Για το ενδεχόμενο B θα πρέπει το 2^ο στοιχείο κάθε ζεύγους να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο 1^ο στοιχείο, δηλαδή είναι τα σκιασμένα γκρι κελιά του παραπάνω πίνακα.

$$B = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6) \}$$

$$\Gamma = \{ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \}$$

- iii. $A \cup \Gamma = \{ (1,6), (6,1), (2,3), (3,2), (1,4), (4,1) \}$ και

$$B - \Gamma = \{ (1,2), (1,3), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6) \}.$$

Επειδή πρόκειται για ένα συνηθισμένο ζάρι, θεωρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι εξίσου πιθανά.

$$\text{Επομένως } P(A \cup \Gamma) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A \cup \Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B - \Gamma) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } B - \Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{13}{36}$$

β)

- i. Ο δ.χ. του προηγούμενου πειράματος έχει 36 στοιχεία, αφού στην 1^η ρίψη έχουμε 6 δυνατά αποτελέσματα και κάθε ένα από αυτά τα 6 αποτελέσματα υπάρχουν επίσης 6 δυνατά αποτελέσματα στην 2^η ρίψη.

Όταν ρίχνουμε και 3^η φορά το ζάρι, τα 36 δυνατά αποτελέσματα των 2 πρώτων ρίψεων έχουν, κάθε ένα από αυτά, 6 δυνατά αποτελέσματα για την ένδειξη του ζαριού της 3^{ης} ρίψης. Άρα σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε $36 \cdot 6 = 216$ συνολικά δυνατά αποτελέσματα.

- ii. Ένα αποτέλεσμα με την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις του ζαριού είναι για παράδειγμα το (4,4,4). Στον παραπάνω πίνακα, που αναφέρεται στις δύο πρώτες ρίψεις, έχουμε 6 αποτελέσματα με την ίδια ένδειξη στη 1^η και 2^η ρίψη, που είναι τα ζεύγη της διαγωνίου. Κάθε ζεύγος από αυτά θα φτιάχνει τριάδες με τον ίδιο αριθμό στην 3^η θέση και αυτό πραγματοποιείται για κάθε αριθμό από το 1 έως το 6 με έναν τρόπο. Άρα τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι $6 \cdot 1 = 6$, στο σύνολο των 216 δυνατών αποτελεσμάτων.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

ΘΕΜΑ 4

Ένα μη αμερόληπτο ζάρι με δειγματικό χώρο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ είναι φτιαγμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου $\{6\}$ να είναι ίση με $\frac{1}{3}$. Για τις άλλες 5 έδρες του ισχύουν τα εξής: Τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{1,3,5\}$ είναι ίση με $\frac{1}{6}$. Τα απλά ενδεχόμενα $\{2\}$ και $\{4\}$ είναι επίσης ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}$

ii. $P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$

(Μονάδες 10)

β) Σε μία τυχαία ρίψη του ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος»

ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 3 ή 4»

(Μονάδες 10)

γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο με δειγματικό χώρο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B του ερωτήματος β) ii. και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α)

- i. Έστω A το ενδεχόμενο «εμφανίζεται περιττή ένδειξη», δηλαδή $A=\{1,3,5\}$. Γνωρίζουμε ότι $P(A)=\frac{1}{6}$, με $P(A)=P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})$. Έστω $P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\})=P$.

$$\text{Άρα } \frac{1}{6} = 3P \text{ ή } P = \frac{1}{18}. \text{ Επομένως } P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\}) = \frac{1}{18}.$$

- ii. Ισχύει ότι $P(\{2\})=P(\{4\})=P'$. Τότε από τον Αξιωματικό ορισμό της Πιθανότητας έχουμε ότι $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=1$ ή

$$\frac{1}{18}+P'+\frac{1}{18}+P'+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}=1$$

$$\text{ή } \frac{3}{18} + \frac{1}{3} + 2P' = 1 \text{ ή } 2P' = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \text{ ή } 2P' = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } P' = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Άρα } P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

β)

- i. Για το ενδεχόμενο A έχουμε, $A=\{2,4,6\}$.

$$\text{Άρα } P(A)=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

- ii. Για το ενδεχόμενο B έχουμε, $P(B)=P(\{3\})+P(\{4\}) = \frac{1}{18} + \frac{1}{4} = \frac{11}{36}$

γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο, τότε ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα στοιχειώδη ισοπίθανα ενδεχόμενα $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ και ισχύει ότι:

$$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}.$$

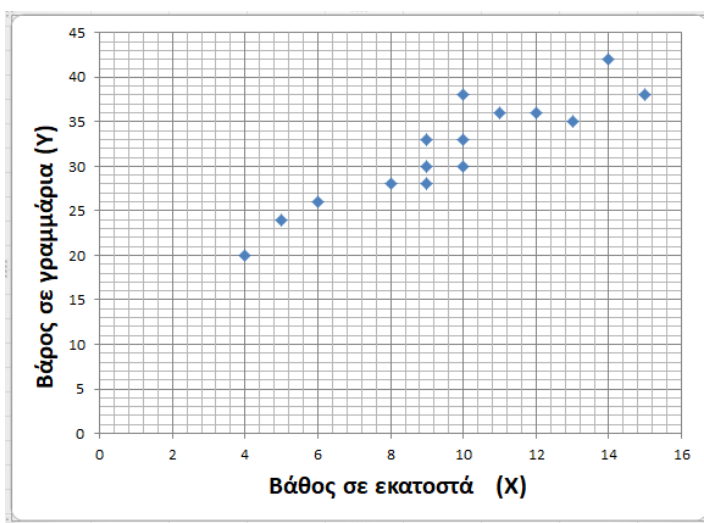
$$\text{Άρα } P(B) = P(\{3\})+P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ισχύει ότι: $\frac{1}{3} > \frac{11}{36}$ γιατί $\frac{12}{36} > \frac{11}{36}$, επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε 3 ή 4 είναι μεγαλύτερη με το αμερόληπτο ζάρι από ότι το μη αμερόληπτο ζάρι.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα διασποράς δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y .

Η μεταβλητή X παριστάνει το βάθος μέσα στην άμμο σε εκατοστά στο οποίο αλιεύθηκε ένα μύδι, και η μεταβλητή Y παριστάνει το βάρος σε γραμμάρια του μυδιού.



