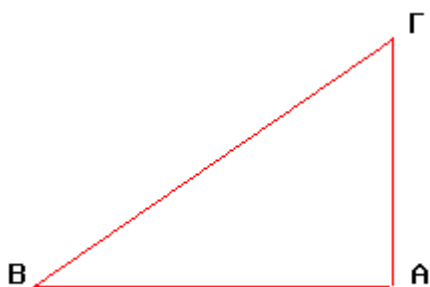


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) ισχύει ότι:

1. $\eta\mu B = \text{απέναντι κάθετη} / \text{υποτείνουσα}$
2. $\sigma\upsilon\nu B = \text{προσκεείμενη κάθετη} / \text{υποτείνουσα}$
3. $\epsilon\phi B = \text{απέναντι κάθετη} / \text{προσκεείμενη κάθετη}$
4. $\sigma\phi B = \text{προσκεείμενη κάθετη} / \text{απέναντι κάθετη}$

Άρα, από το σχήμα έχουμε:

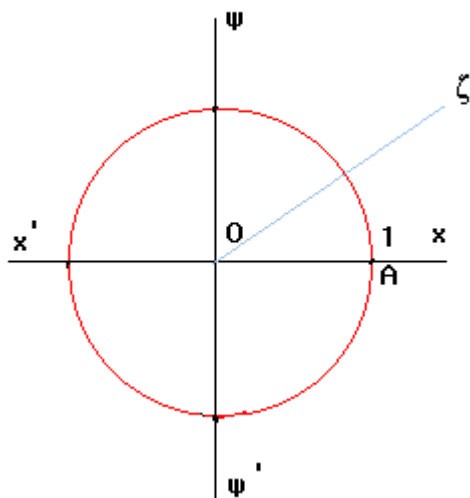
$$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\epsilon\phi B = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \sigma\phi B = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Παρατήρηση:

Χρησιμοποιώντας τους τύπους δεξιά, μπορούμε να υπολογίζουμε πλευρές ή γωνίες ενός τριγώνου, αν γνωρίζουμε κάποιες άλλες.

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ



(Το O έχει συντεταγμένες $(0,0)$ και το σημείο A τις $(1,0)$)

Ορισμός:

Ονομάζουμε **τριγωνομετρικό κύκλο**, έναν προσανατολισμένο κύκλο, που έχει ακτίνα τη μονάδα μετρήσεως, και το κέντρο του στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων.

Παρατήρηση:

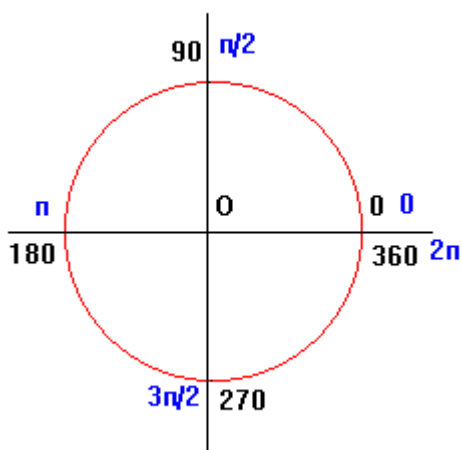
Λέγοντας **προσανατολισμένο κύκλο**, εννοούμε έναν κύκλο στον οποίο έχουμε ορίσει μία φορά σαν **θετική**. (Η αντίθετη είναι αρνητική)

Συνήθως, σαν θετική φορά, παίρνουμε αυτή, που είναι **αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού**.

- Αν ο ημιάξονας Ox στραφεί κατά τη **θετική φορά** κατά κ πλήρεις στροφές, και στη συνέχεια γωνία μ° , θα λέμε ότι διέγραψε γωνία $\omega = \kappa \cdot 360^\circ + \mu^\circ$.
Αν ο ημιάξονας Ox στραφεί κατά τη **αρνητική φορά** κατά κ πλήρεις στροφές, και στη συνέχεια γωνία μ° , θα λέμε ότι διέγραψε γωνία $\omega = -(\kappa \cdot 360^\circ + \mu^\circ)$.

Σε κάθε περίπτωση, ο Ox λέγεται **αρχική πλευρά** και η τελική του θέση **Oz** .
Λέγεται **τελική πλευρά** της γωνίας ω .

3. ΤΑ ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΟΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΟΥΣ



α) Μοίρες

Κάθε πλήρης γωνία είναι 360° .

Ο τριγωνομετρικός κύκλος διαιρείται σε τέσσερα τεταρτημόρια καθένα εκ των οποίων είναι 90° .

β) Ακτίνια (rad)

Ονομάζουμε **ακτίνιο**, (rad) τη γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου.

Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι 2π rad. Κάθε τεταρτημόριο του κύκλου θα ισούται με $\pi/2$ ακτίνια ($\pi/2$ rad).

Στην επόμενη παράγραφο, θα δούμε πως μετατρέπουμε ακτίνια σε μοίρες και αντίστροφο.

4. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

Θεωρούμε μία γωνία που είναι μ° και α rad.

Θα ισχύει ο τύπος μετατροπής: $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$

Παραδείγματα

α) Να μετατραπούν σε μοίρες τα $2\pi/3$ rad.

Λύση

Αν στον τύπο που είδαμε θέσουμε $\alpha = 2\pi/3$ έχουμε:

$$\frac{\mu}{180} = \frac{2\pi/3}{\pi} \cdot \text{Άρα θα ισχύει:}$$

$$\frac{\mu}{180} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} \cdot \text{Επομένως } 3\mu = 2 \cdot 180$$

Άρα $\mu = 120$. Δηλ. τα $2\pi/3$ rad είναι 120° .

β) Να μετατραπούν σε rad οι 210° .

Λύση

Αν στον τύπο που είδαμε θέσουμε $\mu = 210$ έχουμε:

$$\frac{210}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \text{Άρα θα ισχύει:}$$

$$210\pi = 180\alpha.$$

$$\text{Άρα, } \alpha = \frac{210\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi.$$

Δηλαδή οι 210° είναι $7/6 \pi$ rad.

Παρατήρηση

Υπάρχουν κάποια τόξα στην τριγωνομετρία τα οποία τα συναντούμε πολύ συχνά. Αυτά είναι τα 0° , 90° , 180° , 270° , 360° και ακόμα τα 30° , 45° , 60° .

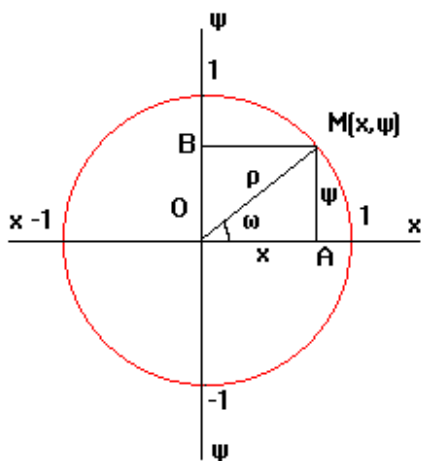
Για να μην χρησιμοποιούμε συνέχεια τούς τύπους, καλό θα είναι να θυμόμαστε κάποιες αντιστοιχίες μεταξύ τους απ' έξω.

