

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE \parallel A\Delta$.

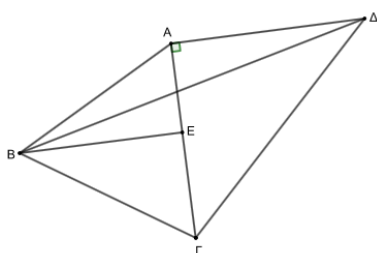
(Μονάδες 10)

β) οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.

(Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)



(2_12710)

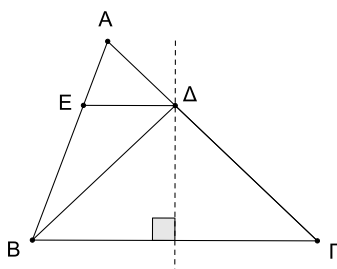
2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

(Μονάδες 13)



(2_13534)

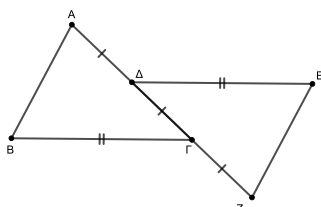
3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) $AB \parallel EZ$.

(Μονάδες 15)



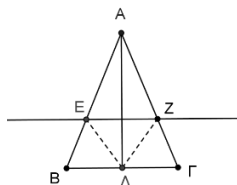
(2_13748)

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο AD και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



(2 34399)

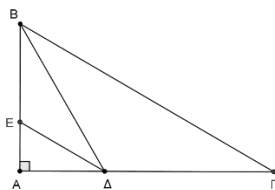
5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $\widehat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$, (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\widehat{A\Delta B} = 60^\circ$, τότε να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$. (Μονάδες 9)



(2_34776)

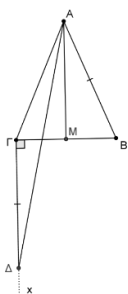
6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AM . Φέρουμε ημιευθεία $G\chi$ κάθετη στη $B\Gamma$, προς το ημιέπιπεδο που δεν ανήκει το A , και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $G\Delta = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\Gamma\hat{D}A}$, (Μονάδες 12)

β) ΓΔ // ΑΜ, (Μονάδες 6)

γ) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. (Μονάδες 7)



(2 34777)

7. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=AG$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABΓ και ADE είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) $ED \parallel BG$. (Μονάδες 13)

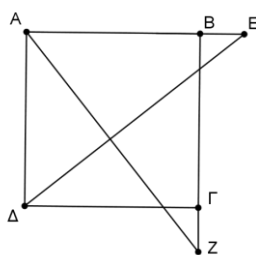
(2_34779)

8. Θεωρούμε τετράγωνο ABΓΔ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και BΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE=ΓZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{E\Delta\Gamma}$ και $\widehat{AZB}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



(2_36165)

9. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

α) Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την $A\hat{B}\psi$:

i. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\epsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

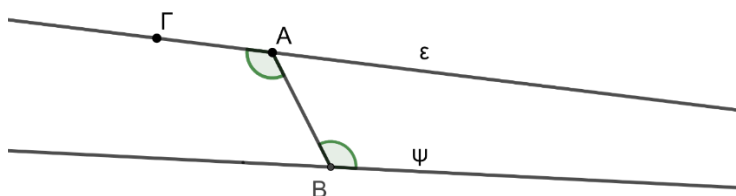
(Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

(Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

(Μονάδες 6)



(4_13822)

10. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}x$ και $A\hat{B}y$ τέμνονται σε σημείο M . (Μονάδες 6)

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB . (Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}x$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}y$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$. (Μονάδες 5)

(4_13843)

11. Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) (Μονάδες 9)

β) η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{M}x$ είναι κάθετη στη MO , (Μονάδες 9)

γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{M}x$. (Μονάδες 7)

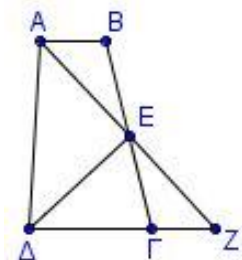
(4_34335)

12. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$. (Μονάδες 10)

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπέζιου. (Μονάδες 8)



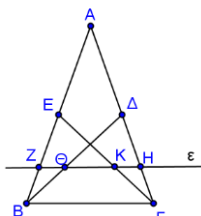
(4_1783)

13. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = \Gamma H$ (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) $ZK = H\Theta$. (Μονάδες 8)



(4_1744)

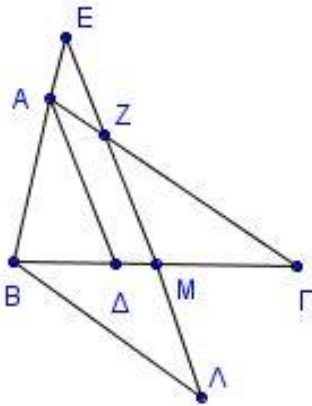
14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία ε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$.

Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma Z$. (Μονάδες 9)

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$. (Μονάδες 8)



(4_1818)