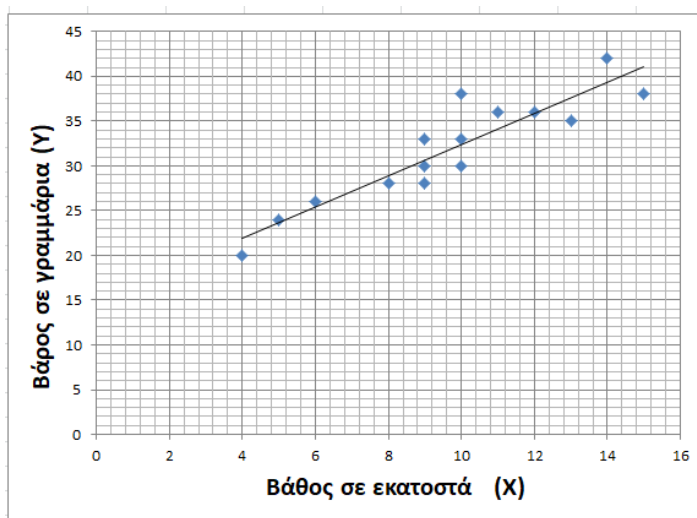
α) Με βάση το παραπάνω διάγραμμα να επιλέξετε ποιος μπορεί να είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y από αυτούς που δίνονται παρακάτω.

- i. $r_1 = -1$ ii. $r_2 = -0,7$ iii. $r_3 = 0,9$ iv. $r_4 = 1$.

Να δικαιολογήσετε λεκτικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Ένας μαθητής σχεδίασε την διπλανή ευθεία προσαρμοσμένη στα δεδομένα «με το μάτι». Με βάση αυτή την ευθεία να εκτιμήσετε:



- i. Ποιο είναι το αναμενόμενο βάρος του μυδιού σε βάθος 6 εκατοστά; (Μονάδες 7)

- ii. Σε τι βάθος προσδοκούμε να βρούμε ένα μύδι με αναμενόμενο βάρος 36 γραμμάρια;

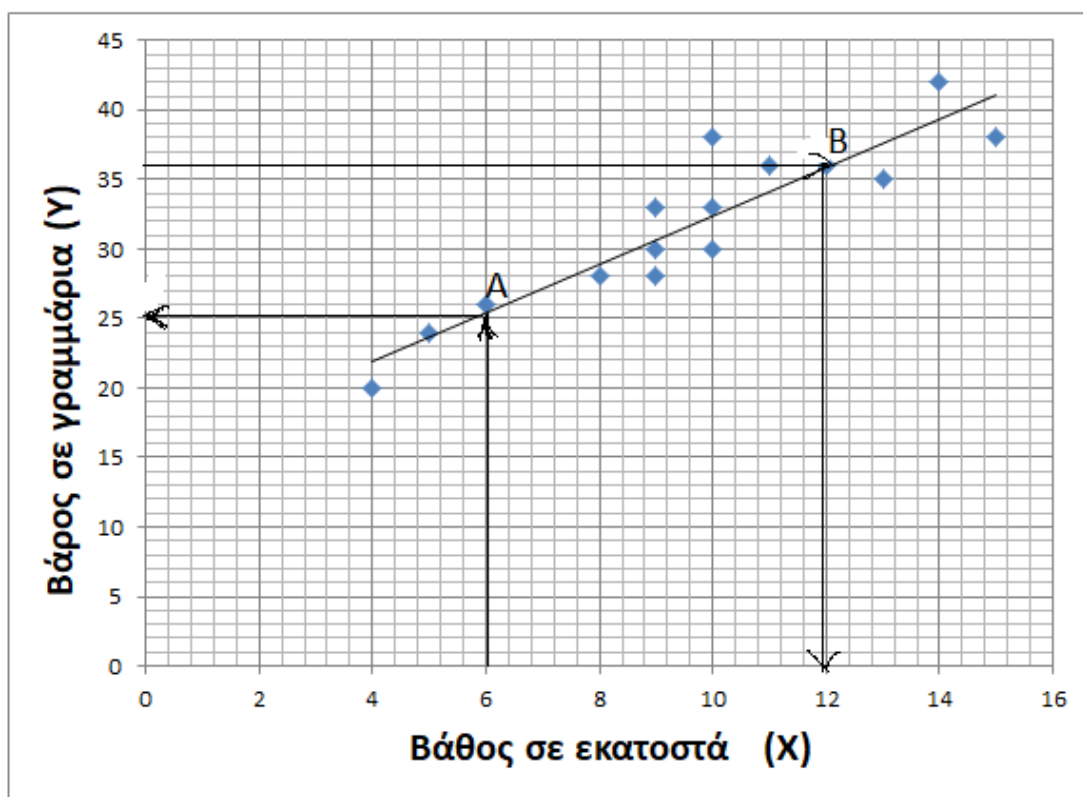
(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι μεταβλητές X και Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες, γιατί όσο οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της μεταβλητής Y αυξάνονται και αυτές, οπότε σωστή απάντηση είναι μια από τις $r_3 = 0,9$ ή $r_4 = 1$. Οι παρατηρήσεις είναι αρκετά συγκεντρωμένες γύρω από την νοητή ευθεία, αλλά όχι πάνω σε αυτήν με συνέπεια σωστή απάντηση να είναι η $r_3 = 0,9$.

β)

- i. Από την τιμή 6 του άξονα βάθους X φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα X που τέμνει την ευθεία του μαθητή στο σημείο A . Από το A φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα Y , που τον τέμνει σε σημείο με τιμή βάρους 25. Έτσι το αναμενόμενο βάρος του μυδιού είναι 25 γραμμάρια.
- ii. Από την τιμή 36 του άξονα βάρους Y φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα Y που τέμνει την ευθεία του μαθητή στο σημείο B . Από το B φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα X , που τον τέμνει σε σημείο με τιμή βάθους 12. Έτσι το αναμενόμενο βάθος θέσης του μυδιού είναι 12 εκατοστά.



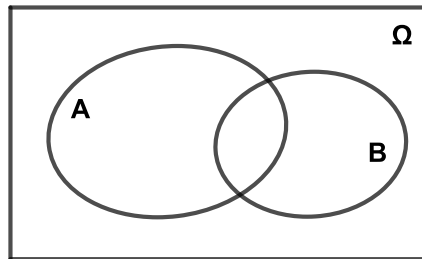
ΘΕΜΑ 2

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B δύο ενδεχόμενά του.

α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.), να εκφράσετε τα ενδεχόμενα:

- i. Πραγματοποιείται το A και το B .
- ii. Πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A .

Μπορείτε αν θέλετε να απαντήσετε χρησιμοποιώντας το παρακάτω διάγραμμα Venn, σκιάζοντας κάθε φορά το μέρος εκείνο που αναφέρεται στο ζητούμενο ενδεχόμενο.



(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$ και τα ενδεχόμενα A και B που ορίζονται ως εξής:

A : «Στη 1^η ρίψη φέρουμε κεφαλή (K)»,

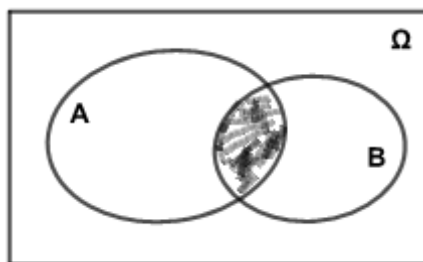
B : «Φέρουμε διαφορετική ένδειξη και στις 2 ρίψεις».

