

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ σε σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$, (Μονάδες 13)

β) $AD < DB$. (Μονάδες 12)

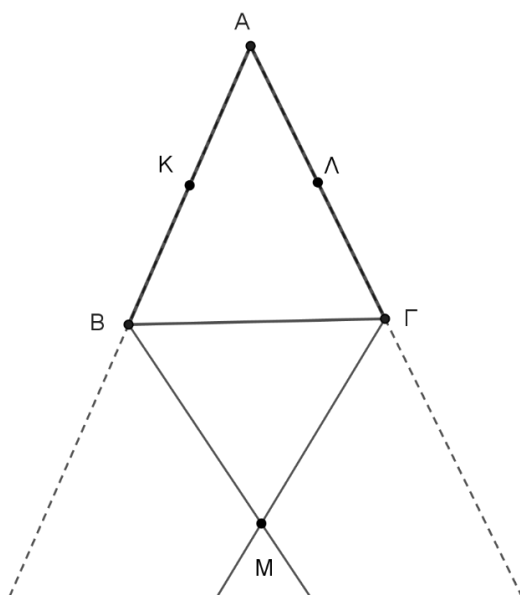
(2_34396)

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και τα σημεία K και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=M\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) $MK=ML$. (Μονάδες 13)



(2_34415)

3. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BD και GE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη BD και GE είναι ίσα. (Μονάδες 12)

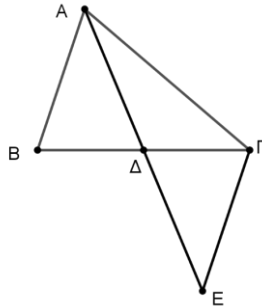
β) Αν τα ύψη BD και GE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma=AB$. (Μονάδες 13)

(2_34496)

4. Στο ακόλουθο σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE=AD$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB = GE$, (Μονάδες 12) β) $AE < AB + A\Gamma$. (Μονάδες 13)

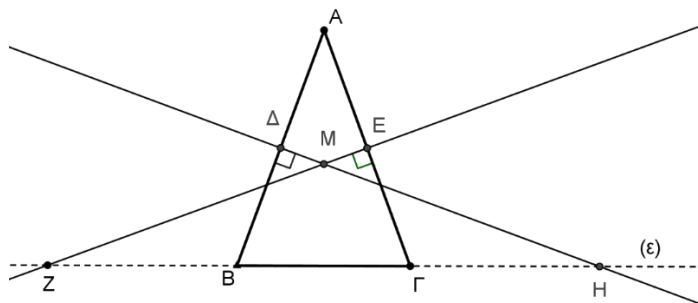


(2_34502)

5. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και τα μέσα Δ , E των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των πλευρών AB και $A\Gamma$ τέμνονται στο M και οι οποίες τέμνουν τον φορέα (ϵ) της βάσης $B\Gamma$ στα σημεία H και Z .

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και EZH . (Μονάδες 15)

- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



(2_34507)

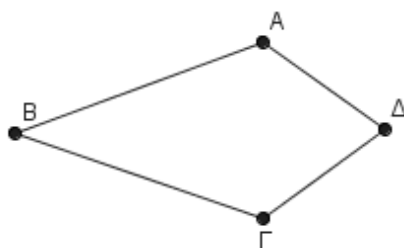
6. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}A}$, (Μονάδες 8)

- β) το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

- γ) η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)



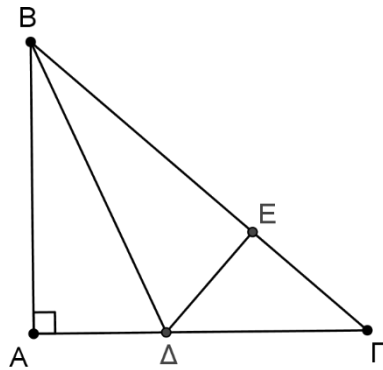
(2_34514)

7. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{B}$. Η BD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και η DE είναι κάθετη στην $B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$, (Μονάδες 8)

β) $AD < DG$, (Μονάδες 9)

γ) $AG > AB$. (Μονάδες 8)



(2_36168)

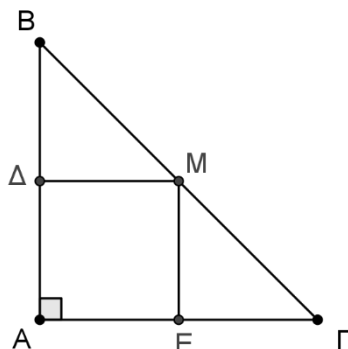
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $MD = ME$, τότε:

i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα, (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $MD = ME$. (Μονάδες 8)



(2_36331)

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στην πλευρά AB σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 2\Delta\Delta$, και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E , ώστε $E\Gamma = 2A\Gamma$. Το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Αν P το σημείο τομής των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\widehat{B\Gamma E}$ και $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

ii. Το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B\hat{P}\Gamma}$. (Μονάδες 7)

(3_12069)

10. Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ϵ) , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ϵ) . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ϵ) , δηλαδή η (ϵ) είναι μεσοκάθετος του AA' .

α) Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ϵ) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$. (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ϵ) .

(Μονάδες 6)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ϵ) , να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$ (Μονάδες 6)

ii. $KA + KB > AO + OB$ (Μονάδες 7)

(4_1749)

11. Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει. (Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή της** ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

(4_37094)

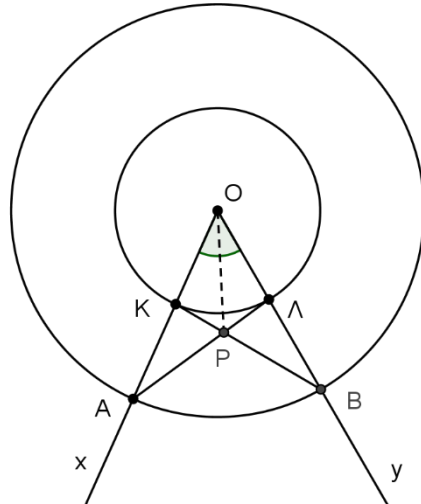
12. Δίνεται οξεία γωνία $\widehat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και στην Oy στα Λ, B αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι: α) $AL=BK$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK , (Μονάδες 8)

γ) η OP διχοτομεί την $\widehat{xOy}$.

(Μονάδες 9)



(4_37095)

13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στη πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στη πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$ (Μονάδες 8)

ii. $AK = A\Lambda$ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των $KZ, E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

(4_1875)