Δηλαδή:

Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

5. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί**.



Αν πάρουμε έναν τριγωνομετρικό κύκλο, κέντρου O και ακτίνας ρ και ένα σημείο $M(x, \psi)$ να ανήκει στην περιφέρεια αυτού, τότε:

$$\alpha) \quad \eta\mu\omega = \frac{AM}{OM} = \frac{\psi}{\rho}$$

$$\beta) \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{OA}{OM} = \frac{x}{\rho}$$

$$\gamma) \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{AM}{OA} = \frac{\psi}{x}$$

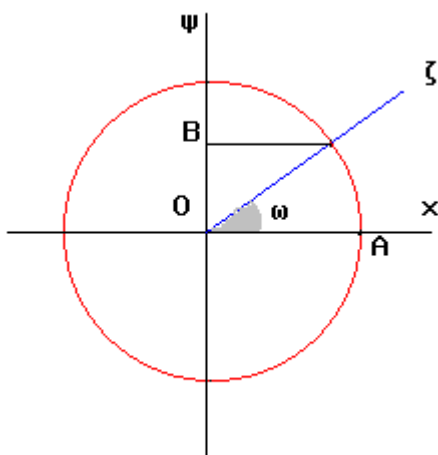
$$\delta) \quad \sigma\varphi\omega = \frac{OA}{AM} = \frac{x}{\psi}$$

Επειδή $|\rho| = 1$, θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

α) $\eta\mu\omega = \psi_M =$ τεταγμένη του σημείου M **β)** $\sigma\upsilon\nu\omega = \chi_M =$ τετμημένη του σημείου M

Παρατηρούμε, ότι, επειδή ο τριγωνομετρικός κύκλος έχει ακτίνα τη μονάδα, η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M , δεν μπορούν να πάρουν τιμές έξω από το διάστημα $[-1, 1]$. Θα έχουμε δηλαδή τις σχέσεις:

α) $-1 \leq \eta\mu\omega \leq +1 \Leftrightarrow |\eta\mu\omega| \leq 1.$ **β)** $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq +1 \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1.$



Θεωρούμε τώρα, μία γωνία ω με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox .

Παρατηρούμε ότι $\eta\mu\omega = OB = \psi$.

Αν η ημιευθεία Oz εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή κατά γωνία 2π τότε:

$$\eta\mu(2\pi + \omega) = OB = \eta\mu\omega.$$

Μετά από μία ακόμη περιστροφή, θα ισχύει:

$$\eta\mu(4\pi + \omega) = OB = \eta\mu\omega.$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι η τιμή του ημιτόνου μίας γωνίας **δεν εξαρτάται από το πλήθος των ακεραίων περιστροφών, αλλά, από τη θέση που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.**

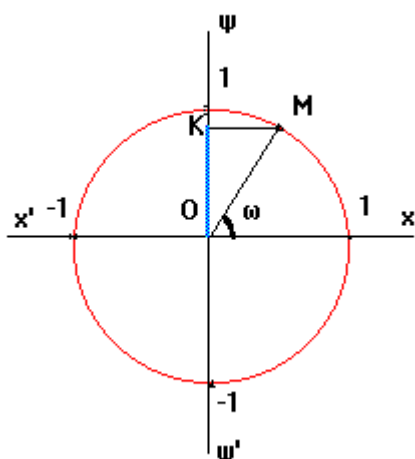
Μετά από k ακέραιες περιστροφές, θα ισχύει:

$$\eta\mu(k \cdot 2\pi + \omega) = \eta\mu\omega, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Ισχύουν δηλ. οι σχέσεις:

$\eta\mu(k \cdot 2\pi + \omega) = \eta\mu\omega, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\epsilon\varphi(k \cdot 2\pi + \omega) = \epsilon\varphi\omega, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 2\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\sigma\varphi(k \cdot 2\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega, \quad k \in \mathbb{Z}$

6. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ



Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική της πλευρά τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ. Είδαμε ότι $\eta\mu\omega = OK =$ τεταγμένη του Μ. Γι' αυτό:

Ο άξονας $\psi'\psi$ ονομάζεται άξονας των ημιτόνων.

λ Αν $\omega = 0^\circ$, τότε $\underline{OK} = 0$, δηλαδή $\eta\mu 0^\circ = 0$.

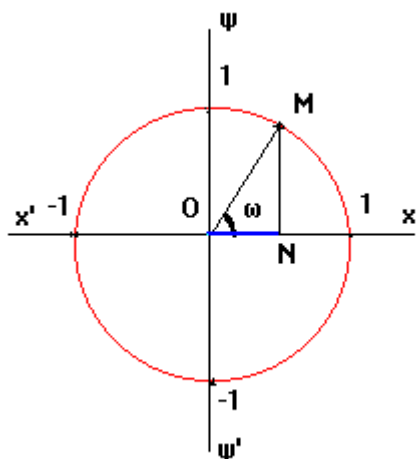
λ Αν $\omega = 90^\circ$, τότε $\underline{OK} = 1$, δηλαδή $\eta\mu 90^\circ = 1$.

λ Αν $\omega = 180^\circ$, τότε $\underline{OK} = 0$, δηλαδή $\eta\mu 180^\circ = 0$.

λ Αν $\omega = 270^\circ$, τότε $\underline{OK} = -1$, δηλαδή $\eta\mu 270^\circ = -1$.

λ Αν $\omega = 360^\circ$, τότε $\underline{OK} = 0$, δηλαδή $\eta\mu 360^\circ = 0$.

7. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ



Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική της πλευρά τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ. Είδαμε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = ON =$ τετμημένη του Μ. Γι' αυτό:

Ο άξονας $\chi'\chi$ ονομάζεται άξονας των συνημιτόνων.

λ Αν $\omega = 0^\circ$, τότε $\underline{ON} = 1$, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$.

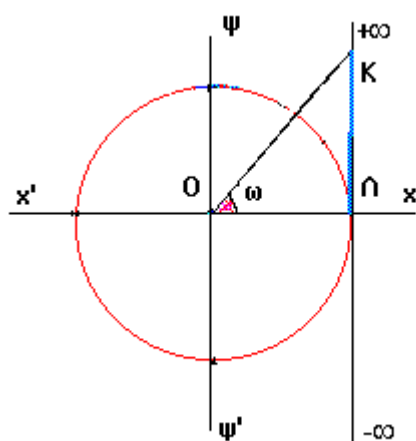
λ Αν $\omega = 90^\circ$, τότε $\underline{ON} = 0$, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$.

λ Αν $\omega = 180^\circ$, τότε $\underline{ON} = -1$, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$.

λ Αν $\omega = 270^\circ$, τότε $\underline{ON} = 0$, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu 270^\circ = 0$.

λ Αν $\omega = 360^\circ$, τότε $\underline{ON} = 1$, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu 360^\circ = 1$.

8. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ



Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική της πλευρά τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου (ϵ) στο Λ στο σημείο Κ.

Η εφαπτομένη της γωνίας ω , ισούται με την τεταγμένη του σημείου Κ.