- i. Να γράψετε τα στοιχεία των ενδεχομένων A και B . (Μονάδες 05)
- ii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

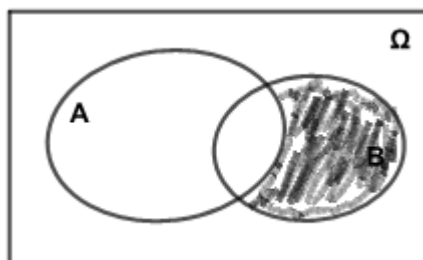
ΛΥΣΗ

α)

i. $A \cap B$ ή



ii. $B - A$ ή



β) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι ο $\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$.

i. Για τα ενδεχόμενα A και B έχουμε: $A = \{KK, ΚΓ\}, B = \{ΚΓ, ΓΚ\}$.

ii. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δ.χ. Ω είναι ισοπίθα. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A και B είναι αντίστοιχα:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \text{ αφού } A \cap B = \{ΚΓ\}$$

$$P(B - A) = \frac{1}{4}, \text{ αφού } B - A = \{ΓΚ\}$$

ΘΕΜΑ 4

Σ' ένα εκπαιδευτικό κατάστημα, ένας πελάτης θέλει να αγοράσει ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν. Τα διαθέσιμα μεγέθη και για τα δύο είδη είναι μικρό (s), μεσαίο (m), και μεγάλο (L). Τα σωστά μεγέθη που φοράει ο πελάτης, για το πουκάμισο είναι μεσαίο (m), ενώ για το μπουφάν, είναι μεγάλο (L). Ο πελάτης επιλέγει τυχαία ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν χωρίς να κοιτάζει τα μεγέθη τους.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές επιλογές για το μέγεθος των δύο ειδών (πουκάμισο και μπουφάν) που επιλέγει ο πελάτης. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- i. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο. (Μονάδες 05)
- ii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν. (Μονάδες 05)
- iii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη. (Μονάδες 05)
- iv. Ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη. (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για το πείραμα τύχης «Επιλογή πουκαμίσου και μπουφάν» περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα. Η επιλογή sm σημαίνει ότι επιλέγει μέγεθος μικρό (s) για το πουκάμισο και μεσαίο (m) για το μπουφάν.

ss	sm	sL
ms	mm	mL
Ls	Lm	LL

β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο, δηλαδή (m)»

B: «ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν, δηλαδή (L)»

Τότε $A = \{ms, mm, mL\}$ και $B = \{sL, mL, LL\}$

Θεωρούμε ότι οι 9 επιλογές που περιγράφονται στον παραπάνω πίνακα είναι εξίσου πιθανές, οπότε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, έχουμε:

$$\text{i. } P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ii. } P(B) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

iii. Το ενδεχόμενο, «ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη» είναι το $A \cup B$, με

$$A \cup B = \{ms, mm, mL, sL, LL\},$$

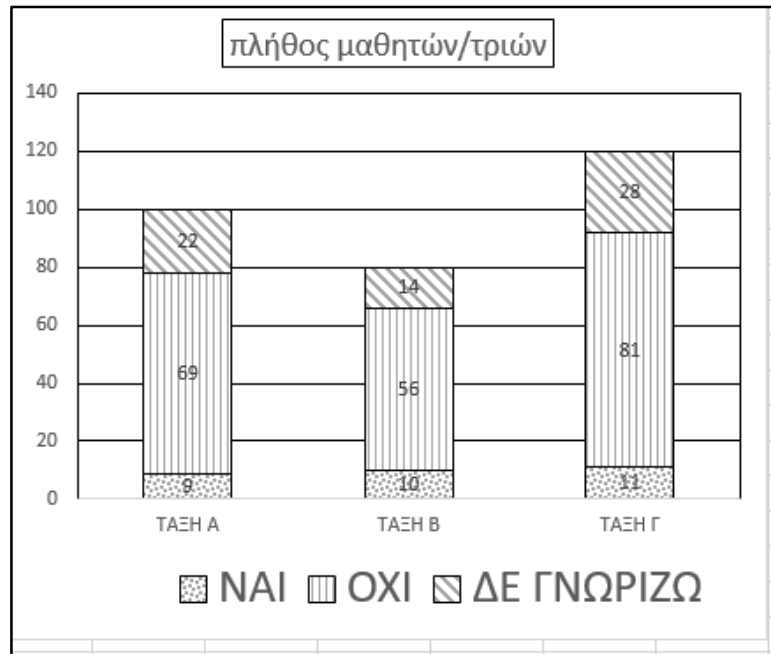
$$\text{οπότε } P(A \cup B) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{5}{9}$$

iv. Το ενδεχόμενο «ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη» είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο $(A \cup B)'$, του $A \cup B$.

$$\text{Επομένως } P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

ΘΕΜΑ 2

Στα πλαίσια μιας έρευνας που διενεργήθηκε σε 300 μαθητές/μαθήτριες ενός Λυκείου σχετικά με την Κλιματική Αλλαγή τέθηκε η ερώτηση : «Πιστεύετε ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν;» Οι απαντήσεις των μαθητών/τριών του σχολείου αναπαριστώνται στο επόμενο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:



α) Ποιο ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ΝΑΙ πηγαίνει στην Α' Λυκείου;

(Μονάδες 8)

β)

- i. Πόσοι μαθητές του Λυκείου απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν; Τι ποσοστό του συνόλου των μαθητών είναι;

(Μονάδες 8)

- ii. Τι ποσοστό από κάθε τάξη απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν;

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το ραβδόγραμμα οι μαθητές/μαθήτριες του Λυκείου που απάντησαν ΝΑΙ είναι $9+10+11=30$ (9 από την Α', 10 από τη Β' και 11 από τη Γ'). Από αυτούς οι 9 είναι μαθητές της Α' τάξης. Έτσι το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ΝΑΙ και πηγαίνει στην Α' Λυκείου είναι $\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$.

β)

i. Αθροίζοντας τις τιμές των ράβδων με την απάντηση «ναι» έχουμε 30 μαθητές/μαθήτριες (9 από την Α', 10 από τη Β' και 11 από τη Γ') που απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν. Το ποσοστό είναι $\frac{30}{300} = \frac{10}{100} = 10\%$ των μαθητών/τριών του Λυκείου.

