

ΘΕΜΑΤΑ ΡΙΖΕΣ

1. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$
- α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ (Μονάδες 13)
- (2_12943)
2. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$. (Μονάδες 13)
- (2_14599)
3. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.
- α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$. (Μονάδες 12)
- β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$. (Μονάδες 13)
- (2_14682)
4. α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ (Μονάδες 13)
- β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$. (Μονάδες 12)
- (2_14774)
5. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.
- α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$. (Μονάδες 15)
- β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$. (Μονάδες 10)
- (2_14452)
6. α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$. (Μονάδες 8)
- (2_14849)
7. α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$. (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)
- (2_15051)

8. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

(2_34152)

9. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

(2_34157)

10. Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(2_36778)

(Μονάδες 13)

11. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, B = (\sqrt[3]{3})^6, \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

(Μονάδες 12)

(2_37172)

12. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \sqrt{3} \cong 1,73, \sqrt{5} \cong 2,24, \sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$ (Μονάδες 13)

(2_37192)

13. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$. (Μονάδες 12)

(2_37197)

14. Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$. (Μονάδες 12)

(2_37198)

15. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι: $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$. (Μονάδες 12)

(2_37199)

16. Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$. (Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$. (Μονάδες 13)

(2_14750)

17. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$. (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B . (Μονάδες 10)

(3_34155)

18. Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$) (Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$. (Μονάδες 10)

(3_14805)

19. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 10)

(4_14931)