Η ευθεία ΑΚ ονομάζεται άξονας των εφαπτομένων.

λ Αν $\omega = 0^\circ$, τότε $AK = 0$ δηλαδή $\epsilon\phi 0^\circ = 0$.

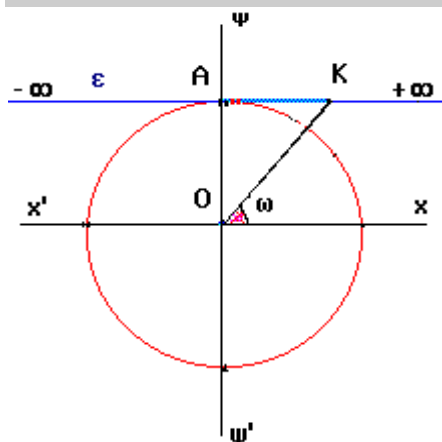
λ Αν $\omega = 90^\circ$, τότε $OK \cap \epsilon = \emptyset$ δηλαδή $\epsilon\phi 90^\circ = ;$

λ Αν $\omega = 180^\circ$, τότε $AK = 0$ δηλαδή $\epsilon\phi 180^\circ = 0$.

λ Αν $\omega = 270^\circ$, τότε $OK \cap \epsilon = \emptyset$, δηλαδή $\epsilon\phi 270^\circ = ;$

λ Αν $\omega = 360^\circ$, τότε $AK = 0$ δηλαδή $\epsilon\phi 360^\circ = 0$.

9. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ



Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική της πλευρά τέμνει την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο A στο σημείο K.

Η συνεφαπτομένη της γωνίας ω , ισούται με την τετμημένη του σημείου K.

Η ευθεία AK ονομάζεται άξονας των συνεφαπτομένων

- ♦ Αν $\omega = 0^\circ$, τότε $OK \cap \varepsilon = \emptyset$ δηλαδή $\sigma\phi 0^\circ = ;$
- ♦ Αν $\omega = 90^\circ$, τότε $AK = 0$ δηλαδή $\sigma\phi 90^\circ = 0$.
- ♦ Αν $\omega = 180^\circ$, τότε $OK \cap \varepsilon = \emptyset$, δηλαδή $\sigma\phi 180^\circ = ;$
- ♦ Αν $\omega = 270^\circ$, τότε $AK = 0$, δηλαδή $\sigma\phi 270^\circ = 0$.
- ♦ Αν $\omega = 360^\circ$, τότε $OK \cap \varepsilon = \emptyset$, δηλαδή $\sigma\phi 360^\circ = ;$

Παρατήρηση

Είδαμε παραπάνω ότι για την εφαπτομένη των 90° και των 270° και τη συνεφαπτομένη των 0° και των 180° δεν υπάρχουν τιμές, αλλά, βάλαμε ερωτηματικό.

Αυτό σημαίνει, ότι, σε αυτά τα τόξα οι εφαπτόμενες και οι συνεφαπτόμενες **δεν ορίζονται**. Η εξήγηση είναι, ότι, στα τόξα αυτά, η τελική πλευρά της γωνίας OK και η ευθεία ε **δεν τέμνονται, αλλά είναι παράλληλες**.

Θα δούμε τώρα συγκεντρωτικά, τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των βασικών τόγων σε ένα συγκεντρωτικό πίνακα.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	;	0	;	0
σφ	;	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	;	0	;

Παρατήρηση:

Η απομνημόνευση για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° , 45° και 60° , διευκολύνεται από τον παρακάτω μνημονικό κανόνα:

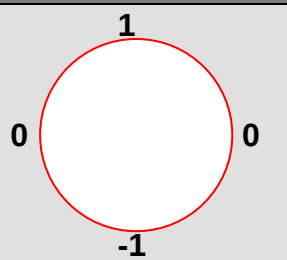
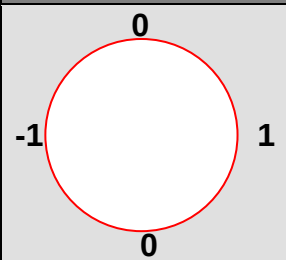
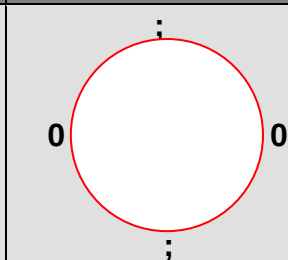
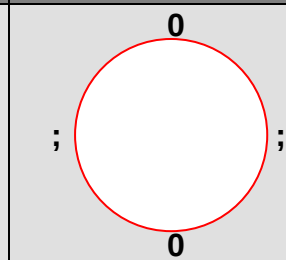
ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ 1:

Για τα **ημίτονα**, θα θυμόμαστε τους αριθμούς: $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Για τα **συνημίτονα**, θα θυμόμαστε τους αριθμούς ανάποδα, δηλαδή: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}$.

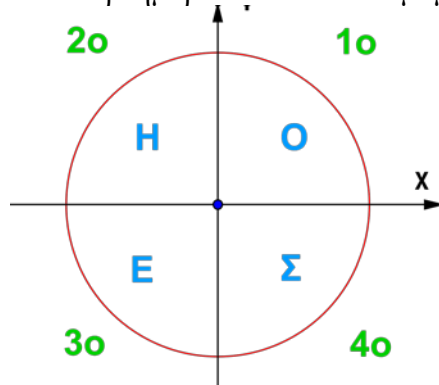
ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ 2:

Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, καλό είναι να θυμόμαστε τα παρακάτω σχήματα:

1. Ημίτονο	2. Συνημίτονο	3. Εφαπτομένη	4. Συνεφαπτομένη
			

10. ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών, είναι διαφορετικό στο 1ο, 2ο, 3ο και 4ο τεταρτημόριο. Για να το θυμόμαστε εύκολα, παραθέτουμε το παρακάτω σχήμα:



- α) Το **Ο** στο πρώτο τεταρτημόριο, σημαίνει ότι εκεί, **όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.**
- β) Το **Η** στο δεύτερο τεταρτημόριο, σημαίνει ότι **μόνο το ημίτονο είναι θετικό.**
- γ) Το **Ε** στο τρίτο τεταρτημόριο, σημαίνει ότι εκεί, **μόνο η εφαπτομένη αλλά και η συνεφαπτομένη είναι θετικές.**
- δ) Το **Σ** στο τέταρτο τεταρτημόριο, σημαίνει ότι **μόνο το συνημίτονο είναι θετικό.**

11. ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Πολλές φορές, σε μία άσκηση τριγωνομετρίας, εμφανίζονται οι τριγωνομετρικοί

αριθμοί των τόξων: $-x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x, \pi - x, \pi + x, \frac{3\pi}{2} - x, \frac{3\pi}{2} + x$.

Για ευκολία στίς πράξεις, χρειάζεται να κάνουμε αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο, δηλ. να εκφράσουμε τούς τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπάνω τόξων, συναρτήσει των $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\phi x, \sigma\phi x$.

Για να αποφύγουμε την απομνημόνευση πολλών σχέσεων, θα δούμε πρώτα τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των αντίθετων τόξων, και μετά, μία απλή μέθοδο για αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο.

