

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ.

1. Αν για μια συνάρτηση ισχύει $f(1) < f(2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
2. Αν για μια συνάρτηση ισχύει $f(1) < f(2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
3. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \leq 1$ και $f(3) = 1$, τότε η f έχει μέγιστο. Σ Λ
4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq 3$ και $f(2) = 3$, τότε η f έχει ελάχιστο. Σ Λ
5. Αν για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 . Σ Λ
6. Αν $A = (\alpha, \beta)$ $x_0 \in A$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το $f(x_0)$. Σ Λ
7. Αν $A = [\alpha, \beta]$ και η f είναι γνησίως γθίνουσα, τότε η f έχει μέγιστο το $f(\alpha)$ και ελάχιστο το $f(\beta)$. Σ Λ
8. Αν $A = (\alpha, +\infty)$ και η f είναι γνησίως μονότονη, τότε η f έχει ολικό ακρότατο. Σ Λ
9. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f δεν είναι άρτια. Σ Λ
10. Αν μία συνάρτηση είναι άρτια, η $-f$ είναι περιττή. Σ Λ

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x-1)^2 - 1, x < 1$

β) $f(x) = \sqrt{6-2x} + 3$

γ) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x}$

δ) $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3-x}}$

ε) $f(x) = \frac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$

στ) $f(x) = x^3 - \sqrt{3-2x}$

ζ) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού λ , η συνάρτηση:

α) $f(x) = (7 - |3 - 2\lambda|)x - 13$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x + 2023$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) $f(x) = (\lambda^2 - \lambda + 1)x + 1940$ είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) $f(x) = (|2\lambda - 1| - |\lambda + 2|)x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ε) $f(x) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)x + 111$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Να δείξετε ότι και η συνάρτηση $f(x) = 10x + 5f(x)$, είναι γνησίως αύξουσα.

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^2 - \sqrt{x} + \frac{a+6}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A (4, -33), να δείξετε ότι $\alpha = -2$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^2}{\sqrt{x}} - x < 4$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.

6. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, με $f(2023) < f(2020)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(5-3x) \leq f(x^2+x)$.

7. Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα ψ/ψ στο 2.

Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-1) < 2$, αν:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

8. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

α) $f(x) + f(5x) < f(3x) + f(6x)$ για κάθε x θετικό

β) $f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^5)$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

9. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$.

α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(|x| - 4) - 6 - 5 < 0$

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^{2023} + 2x^{2021} + 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) < 6$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $f(13) - f(12) < f(14) - f(11)$

11. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x-3)^2 - 5$

β) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

γ) $f(x) = 5 - 4|x-1|$

δ) $f(x) = \frac{10}{2 + \sqrt{4-x}}$

12. Να δείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = 3 - |x-2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο 2.

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 3}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$

14. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι ούτε άρτιες , ούτε περιττές

α) $f : (-3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$

β) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

γ) $f(x) = x^2 + x^3$

15. Δίνεται η περιττή συνάρτηση: $f(x) = ax^2 + (a-2)x^3 + (a-1)x$.

α) Να δείξετε ότι $a = 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 3$.

δ) Να βρείτε τους πραγματικούς κ, λ , ώστε τα σημεία $A(-\kappa, \lambda)$ και $B(\kappa, 36 - 3\lambda)$ να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

16. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + a|x|}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$.

α) Να δείξετε ότι $a = -2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 \leq \frac{f(2024)}{f(-2024)}x$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει:

$$f\left(\frac{2024}{2023}\right) < f\left(\frac{2022}{2023}\right).$$

α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f(x^{1001}) < f(x^3) + f(x^{1003})$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, περιττή και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-2, \lambda)$ και $B(2, 8 - 3\lambda)$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.

β) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

γ) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2 - x) > -4$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = f(|2x-5|-3)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'/x .

19. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη και ισχύει:

$f(\sqrt{2}-1) < f(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Αν ισχύει $f(a^2) < f(8a)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (a-2)x + a + 1 = 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda = 0$ (1), έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε λ πραγματικό.

δ) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , ισχύει:

$$f(x_1^2 + x_2^2 - 10) > x_1 x_2 - x_1 - x_2 - 1.$$