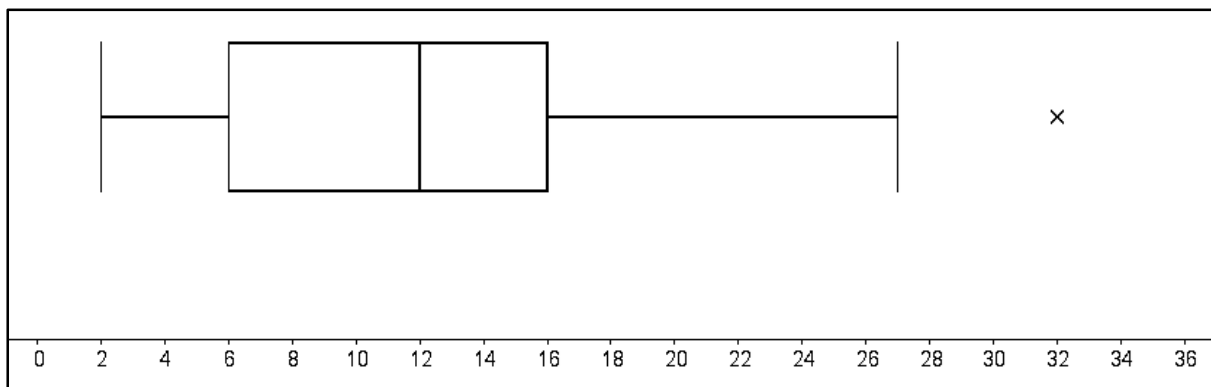
ii. Από τους 100 μαθητές/μαθήτριες της Α' τάξης οι 69 απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν. Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{69}{100} = 69\%$.

Από τους 80 μαθητές/μαθήτριες της Β' τάξης οι 56 απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν. Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{56}{80} = \frac{14}{20} = \frac{70}{100} = 70\%$.

Από τους 120 μαθητές/μαθήτριες της Γ' τάξης οι 81 απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν. Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{81}{120} = \frac{27}{40} = \frac{67,5}{100} = 67,5\%$.

ΘΕΜΑ 2

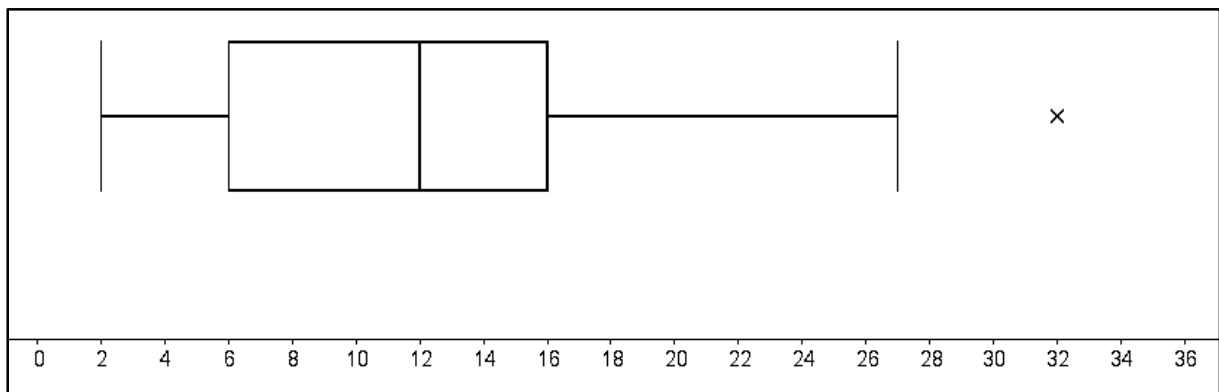
Το παρακάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τους πόντους ενός παίκτη μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης στα 15 τελευταία παιχνίδια της ομάδας του.



Με τη βοήθεια του θηκογράμματος να βρείτε:

- α) Το εύρος R των πόντων του παίκτη. (Μονάδες 6)
- β) Τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 . (Μονάδες 9)
- γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q. (Μονάδες 5)
- δ) Τις ακραίες τιμές. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ



α) Το εύρος R ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση. Στην περίπτωσή μας είναι $R = 32 - 2 = 30$.

β) Από το θηκόγραμμα έχουμε ότι $Q_1=6$, $Q_2=12$ και $Q_3=16$.

γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 , δηλαδή $Q=Q_3-Q_1=16-6=10$.

δ) Οι παρατηρήσεις που βρίσκονται έξω από το διάστημα $[Q_1-1,5Q, Q_3+1,5Q] = [-9, 31]$ ονομάζονται ακραίες τιμές. Στην περίπτωσή μας ακραία τιμή είναι η τιμή 32.

ΘΕΜΑ 2

Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 6 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη στις οποίες θα καθίσουν οι 5 μαθητές του συμβουλίου.

α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή; (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την πιθανότητα στη συνάντηση του 5-μελούς με το διευθυντή ο πρόεδρος και ο γραμματέας να καθίσουν στις δύο ακραίες καρέκλες. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Στη συνάντηση με το διευθυντή οι 5 μαθητές του μαθητικού συμβουλίου θα καθίσουν στις 6 διαθέσιμες καρέκλες. Ο πρώτος από αυτούς μπορεί να επιλέξει να καθίσει σε οποιαδήποτε από τις 6 διαθέσιμες καρέκλες. Ο επόμενος μαθητής μπορεί να καθίσει σε μία από τις υπόλοιπες 5 κενές καρέκλες, κ.ο.κ. Οπότε ο πέμπτος μαθητής μπορεί να καθίσει σε μία από τις 2 τελευταίες διαθέσιμες κενές καρέκλες. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης οι 5 μαθητές του μαθητικού συμβουλίου μπορούν να καθίσουν στις 6 διαθέσιμες καρέκλες με $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ διαφορετικούς τρόπους.

β) Οι δύο μαθητές πρόεδρος και γραμματέας μπορούν να καθίσουν με δύο τρόπους στις δύο ακραίες θέσεις.

1η καρέκλα	2η καρέκλα	3η καρέκλα	4η καρέκλα	5η καρέκλα	6η καρέκλα
πρόεδρος	;	;	;	;	γραμματέας

ή

1η καρέκλα	2η καρέκλα	3η καρέκλα	4η καρέκλα	5η καρέκλα	6η καρέκλα
γραμματέας	;	;	;	;	πρόεδρος

Σε καθεμία από αυτές τις τοποθετήσεις, τα τρία άλλα μέλη του μαθητικού συμβουλίου μπορούν να καθίσουν στις τέσσερις άλλες κενές καρέκλες. Το πρώτο μέλος μπορεί να επιλέξει μια καρέκλα με 4 τρόπους, το δεύτερο μέλος με 3 τρόπους και το τρίτο με 2 τρόπους. Άρα υπάρχουν $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν τα τρία άλλα μέλη σε καθεμία από τις αρχικές τοποθετήσεις του προέδρου και του γραμματέα. Οπότε, συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 24 = 48$ τρόποι για να καθίσουν οι μαθητές στη συνάντηση με το διευθυντή, με τον πρόεδρο και τον γραμματέα στις δύο ακραίες καρέκλες.