Αντίθετα τόξα

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \eta\mu(-x) = -\eta\mu x \quad \gamma) \epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$$

$$\beta) \sin(-x) = +\sin x \quad \delta) \cos(-x) = -\cos x$$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Μέθοδος:

α) Πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας, ότι, στα τόξα $\pi/2 - x$, $\pi/2 + x$, $3\pi/2 - x$, $3\pi/2 + x$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί **αλλάζουν**.

Δηλαδή: $\eta\mu \rightarrow \sin$, $\sin \rightarrow \eta\mu$, $\epsilon\phi \rightarrow \sigma\phi$, $\sigma\phi \rightarrow \epsilon\phi$.

β) Το πρόσημο που θα βάλουμε μπροστά, είναι το πρόσημο που έχει ο τριγωνομετρικός αριθμός στο συγκεκριμένο τεταρτημόριο.

Παραδείγματα

1) Να κάνετε αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο για τους παρακάτω τριγων. αριθμούς.

α) $\eta\mu(\pi - x)$

Λύση

Είδαμε ότι στο $\pi - x$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν αλλάζουν.

Άρα, $\eta\mu(\pi - x) \rightarrow \eta\mu x$. Ακόμη, το τόξο $\pi - x$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο στο οποίο το ημίτονο είναι θετικό. Δηλαδή $\eta\mu(\pi - x) = +\eta\mu x$.

β) $\sin(\pi/2 - x)$

Λύση

Είδαμε ότι, στο $\pi/2 - x$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αλλάζουν.

Άρα, $\sin(\pi/2 - x) = \eta\mu x$. Ακόμη, το τόξο $\pi/2 - x$ ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο στο οποίο το συνημίτονο είναι θετικό. Δηλαδή $\sin(\pi/2 - x) = +\eta\mu x$.

γ) $\cos(3\pi/2 + x)$

Λύση

Είδαμε ότι, στο $3\pi/2 + x$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αλλάζουν.

Άρα, $\cos(3\pi/2 + x) = \epsilon\phi x$. Ακόμη, το τόξο $3\pi/2 + x$ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο στο οποίο η συνεφαπτομένη είναι αρνητική. Δηλαδή $\cos(3\pi/2 + x) = -\epsilon\phi x$.

δ) $\epsilon\phi(\pi - x)$

Λύση

Είδαμε ότι, στο $\pi - x$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν αλλάζουν.

Άρα, $\epsilon\phi(\pi - x) = \epsilon\phi x$. Ακόμη, το τόξο $\pi - x$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο στο οποίο η εφαπτομένη είναι αρνητική. Δηλαδή $\epsilon\phi(\pi - x) = -\epsilon\phi x$.

Άσκηση:

Έχοντας υπ' όψη σας αυτά που μάθαμε για την αναγωγή ενός τόξου στο 1ο τεταρτημόριο, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	$\pi/2 - x$	$\pi/2 + x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$3\pi/2 - x$	$3\pi/2 + x$
$\eta\mu$						
$\sin$						
$\epsilon\phi$						
$\sigma\phi$						

Παρατήρηση:

Πολλές φορές, χρειάζεται να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξων,

τα οποία είναι μεγαλύτερα του 2π , ή οι τριγωνομετρικοί τους αριθμοί είναι άγνωστοι. Στην περίπτωση αυτή, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Το τόξο είναι σε μοίρες

i) **Αν το τόξο είναι μικρότερο των 360°** , προσπαθούμε να το διασπάσουμε σε άθροισμα ή διαφορά δύο τόξων εκ των οποίων το ένα είναι κάποιο από τα τόξα: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

Παραδείγματα:

$$\sin 300^\circ = \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -1/\sqrt{2}$$

ii) **Αν το τόξο είναι μεγαλύτερο των 360°** , διαιρούμε με το 360 οπότε αν π το πηλίκο και α το υπόλοιπο της διαίρεσης, θα ισχύει:

τριγ.αριθμός τόξου = τριγ.αριθμός($360\pi + \alpha$) = τριγ.αριθμός(α), γιατί τα ακέραια πολλαπλάσια των 360° παραλείπονται.

Παραδείγματα:

$$\sin 750^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2.$$

$$\cos 585^\circ = \cos(360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -1/\sqrt{2}$$

$$\sin(5 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos(-1125^\circ) = \cos(-3 \cdot 360^\circ - 45^\circ) = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$$

β) Το τόξο είναι σε ακτίνια

Στην περίπτωση αυτή, προσπαθούμε να διασπάσουμε το τόξο, ώστε είτε να προκύψει τριγωνομετρικός αριθμός γνωστού τόξου (με αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο), είτε να αφαιρέσουμε τα ακέραια πολλαπλάσια.

Παραδείγματα:

$$\alpha) \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{6\pi + \pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$\beta) \cos \frac{27\pi}{4} = \cos \frac{26\pi + \pi}{4} = \cos(\frac{26\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos(6\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\gamma) \cos \frac{65\pi}{6} = \cos \frac{66\pi - \pi}{6} = \cos(\frac{66\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \cos(11\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(10\pi + \pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\delta) \sin(-\frac{103\pi}{3}) = \sin(-\frac{102\pi - \pi}{3}) = \sin(-\frac{102\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \sin(-34\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Παρατήρηση:

Από τα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι η διάσπαση του αριθμητή δεν γίνεται τυχαία, αλλά, θα πρέπει ο ένας από τους δύο όρους να διαιρείται με τον παρονομαστή και ο άλλος διαιρούμενος με τον παρονομαστή να μάς δίνει τόξο του οποίου οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι γνωστοί.

Ασκήσεις

1) **Να βρεθούν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι εικόνες των αριθμών:**

$$\alpha) \frac{4\pi}{3} \quad \beta) \frac{2\pi}{3} \quad \gamma) \frac{7\pi}{6} \quad \delta) \frac{10\pi}{6} \quad \epsilon) \frac{5\pi}{4} \quad \sigma\tau) \frac{7\pi}{4} \quad \zeta) -\frac{\pi}{3} \quad \eta) -\frac{\pi}{2} \quad \theta) -\frac{4\pi}{3}.$$

2) **Να αποδείξετε ότι:**

$$\begin{array}{lll} \alpha) \sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} & \beta) \eta\mu\left(\frac{43\pi}{5}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5} & \gamma) \eta\mu 790^{\circ} = \eta\mu 70^{\circ} \\ \delta) \eta\mu(-1050^{\circ}) = \eta\mu 30^{\circ} & \varepsilon) \eta\mu\frac{27\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} & \sigma\tau) \eta\mu 1000^{\circ} = \sin 10^{\circ}. \end{array}$$