Οι ευνοϊκές εκβάσεις, για την τοποθέτηση που περιγράφεται, είναι 48. Οι δυνατές τοποθετήσεις των μαθητών του μαθητικού συμβουλίου είναι όσες μετρήθηκαν στο ερώτημα α), δηλαδή 720. Επειδή οι μαθητές κάθονται τυχαία, θεωρούμε ότι όλοι οι δυνατοί τρόποι να καθίσουν οι 5 μαθητές στις 6 καρέκλες είναι εξίσου πιθανοί.

Οπότε, από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα ο πρόεδρος και ο γραμματέας να καθίσουν στις δύο ακραίες καρέκλες ισούται με :

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών τοποθετήσεων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών τοποθετήσεων}} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}.$$

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα σχολείο φοιτούν 120 μαθητές στη Γ Λυκείου και όλοι προετοιμάζονται να διαγωνιστούν στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Κάποιοι από τους μαθητές αυτούς, επιλέγουν να διαγωνιστούν και σε αθλήματα ή Αγγλικά. Συγκεκριμένα, 40 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα, 15 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και στα Αγγλικά, ενώ 10 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα και στα Αγγλικά.

Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 120 μαθητές και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

A : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα αθλήματα» και

Γ : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα Αγγλικά»

α) Να πείτε πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A∪Γ και να βρείτε την πιθανότητα

του. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα

τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού». (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

A : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα αθλήματα» και

Γ : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα Αγγλικά»,

Οι μαθητές επιλέγονται τυχαία, οπότε καθένας από αυτούς έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και Γ έχουμε :

Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος μαθητών που διαγωνίζονται στα αθλήματα}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ είναι

$$P(\Gamma) = \frac{\text{πλήθος μαθητών που διαγωνίζονται στα Αγγλικά}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών}} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}.$$

α) Το ενδεχόμενο A∪Γ είναι : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί στα αθλήματα ή στα Αγγλικά».

Η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων A και Γ είναι :

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \quad (1)$$

Η πιθανότητα της τομής των ενδεχομένων A και Γ είναι

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{\text{πλήθος μαθητών που διαγωνίζονται και στα αθλήματα και στα Αγγλικά}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

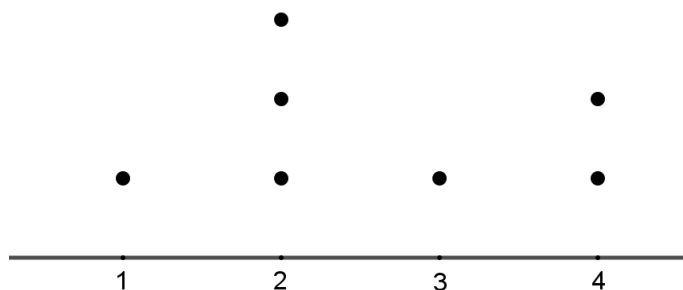
$$\text{Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε } P(A \cup \Gamma) = \frac{40}{120} + \frac{15}{120} - \frac{10}{120} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

β) Το ενδεχόμενο «ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού» είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί στα αθλήματα ή στα Αγγλικά», δηλαδή το (A∪Γ)'. Οπότε,

$$P((A \cup \Gamma)') = 1 - P(A \cup \Gamma) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο επόμενο σημειόγραμμα φαίνονται τα γκολ που σημείωσε η εθνική ομάδα της Αργεντινής στο Μουντιάλ του Κατάρ το 2022 στα επτά συνολικά παιχνίδια που χρειάστηκε να αγωνισθεί μέχρι να κατακτήσει το παγκόσμιο κύπελλο.

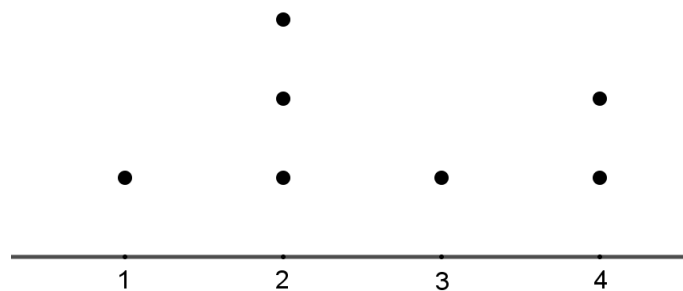


α) Με βάση το σημειόγραμμα να καταγράψετε τον αριθμό των γκολ σε κάθε αγώνα.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε για τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στα 7 αυτά παιχνίδια:

- i. Τη μέση τιμή. (Μονάδες 5)
- ii. Το εύρος. (Μονάδες 5)
- iii. Την επικρατούσα τιμή. (Μονάδες 5)
- iv. Την διάμεσο. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στους επτά αγώνες, σύμφωνα με το σημειόγραμμα, σε αύξουσα διάταξη, είναι:

1,2,2,2,3,4,4

β)

i. Η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+2+3+4+4}{7} = \frac{18}{7}, \text{ δηλαδή περίπου ίση με } 2,57$$

ii. Το εύρος R είναι η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή $R=4-1=3$.

iii. Η επικρατούσα τιμή M_o είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Στην περίπτωσή μας είναι $M_o=2$.

iv. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι επτά (περιττό) και οι τιμές είναι σε αύξουσα διάταξη. Η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή, δηλαδή $\delta=2$.

ΘΕΜΑ 2

Από σχετική μελέτη γνωρίζουμε ότι το 50% των εργαζομένων μιας πόλης για την μετάβασή τους στην εργασία τους χρησιμοποιούν κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς, το 40% χρησιμοποιούν κάποιο ιδιωτικό μέσο μεταφοράς και 15% χρησιμοποιούν και κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς και ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.

Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο αυτής της πόλης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μεταβαίνει στην εργασία του :

α) Με κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς ή με ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.

(Μονάδες 13)

β) Να μην χρησιμοποιεί μέσο μαζικής ούτε ιδιωτικό μέσο μεταφοράς .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Έστω το ενδεχόμενο A: «ο εργαζόμενος που επιλέγουμε χρησιμοποιεί μέσο μαζικής μεταφοράς για να μεταβεί στην εργασία του» και το ενδεχόμενο B: «ο εργαζόμενος που επιλέγουμε χρησιμοποιεί ιδιωτικό μέσο μεταφοράς για να μεταβεί στην εργασία του».

Τότε το ενδεχόμενο «ο εργαζόμενος που επιλέγουμε μεταβαίνει στην εργασία του χρησιμοποιώντας κάποιο μέσο μεταφοράς και ιδιωτικό μέσο μεταφοράς» είναι το $A \cup B$. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ και

$$P(A \cap B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}.$$

α) Το ενδεχόμενο: «ο εργαζόμενος της πόλης που για να μεταβεί στην εργασία του χρησιμοποιεί κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς ή κάποιο ιδιωτικό μέσο μεταφοράς» είναι το $A \cup B$. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

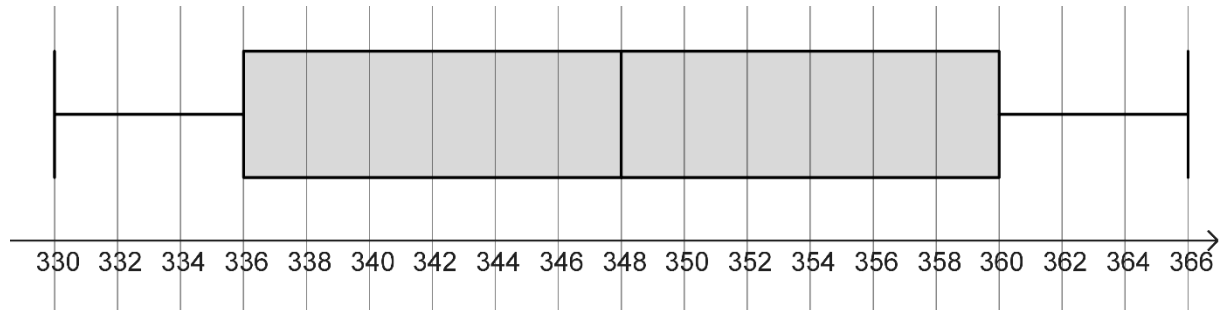
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

β) Το ενδεχόμενο: «ο εργαζόμενος που επιλέγουμε μεταβαίνει στην εργασία του χωρίς να χρησιμοποιεί κάποιο μέσο μαζικής ή ιδιωτικό μέσο μεταφοράς» είναι το συμπληρωματικό του $A \cup B$. Είναι:

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 2

Η Χριστίνα πηγαίνει για τρέξιμο τουλάχιστον 5 φορές την εβδομάδα. Τις τελευταίες τέσσερις εβδομάδες μετρούσε κάθε φορά σε πόσα δευτερόλεπτα έτρεχε 1 χιλιόμετρο. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στις μετρήσεις της Χριστίνας.



α) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε:

- το εύρος R των μετρήσεων,
- τη διάμεσο δ των μετρήσεων,
- το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο των μετρήσεων, Q_1 και Q_3 αντίστοιχα,
- το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q των μετρήσεων.

(Μονάδες 20)

β) Ποιος είναι ο καλύτερος (μικρότερος) χρόνος που έκανε η Χριστίνα;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από τα στοιχεία το θηκογράμματος καταλαβαίνουμε ότι:

i. Η μέγιστη μέτρηση είναι 366 δευτερόλεπτα και η ελάχιστη 330 δευτερόλεπτα, άρα το εύρος είναι $R = 366 - 330 = 36$ δευτερόλεπτα.

ii. Η διάμεσος είναι $\delta = 348$ δευτερόλεπτα.

iii. Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 336$ και $Q_3 = 360$ δευτερόλεπτα.

iv. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 360 - 336 = 24$ δευτερόλεπτα.

β) Σύμφωνα με το θηκόγραμμα είναι 330 δευτερόλεπτα.

ΘΕΜΑ 4

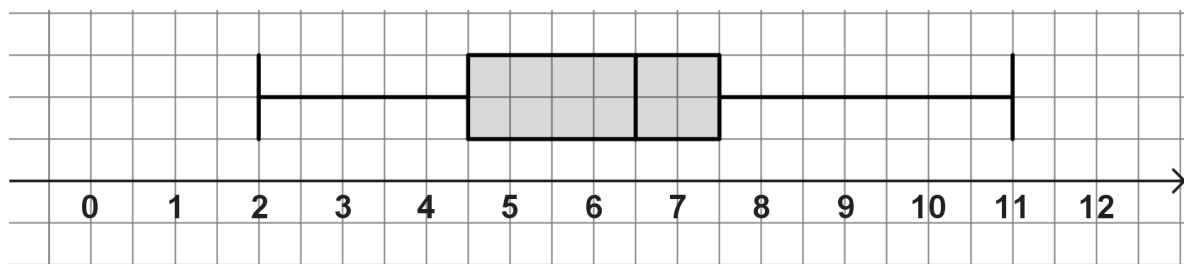
Δίνονται οι παρακάτω είκοσι παρατηρήσεις:

4, 5, 6, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 11, 6, 7, 7, 4, 5, 7, 6, 10, 9, 9

α) Να υπολογίσετε:

- i. την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή, (Μονάδες 4)
- ii. τη διάμεσο δ , (Μονάδες 4)
- iii. τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 . (Μονάδες 4)

β) Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στα παραπάνω δεδομένα. Ωστόσο έχει ένα λάθος. Μπορείτε να το εντοπίσετε;



(Μονάδες 8)

γ) Να κάνετε αλλαγή σε μία μόνο από τις παραπάνω παρατηρήσεις, έτσι ώστε στο νέο σύνολο είκοσι παρατηρήσεων που θα προκύψει, να αντιστοιχεί το θηκόγραμμα του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i. Η ελάχιστη τιμή είναι $x_{\min} = 2$ και η μέγιστη $x_{\max} = 11$.

ii. Γράφουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11

Εφόσον το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο και μάλιστα 20, η διάμεσος δ είναι ίση με τον μέσο όρο 10^{ης} και 11^{ης} παρατήρησης.

Η 10^η και η 11^η παρατήρηση είναι ίσες με 6 η καθεμία. Άρα $\delta = \frac{6+6}{2} = 6$.

iii. Το Q_1 είναι ίσο με τον μέσο όρο 5^{ης} και 6^{ης} παρατήρησης, δηλαδή 4 και 5.

Άρα $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Η 15^η και η 16^η παρατήρηση είναι 7 και 8 αντίστοιχα. Άρα $Q_3 = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$.

β) Το λάθος στο θηκόγραμμα του σχήματος είναι η διάμεσος, που φαίνεται να είναι 6,5. Η διάμεσος του συνόλου των παρατηρήσεων είναι $\delta = 6$.

γ) Στο σύνολο παρατηρήσεων που δίνεται κάνουμε την εξής αλλαγή. Αντικαθιστούμε ένα από τα 6 με 7. Τότε έχουμε:

2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11

Το νέο δείγμα έχει τα ίδια $x_{\min}$, $x_{\max}$, Q_1 και Q_3 και $\delta = 6,5$.

Επίσης:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7,5 - 4,5 = 3$$

$$Q_1 - 1,5Q = 4,5 - 1,5 \cdot 3 = 0$$

$$Q_3 + 1,5Q = 7,5 + 1,5 \cdot 3 = 11,5$$

Επομένως δεν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις, όπως και στο θηκόγραμμα του σχήματος.