- 3) Αν $0 < \chi < \pi/2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $A = 2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi + \varepsilon\phi\chi$.
- 4) Αν $\pi/2 < \chi < \pi$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $B = \eta\mu\chi - \varepsilon\phi\chi - \sigma\phi\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$
- 5) i) Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω τριγωνομετρικών αριθμών:
- α) $\eta\mu(13\pi)$ β) $\sin(-30\pi)$ γ) $\eta\mu(450^{\circ})$ δ) $\sin\frac{15\pi}{2}$ ε) $\eta\mu\frac{7\pi}{2}$ στ) $\eta\mu(-270^{\circ})$
- ζ) $\sin(-630^{\circ})$ η) $\varepsilon\phi\frac{10\pi}{6}$ θ) $\sigma\phi(-\frac{4\pi}{3})$ ι) $\varepsilon\phi 855^{\circ}$ ια) $\varepsilon\phi(-3600^{\circ})$ ιβ) $\sigma\phi 585^{\circ}$.
- ii) Να εκφράσετε τους κάτωθι τριγωνομετρικούς αριθμούς με τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

$$\begin{array}{lll} \alpha) \sin(\theta - 90^{\circ}) & \beta) \varepsilon\phi(\theta - 3\pi/2) & \gamma) \sin(\theta + 540^{\circ}) \\ \delta) \eta\mu(-\theta + \pi/2) & \varepsilon) \sin(\theta - 180^{\circ}) & \sigma\tau) \eta\mu(\theta - 720^{\circ}) \\ \zeta) \varepsilon\phi(-540^{\circ} + \theta) & \eta) \sin(\theta - 180^{\circ}) & \theta) \sigma\phi(\theta - 750^{\circ}) \end{array}$$

- 6) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\pi - \chi) + \eta\mu(3\pi/2 + \chi) + \eta\mu(\chi - \pi) - \eta\mu(\chi - \pi/2) = 0$.
- 7) Αν $\theta = \frac{19\pi}{4}$, $\chi = \frac{29\pi}{4}$, να βρείτε την παράσταση: $A = 2\varepsilon\phi\theta - 3\sigma\phi\theta + \eta\mu^2\chi + \sin^2\chi$.
- 8) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \eta\mu\left(\frac{7\pi}{4} + \chi\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right)$.

9) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{\sin(3\pi + \chi) \eta\mu(\chi + \frac{\pi}{2}) \sigma\phi(7\pi - \chi)}{\eta\mu(9\pi - \chi) \sin(\chi - \frac{7\pi}{2}) \varepsilon\phi(-\frac{\pi}{2} + \chi)}$.

10) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\varepsilon\phi(\chi + \pi) \sin(-\chi) \eta\mu(9\pi + \chi)}{\sigma\phi(\frac{17\pi}{2} - \chi) \sin(\chi - 2\pi) \sin(\frac{13\pi}{2} + \chi)} = 1$.

11) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{\varepsilon\phi(180^{\circ} - \alpha) \sin(540^{\circ} - \alpha) \varepsilon\phi(450^{\circ} - \alpha)}{\eta\mu(90^{\circ} + \alpha) \sigma\phi(810^{\circ} - \alpha) \varepsilon\phi(\alpha - 270^{\circ})}$.

12) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $B = \frac{\sin(\chi - \frac{\pi}{2}) + \eta\mu(3\pi - \chi) - \sin(\frac{5\pi}{2} + \chi)}{4\eta\mu(7\pi - \chi) \sin(\chi - 4\pi)}$.

- 13) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \frac{\sin 675^{\circ} \eta\mu 390^{\circ} + \sin 420^{\circ} \eta\mu 675^{\circ}}{\varepsilon\phi 30^{\circ} + \sigma\phi 210^{\circ}}$. β) $B = \frac{\eta\mu 855^{\circ} \sigma\phi 585^{\circ} - \sin 855^{\circ} \varepsilon\phi 585^{\circ}}{\sin 855^{\circ} + \eta\mu 585^{\circ}}$

14) Αν $\varepsilon\phi 25^\circ = \alpha$, να βρείτε τη τιμή των κλασμάτων: α) $\frac{\varepsilon\phi 155^\circ - \varepsilon\phi 115^\circ}{1 + \varepsilon\phi 155^\circ \varepsilon\phi 115^\circ}$

β) $\frac{\varepsilon\phi 205^\circ - \varepsilon\phi 115^\circ}{\varepsilon\phi 245^\circ + \varepsilon\phi 335^\circ}$

15) Αν $A+B+\Gamma = 180^\circ$, να δειχθεί ότι α) $\eta\mu(B+\Gamma) = \eta\mu A$ και β) $\sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} = \eta\mu \frac{A}{2}$

16) Αν θ είναι γωνία με την τελική της πλευρά στη δεύτερη γωνία των αξόνων για την οποία ισχύει $\varepsilon\phi\theta = -2/3$, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\eta\mu(90^\circ - \theta) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)}{\varepsilon\phi(270^\circ + \theta) + \sigma\phi(360^\circ - \theta)} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

β) $\frac{\varepsilon\phi(90^\circ + \theta) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)}{\eta\mu(270^\circ - \theta) - \sigma\phi(-\theta)} = \frac{2 + \sqrt{13}}{2 - \sqrt{13}}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Με τον όρο τριγωνομετρικές ταυτότητες, εννοούμε ισότητες που περιέχουν τουλάχιστον ένα τριγωνομετρικό αριθμό. Οι περισσότεροι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

2. $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

3. $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ (Από τις 1 και 2 συμπεραίνουμε ότι: $\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$)

Παρατηρήσεις:

α) Οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν για κάθε τόξο ω πραγματικό.

β) Από τον 1^ο τύπο, αν διαιρέσουμε με $\sigma\upsilon\nu^2\omega$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\omega}$.

γ) Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$, θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\omega}$ προκύπτει ότι:

$$\eta\mu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\omega}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

Μεθοδολογία:

- α) Αρχίζουμε από το μέλος που γίνονται οι περισσότεροι μετασχηματισμοί και κατά-
λήγουμε στο άλλο μέλος.
β) Αν και τα δύο μέλη είναι σύνθετα, κάνουμε πράξεις στο κάθε μέλος χωριστά και
προσπαθούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.
γ) Παίρνουμε την ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και με ισοδύναμες πράξεις,
προσπαθούμε να καταλήξουμε σε προφανή ισότητα

Για τον μετασχηματισμό μιας τριγωνομετρικής παράστασης, εκτός από τούς
τύπους των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, καλό είναι να έχουμε υπ' όψη μας
και τα παρακάτω:

- Αν το πρώτο μέλος της παράστασης περιέχει $\eta\mu$, $\sigma\upsilon\nu$, $\epsilon\phi$, $\sigma\phi$ και το δεύτερο
 $\eta\mu$ και $\sigma\upsilon\nu$, τότε υποχρεωτικά χρησιμοποιούμε τους τύπους 2 και 3.
- Θα πρέπει να προσέχουμε αν εμφανίζεται η παράσταση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega$ την
οποία αντικαθιστούμε με τη μονάδα
Επίσης, αν στο 1^ο μέλος έχουμε μόνο $\eta\mu^2$ και στο δεύτερο $\eta\mu^2$ και $\sigma\upsilon\nu^2$
χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$.
Το αντίστοιχο ισχύει αν στο 1^ο μέλος έχουμε $\eta\mu^2\omega$.
- Αν η παράσταση περιέχει κλάσματα, τα κάνουμε πάντοτε ομώνυμα
- Η σειρά των ενεργειών μας κατά την απόδειξη μιας τριγωνομετρικής
ταυτότητας είναι:

ΠΡΑΞΕΙΣ → ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ → ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι: $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$.
2. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$.
3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\theta} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \epsilon\phi^2\theta + \epsilon\phi^4\theta$
4. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\omega$.
5. Να δείξετε ότι: $\frac{1-\eta\mu^4\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 1 + \eta\mu^2\theta$.
6. Να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} + \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.
7. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\chi}{1-\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$.

8. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$.
9. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} = 1+\sigma\upsilon\nu\alpha$.
10. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi\beta}{\sigma\varphi\alpha}$.
11. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha$.
12. Να αποδείξετε ότι: $(1-\eta\mu\chi)\left(1+\frac{1}{\eta\mu\chi}\right) = \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\varphi\chi$.
13. Να αποδείξετε ότι: $(1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 2(1+\eta\mu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$.
14. Να αποδείξετε ότι: $\left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\eta\mu\chi}\right)\left(1 + \frac{\eta\mu\chi+1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right) = 2$.
15. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 - 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi$.
16. Αν $0 < \chi \leq \pi/2$, να δείξετε ότι: $\frac{\sqrt{1+\eta\mu\chi} - \sqrt{1-\eta\mu\chi}}{\sqrt{1+\eta\mu\chi} + \sqrt{1-\eta\mu\chi}} = \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$.
17. Αν $0 < \chi < \pi/2$, να δείξετε ότι: $\sqrt{2\varepsilon\varphi\chi + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = 1+\varepsilon\varphi\chi$.
18. Να αποδείξετε ότι: $(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 2$.
19. Να αποδειχθεί ότι: $\varepsilon\varphi^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\varphi^2\theta\eta\mu^2\theta = 1$.
20. Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{1-\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} = 1-2\eta\mu^2\chi$ β) $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\eta\mu\chi} = \eta\mu\chi$.
21. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha+1}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-1} = \frac{\eta\mu\alpha+1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$.
22. Αν $\pi < \alpha < 3\pi/2$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}} = 2\sigma\varphi\alpha$.
23. Να αποδείξετε ότι: $(\varepsilon\varphi^2\chi + 1)(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) = \varepsilon\varphi^2\chi - 1$.
24. Ομοίως: $\varepsilon\varphi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$.

25. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\psi} = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi-\sigma\upsilon\nu\psi}{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi} = 0.$

26. Αν εφ α και εφ β ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 - \lambda\chi + \mu = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}.$ (Διαιρέστε με $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$)

27. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{\sqrt{11}\eta\mu\chi-\sqrt{7}}{2-\sqrt{11}\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2+\sqrt{11}\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{7}+\sqrt{11}\eta\mu\chi}.$

28. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\phi^3\chi}{\eta\mu^2\chi} - \frac{1}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\sigma\phi^3\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \epsilon\phi^3\chi + \sigma\phi^3\chi.$

29. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\phi\chi-\eta\mu\chi}{\eta\mu^3\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)}.$

Παρατήρηση:

Αν μας δώσουν έναν από τους τέσσερις τριγωνομετρικούς αριθμούς και το διάστημα στο οποίο αυτός ανήκει και μας ζητούν τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς, τότε :

α) Αν γνωρίζουμε το ημίτονο ή το συνημίτονο, από τον τύπο $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, βρίσκουμε τον άλλο τριγωνομετρικό αριθμό, λύνοντας απλώς ως προς ημίτονο ή ως προς συνημίτονο τον τύπο. Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού, εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας θ . Η εφασπτομένη και η συνεφασπτομένη υπολογίζεται από τους τύπους:

$$\epsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}.$$

Παράδειγμα:

Αν $\eta\mu\theta = 3/5$ (1) και $\pi < \theta < 3\pi/2$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Λύση:

Από τον τύπο $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \pm \sqrt{1-\eta\mu^2\theta} = \pm \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \pm \frac{4}{5}.$$

Επειδή όμως, $\pi < \theta < 3\pi/2$ το $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\theta = \frac{1}{\varepsilon\phi\theta} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

β) Αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη ή την συνεφαπτομένη, τότε από τον τύπο

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega} \quad \text{βρίσκουμε το συνω και κατά προέκταση το ημω.}$$

Παράδειγμα:

Αν $\varepsilon\phi\theta = -5/12$, (1) και $\pi/2 < \theta < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Λύση:

Από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$, έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \pm \frac{1}{\frac{13}{12}} = \pm \frac{12}{13}.$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \pm \frac{12}{13}$ και επειδή για $\pi/2 < \theta < \pi$ $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$, έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$.

Από τη σχέση $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, έχουμε ότι:

$$\eta\mu\theta = \pm \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \pm \sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \pm \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm \frac{5}{13} \quad \text{και επειδή για}$$

$\pi/2 < \theta < \pi$ $\eta\mu\theta > 0$, ισχύει ότι $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$.

Παρατήρηση: Αν μας έδιναν την $\sigma\phi\theta$, θα βρίσκαμε την $\varepsilon\phi\theta$ από τον τύπο

$\varepsilon\phi\theta = \frac{1}{\sigma\phi\theta}$ και θα συνεχίζαμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\eta\mu\theta = 2/3$ με $0^\circ < \theta < 90^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της θ
2. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -5/6$ και $\pi/2 < \theta < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .
3. Αν $\varepsilon\phi\theta = -5/4$ και $\pi/2 < \theta < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .
4. Αν $\sigma\phi\theta = -4/3$ και $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του κλάσματος:

$$A = \frac{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - \varepsilon\phi\theta}{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta + \varepsilon\phi\theta}.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Με τον όρο τριγωνομετρικές εξισώσεις, εννοούμε εξισώσεις που περιέχουν τουλάχιστον ένα τριγωνομετρικό αριθμό του άγνωστου τόξου.
- Ρίζες μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης, ονομάζουμε τα άγνωστα τόξα τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση.
- Επίλυση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης, ονομάζουμε τη διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις ρίζες μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης.
- Για να λύσουμε μία τριγωνομετρική εξίσωση, προσπαθούμε πάντα να την φέρουμε σε μορφή ισότητας τριγωνομετρικών αριθμών. Τότε, τα άγνωστα τόξα βρίσκονται από τους τύπους:

$$\alpha) \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \theta, \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\beta) \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma) \quad \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) \quad \sigma\phi\chi = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Παρατηρήσεις:

- α) Οι παραπάνω τύποι ισχύουν για όλα τα πραγματικά τόξα χ και ω .
- β) Σε αντίθεση με τις αλγεβρικές εξισώσεις που το πλήθος των ριζών τους είναι πεπερασμένο, το πλήθος των ριζών των τριγωνομετρικών εξισώσεων (αν δεν περιοριζόμαστε σε διάστημα) είναι άπειρο.