Άρα σε αυτό το δείγμα αντιστοιχεί το θηκόγραμμα τους σχήματος.

ΘΕΜΑ 4

Στον τελικό των 100 μέτρων ανδρών σε μια αθλητική διοργάνωση, προκρίθηκαν 8 αθλητές και θα διεκδικήσουν τα τρία μετάλλια: χρυσό, αργυρό και χάλκινο. Υποθέτουμε ότι κάθε αθλητής είναι εξίσου πιθανό να τερματίσει σε μία οποιαδήποτε θέση από την 1^η έως την 8^η.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με 40320 τρόπους, (Μονάδες 7)
- ii. η τριάδα των νικητών μπορεί να προκύψει με 336 τρόπους. (Μονάδες 6)

β) Από τους 8 αθλητές που θα πάρουν μέρος στον τελικό, ακριβώς 2 είναι Ευρωπαίοι.

- i. Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες που αποτελούνται από μη Ευρωπαίους αθλητές; (Μονάδες 6)
- ii. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Η πρώτη θέση μπορεί να προκύψει με 8 τρόπους, όσοι είναι όλοι οι αθλητές. Η δεύτερη θέση μπορεί να προκύψει με 7 τρόπους, όσοι είναι οι αθλητές που απέμειναν. Η τρίτη θέση μπορεί να προκύψει με 6 τρόπους όσοι είναι οι αθλητές που απέμειναν μετά τη συμπλήρωση των δύο πρώτων θέσεων. Όμοια για τις άλλες θέσεις. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης υπάρχουν $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ τρόποι.

Εναλλακτικά: Κάθε κατάταξη των 8 αθλητών είναι ένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τους βάλουμε σε σειρά δηλαδή μια μετάθεση των 8.

Άρα η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320 \text{ τρόπους.}$$

ii. Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η πρώτη θέση μπορεί να προκύψει με 8 τρόπους, η δεύτερη θέση με 7 τρόπους και η τρίτη θέση με 6 τρόπους. Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης η πρώτη τριάδα αθλητών μπορεί να προκύψει $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ τρόπους.

Εναλλακτικά: Οι τρεις πρώτοι μπορεί να είναι κάθε τριάδα αθλητών, η οποία είναι μία διάταξη των 8 αθλητών ανά 3 χωρίς επαναλήψεις. Άρα η τριάδα των νικητών που θα ανέβει στο βάθρο να πάρει τα μετάλλια, μπορεί να προκύψει με $(8)_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ τρόπους.

β) i. Η πρώτη θέση μπορεί να προκύψει με 6 τρόπους, όσοι είναι οι μη Ευρωπαίοι αθλητές. Η δεύτερη θέση μπορεί να προκύψει με 5 τρόπους, όσοι είναι οι μη Ευρωπαίοι αθλητές που απέμειναν. Η τρίτη θέση μπορεί να προκύψει με 4 τρόπους όσοι είναι οι μη Ευρωπαίοι αθλητές που απέμειναν μετά τη συμπλήρωση των δύο πρώτων θέσεων. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ δυνατές τριάδες, που αποτελούνται μόνο από μη Ευρωπαίους αθλητές.

ii. Θεωρούμε το ενδεχόμενο A: «τα τρία μετάλλια να πάρουν μη Ευρωπαίοι αθλητές».

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας θα έχουμε

$$P(A) = \frac{120}{336} = \frac{5}{14}.$$

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A, είναι το A': «να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής».

Επομένως η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής είναι

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη τριών συνηθισμένων ζαριών» με δειγματικό χώρο όλες τις διατεταγμένες τριάδες που σχηματίζονται με τους αριθμούς 1 , 2 , 3 , 4 , 5 και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 216. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων A , B και Γ :

- i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις ίσοι αριθμοί», (Μονάδες 6)
- ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί», (Μονάδες 6)
- iii. Γ: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τουλάχιστον δύο ίδιοι αριθμοί». (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 6 τρόπους: με 1, 2, 3, 4, 5 ή 6. Το ίδιο και οι άλλες δύο θέσεις. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Εναλλακτικά: Κάθε διατεταγμένη τριάδα που σχηματίζεται με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6 είναι μια διάταξη των έξι αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6 ανά τρία, με δυνατές τις επαναλήψεις. Άρα το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι άρα $6^3 = 216$.

β) Επειδή πρόκειται για συνηθισμένα ζάρια, θεωρούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, είναι εξίσου πιθανά.

i. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 6, οι διατεταγμένες τριάδες:

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6).$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

ii. Η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 6 τρόπους: με 1, 2, 3, 4, 5 ή 6. Η δεύτερη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 5 τρόπους, όσοι είναι οι αριθμοί που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης θέσης. Η τρίτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους, όσοι είναι οι αριθμοί που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης και της δεύτερης θέσης. Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Εναλλακτικά: Κάθε ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι μία διάταξη των έξι αριθμών 1, 2, 3, 4, 5 και 6 ανά τρία, χωρίς επαναλήψεις, άρα $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Επομένως από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{6^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

iii. Το ενδεχόμενο Γ είναι το συμπληρωματικό του Β, άρα έχουμε

$$P(\Gamma) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

ΘΕΜΑ 4

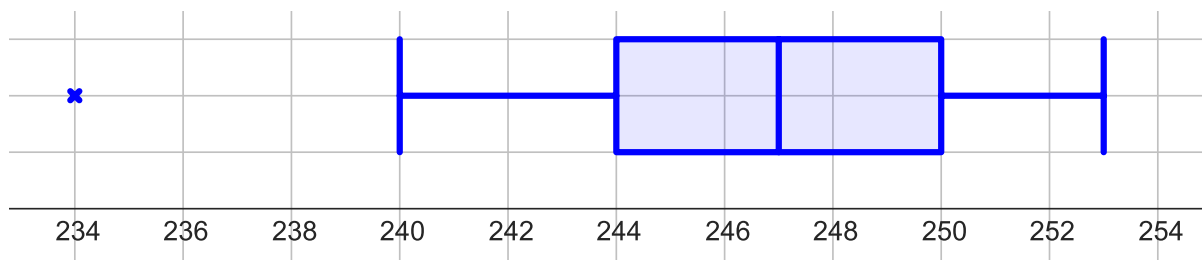
Μια εταιρεία τροφίμων χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει βρώσιμες ελιές σε δοχεία 250 γραμμαρίων (αναγραφόμενη ετικέτα). Παρακάτω δίνεται το καθαρό βάρος από ένα τυχαίο δείγμα 15 τέτοιων δοχείων.

245	245	250	247	250	245	250	250	245	249	245	242	247	250	245
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

α) Για το παραπάνω δείγμα:

- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή. (Μονάδες 3)
- Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 6)
- Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα. (Μονάδες 6)

β) Μια μικρή οικογενειακή επιχείρηση συσκευάζει το ίδιο προϊόν σε δοχεία 250 γραμμαρίων, με το χέρι. Επιλέχθηκε τυχαίο δείγμα 15 δοχείων και το καθαρό βάρος των δοχείων αυτών, παριστάνεται με το παρακάτω θηκόγραμμα. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)



γ) Συγκρίνοντας τις απαντήσεις σας, στα ερωτήματα α) και β), ποιος πιστεύετε ότι είναι ο πιο ακριβής τρόπος πλήρωσης των δοχείων, με αυτόματο μηχάνημα ή με το χέρι; (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η μέγιστη τιμή είναι $x_{\max} = 250$ και η ελάχιστη τιμή $x_{\min} = 242$.

ii. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

242, 245, 245, **245**, 245, 245, 245, **247**, 247, 249, 250, **250**, 250, 250, 250

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, 15, η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση, που είναι η 8η, άρα $\delta = 247$.

Για τον υπολογισμό του πρώτου Q_1 και του τρίτου Q_3 τεταρτημορίου έχουμε:

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε από το δείγμα τη διάμεσο και διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3 , όπως φαίνεται παραπάνω. Επομένως $Q_1 = 245$ και $Q_3 = 250$.

iii. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο, άρα $Q = Q_3 - Q_1 = 250 - 245 = 5$.

Είναι

$$Q_1 - 1,5Q = 245 - 1,5 \cdot 5 = 245 - 7,5 = 237,5 \text{ και}$$

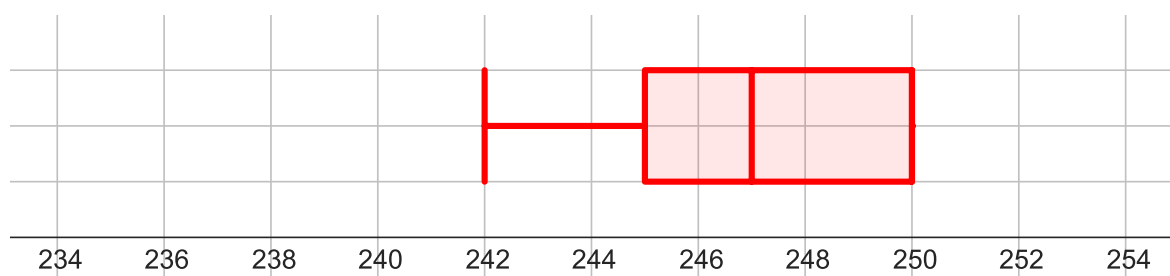
$$Q_3 + 1,5Q = 250 + 1,5 \cdot 5 = 250 + 7,5 = 257,5$$

Παρατηρούμε ότι δεν βρίσκονται παρατηρήσεις έξω από το διάστημα

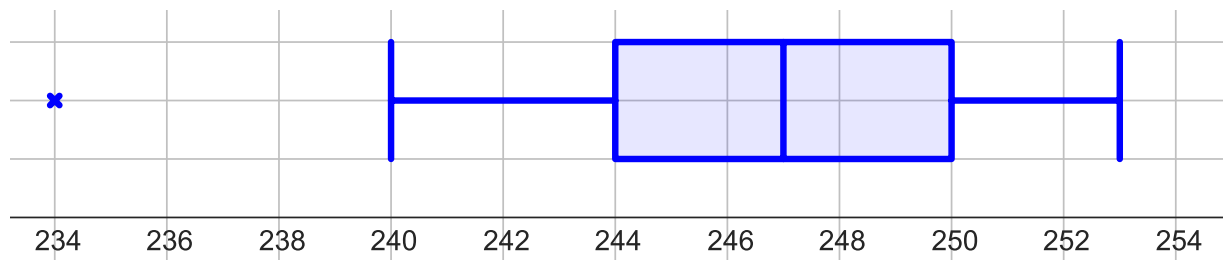
$$[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q] = [237,5, 257,5]$$

άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

Επομένως το θηκόγραμμα είναι το παρακάτω:



β) Από το δοθέν θηκόγραμμα

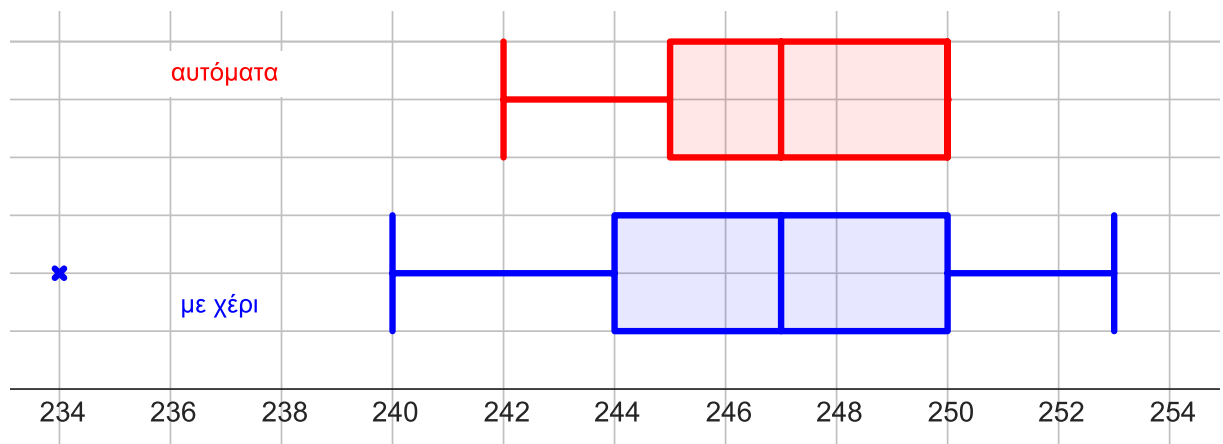


έχουμε:

μέγιστη τιμή $x'_{\max} = 253$, ελάχιστη τιμή $x'_{\min} = 234$,

διάμεσος $\delta' = 247$, $Q'_1 = 244$ και $Q'_3 = 250$

γ) Συγκρίνοντας τα δύο θηκογράμματα παρατηρούμε ότι:



η διάμεσος (247) και το τρίτο τεταρτημόριο (250) είναι τα ίδια και στα δύο δείγματα. Όμως το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι μικρότερα στην περίπτωση της αυτόματης πλήρωσης των δοχείων έναντι αυτής με το χέρι:

$R = 250 - 242 = 8$ έναντι $R' = 253 - 234 = 19$ και

$Q = 250 - 245 = 5$ έναντι $Q' = 250 - 244 = 6$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο τρόπος πλήρωσης των δοχείων, είναι πιο ακριβής με αυτόματο μηχάνημα παρά με το χέρι.