1. Εξισώσεις που στηρίζονται στους βασικούς τύπους

Παράδειγματα

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύση:

$$\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατήρηση:

Πρέπει να δώσουμε προσοχή στο 1^ο βήμα κατά το οποίο ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ γράφεται σαν $\eta\mu\frac{\pi}{3}$. Εδώ, κάνουμε την εξής ερώτηση: Τίνος τόξου ημίτονο είναι ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\sin \chi = 1$

Λύση:

$$\sin \chi = 1 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin 0 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm 0, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $\varepsilon\phi\chi = \sqrt{3}$

Λύση:

$$\varepsilon\phi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

δ) Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\phi\chi = \sqrt{3}$

Λύση:

$$\sigma\phi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi\chi = \sigma\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ε) Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(2\chi + 1) = \eta\mu 3\chi$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \eta\mu(2\chi + 1) = \eta\mu 3\chi &\Leftrightarrow 2\chi + 1 = 2\kappa\pi + 3\chi \quad \text{ή} \quad 2\chi + 1 = (2\kappa + 1)\pi - 3\chi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -\chi = 2\kappa\pi - 1 \quad \text{ή} \quad 2\chi + 1 = 2\kappa\pi + \pi - 3\chi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \chi = 1 - 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad 5\chi = 2\kappa\pi + \pi - 1, \kappa \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \chi = 1 - 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad \chi = \frac{2\kappa\pi + \pi - 1}{5}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\eta\mu\chi = 1$

2. $\eta\mu\chi = 0$

3. $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$

4. $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\sin\chi = 1$

6. $\sin\chi = 0$

7. $\sin\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\sin\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. $\varepsilon\phi\chi = 1$

10. $\varepsilon\phi\chi = 0$

11. $\varepsilon\phi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\sigma\phi\chi = 0$

13. $\sigma\phi\chi = 1$

14. $\sigma\phi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

15. $\eta\mu 2\chi = 1$

16. $\eta\mu(\chi + 1) = 0$

17. $\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

18. $\sigma\upsilon\nu(3\chi - 2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu(2\chi - 1)$

20. $\epsilon\phi 3\chi = 1$

21. $\epsilon\phi 2\chi = \epsilon\phi(\chi + 4)$

22. $\sigma\phi(3\chi + 7) = 0$

23. $\sigma\phi(7\chi - 9) = \sigma\phi\chi$

24. $\sigma\phi \frac{3\chi}{5} = 1$

Παρατήρηση:

Είναι φανερό, ότι, για να μπορέσουμε να λύσουμε μία βασική τριγωνομετρική εξίσωση, εκτός από τους τύπους που αναφέραμε θα πρέπει να γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των τόξων $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

2. Εξισώσεις της προηγούμενης μορφής που έχουν όμως ένα μείον (-) μπροστά από τον τριγωνομετρικό αριθμό.

Αν η εξίσωση είναι βασικής μορφής, αλλά, μπροστά από κάποιο τριγωνομετρικό αριθμό έχει ένα (-), θα πρέπει το (-) αυτό να ενσωματωθεί με τον τριγωνομετρικό αριθμό.

Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τους τύπους:

- $\eta\mu\chi = \eta\mu(-\chi)$

- $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \chi)$

- $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi(-\chi)$

- $\sigma\phi\chi = \sigma\phi(-\chi)$.

Κατόπιν, συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Παράδειγματα

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu 2\chi = -\eta\mu\chi$

Λύση:

$$\eta\mu 2\chi = -\eta\mu\chi \Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = \eta\mu(-\chi), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + (-\chi) \quad \text{ή} \quad 2\chi = (2\kappa + 1)\pi - (-\chi), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi/3 \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 3\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση:

$$\sigma\upsilon\nu 3\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3\chi = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6},$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3\chi = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 2\kappa\pi \pm (\pi + \frac{\pi}{6}), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 3\chi = 2\kappa\pi - \pi - \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \quad \text{ή} \quad \chi = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ασκήσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\eta\mu 5\chi = -\eta\mu 3\chi$

2. $\eta\mu \chi = -1$

3. $\eta\mu 2\chi = -\frac{1}{2}$

4. $\eta\mu \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\sigma\upsilon\nu 2\chi = -1$

6. $\sigma\upsilon\nu \chi = -\sigma\upsilon\nu(\chi + 2)$

7. $\sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = -\sigma\upsilon\nu \frac{3\chi}{2}$

8. $\epsilon\phi 6\chi = -\epsilon\phi \frac{x}{2}$

9. $\epsilon\phi 2\chi = -1$

10. $\epsilon\phi(\chi + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. $\epsilon\phi \chi = -\epsilon\phi(\pi - \chi)$

12. $\sigma\phi \chi = -\sigma\phi 4\chi$

13. $\sigma\phi 2\chi = -\sqrt{3}$

14. $\sigma\phi \frac{x}{6} = -1$

15. $\sigma\phi(\chi + 2\pi) = -\sigma\phi(2\chi - \pi)$

3. Εξισώσεις που αποτελούνται από ισότητα διαφορετικών τριγωνομετρικών αριθμών.

Αν η εξίσωση είναι βασικής μορφής, αλλά, αποτελείται από ισότητα δύο διαφορετικών τριγωνομετρικών αριθμών, μπορεί να τραπεί σε ισότητα ίδιων τριγωνομετρικών αριθμών με τη χρησιμοποίηση των τύπων:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(\pi/2 - \chi)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(\pi/2 - \chi)$$

$$\varepsilon\phi\chi = \sigma\phi(\pi/2 - \chi)$$

$$\sigma\phi\chi = \varepsilon\phi(\pi/2 - \chi)$$

Κατόπιν, συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Παραδείγματα

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$

Λύση:

$$\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = \eta\mu(\pi/2 - \chi), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + (\pi/2 - \chi) \quad \text{ή} \quad 2\chi = (2\kappa + 1)\pi - (\pi/2 - \chi), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 2\kappa\pi + \pi/2 \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi - \pi/2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi/3 + \pi/6 \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi - \pi/2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\varepsilon\phi 3\chi = \sigma\phi\chi$

Λύση:

$$\varepsilon\phi 3\chi = \sigma\phi\chi \Leftrightarrow \varepsilon\phi 3\chi = \varepsilon\phi(\pi/2 - \chi)$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = \kappa\pi + \pi/2 - \chi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4\chi = \kappa\pi + \pi/2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \chi = \kappa\pi/4 + \pi/8, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατήρηση:

Στα παραπάνω παραδείγματα, μετατρέψαμε τον τριγωνομετρικό αριθμό του δευτέρου

μέλους. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να μετατρέψουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό του πρώτου μέλους.

Ασκήσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\eta\mu 5\chi = \sigma\upsilon\nu 3\chi$

2. $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$

3. $\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu(\chi + \pi)$

4. $\eta\mu \frac{\chi}{2} = \sigma\upsilon\nu\chi$

5. $\sigma\upsilon\nu 2\chi = \eta\mu\chi$

6. $\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu 4\chi$

7. $\sin(\pi + \chi) = \eta\mu \frac{3\chi}{2}$

8. $\epsilon\phi 6\chi = \sigma\phi \frac{\chi}{2}$

9. $\epsilon\phi 2\chi = \sigma\phi \chi$

10. $\epsilon\phi(\chi + \frac{\pi}{2}) = \sigma\phi 3\chi$

11. $\epsilon\phi \chi = \sigma\phi(\pi - \chi)$

12. $\sigma\phi \chi = \epsilon\phi 10\chi$

13. $\sigma\phi 2\chi = \epsilon\phi(\pi/2 - 2\chi)$

14. $\sigma\phi \frac{\chi}{6} = \epsilon\phi \chi$

15. $\sigma\phi(\chi + 2\pi) = \epsilon\phi(2\chi - \pi)$

4. Συνδυασμός των προηγούμενων περιπτώσεων

Αν η εξίσωση είναι βασικής μορφής, αλλά, αποτελείται από συνδυασμό των προηγούμενων περιπτώσεων, τότε εργαζόμαστε βήμα - βήμα, τρέποντας την ισότητα σε απλούστερης μορφής όπως μάθαμε στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Παράδειγματα

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu 2\chi = -\sin \chi$

Λύση:

$$\eta\mu 2\chi = -\sin \chi \Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = \sin(\pi + \chi)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = \eta\mu[\pi/2 - (\pi + \chi)]$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = \eta\mu(\pi/2 - \pi - \chi)$$

$$\Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \pi/2 - \pi - \chi \quad \text{ή} \quad \chi = (2\kappa + 1)\pi - \pi/2 + \pi + \chi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \chi = \dots \quad \text{ή} \quad \chi = \dots$$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\epsilon\phi 3\chi = -\sigma\phi \chi$

Λύση:

$$\epsilon\phi 3\chi = -\sigma\phi \chi \Leftrightarrow \epsilon\phi 3\chi = \sigma\phi(-\chi)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi 3\chi = \epsilon\phi[\pi/2 - (-\chi)]$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = \kappa\pi + \pi/2 + \chi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2\chi = \kappa\pi + \pi/2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \chi = \kappa\pi/2 + \pi/4, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατήρηση:

Από τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε, ότι, δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία κάνουμε τις μετατροπές, δηλαδή την ενσωμάτωση του (-) και την αλλαγή του τριγωνομετρικού αριθμού.

Ασκήσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\eta\mu 5\chi = -\sigma\upsilon\nu 3\chi$
2. $\eta\mu\chi = -\sigma\upsilon\nu 4\chi$
3. $\eta\mu 2\chi = -\sigma\upsilon\nu(\chi + 3\pi)$
4. $\eta\mu \frac{\chi}{2} = -\sigma\upsilon\nu 2\chi$
5. $\sigma\upsilon\nu 2\chi = -\eta\mu 2\chi$
6. $\sigma\upsilon\nu\chi = -\eta\mu 3\chi$
7. $\sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = -\eta\mu \frac{3\chi}{2}$
8. $\epsilon\phi 6\chi = -\sigma\phi \frac{\chi}{2}$
9. $\epsilon\phi 2\chi = -\sigma\phi 3\chi$
10. $\epsilon\phi(\chi + \frac{\pi}{2}) = -\sigma\phi 3\chi$
11. $\epsilon\phi\chi = -\sigma\phi(\pi - 2\chi)$
12. $\sigma\phi\chi = -\epsilon\phi 110\chi$
13. $\sigma\phi 2\chi = -\epsilon\phi(\pi/2 - 7\chi)$
14. $\sigma\phi \frac{\chi}{6} = -\epsilon\phi 9\chi$
15. $\sigma\phi(\chi + 2\pi) = -\epsilon\phi(\chi - 7\pi)$

Συνδυαστικές ασκήσεις των παραπάνω περιπτώσεων

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- α) $\sqrt{3} - \epsilon\phi\chi = 0$
- β) $\sqrt{3} + \epsilon\phi\chi = 0$
- γ) $\epsilon\phi(\chi - \pi/3) + \epsilon\phi\chi = 0$
- δ) $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi = 0$
- ε) $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} = 0$
- στ) $\epsilon\phi\chi + \sigma\phi \frac{\chi}{2} = 0$
- ζ) $\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$
- η) $2 - \sigma\upsilon\nu\chi = 0$
- θ) $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0$
- ι) $\sqrt{3}\sigma\phi\chi = 0$
- ια) $\sqrt{6} + \sqrt{2}\epsilon\phi\chi = 0$
- ιβ) $\sqrt{3}\sigma\phi\chi + 1 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- α) $(1 + \eta\mu\chi)(2 + \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$
- β) $1 - \eta\mu^2\chi = 0$
- γ) $(3\epsilon\phi\chi + \sqrt{3})(1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi) = 0$
- δ) $(1 - \eta\mu^2\chi)(2 + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = 0$
- ε) $(1 + \sigma\upsilon\nu\chi)(\frac{1}{\eta\mu\chi} - 1) = 0$
- στ) $\frac{\eta\mu\chi - 1}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 0$

5. Λύση εξισώσεων σε διάστημα.

Αν μας ζητήσουν να λύσουμε μία εξίσωση σε συγκεκριμένο διάστημα, π.χ. $(0, \pi)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- α) Λύνουμε κανονικά την εξίσωση όπως έχουμε μάθει.
 β) Υποχρεώνουμε τις ρίζες να ανήκουν στο διάστημα που μας δίνουν στην εκφώνηση.
 γ) Από τις ανισώσεις που προκύπτουν βρίσκουμε τα διαστήματα που ανήκει το κ
 δ) Επειδή το κ είναι ακέραιος, είναι εύκολο να βρούμε τις τιμές του. (π.χ κ = 0, 1)
 ε) Κάθε τιμή του κ που βρίσκουμε, την αντικαθιστούμε στις ρίζες της εξίσωσης οπότε προκύπτουν οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα που θέλουμε.

Παραδείγματα

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\sin \chi = 0$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Λύση:

$$\begin{aligned}\sin \chi = 0 & \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{2} \\ & \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\alpha) \text{ Για } \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}: 0 < \chi < \pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 < 4\kappa\pi + \pi < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi < 4\kappa\pi < \pi$$

$$\Leftrightarrow -1/4 < \kappa < 1/4$$

Επειδή το κ πρέπει να είναι ακέραιος, θα πρέπει $\kappa = 0$.

$$\text{Για } \kappa = 0: \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

β) Για $\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$: ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

Ασκήσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις στα διαστήματα που ζητούνται.

- | | | |
|---|--|---|
| α) $\eta \mu \chi = 0$, στο $(0, \pi/2)$ | β) $2\eta \mu \chi = 1$, στο $[0, \pi]$ | γ) $\sin \chi = 1$, στο $(\pi/2, \pi)$ |
| δ) $2\eta \mu \chi + 1 = 0$, στο $(0, \pi]$ | ε) $2\sin \chi + 2 = 0$, στο $(\pi/2, \pi]$ | στ) $\epsilon \phi 2\chi = \sqrt{3}$ στο $(0, \pi)$ |
| ζ) $\eta \mu 3\chi(\sin \chi - 2) = 0$, στο $(0, \pi)$ | η) $2\eta \mu^2 \chi = 1$, στο $(0, \pi/2)$ | θ) $\sigma \phi 5\chi = 0$, στο $[0, \pi)$ |

