

Ενότητα 2.2

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ερωτήσεις θεωρίας:

1. Πως ορίζεται το έργο σταθερής δύναμης;

‘Το έργο μιας σταθερής δύναμης που έχει ίδια διεύθυνση και φορά της μετατόπισης ορίζεται με το γινόμενο της δύναμης F επί το μέτρο της παράλληλης μετατόπισης x ’.

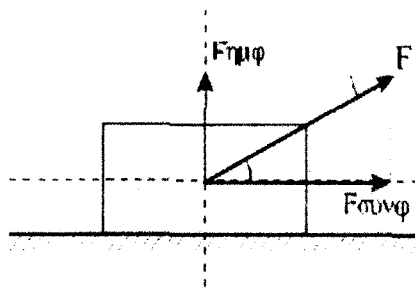
$$W = F \cdot x$$

2. Τι εκφράζει το έργο μιας δύναμης;

Το έργο μιας δύναμης εκφράζει την ενέργεια που προσφέρεται ή αφαιρείται στο σώμα μέσω της δύναμης. Εκφράζει επίσης τη μετατροπή ενέργειας από μια μορφή σε άλλη.

3. Πως ορίζεται το έργο σταθερής δύναμης στη γενική περίπτωση που η δύναμη F σχηματίζει γωνία ϕ με τη μετατόπιση;

Αν η F σχηματίζει γωνία ϕ με τη μετατόπιση x , αναλύουμε την F σε δύο συνιστώσες $F \sin \phi$, $F \cos \phi$ παράλληλη και κάθετη αντίστοιχα στη μετατόπιση. Η κάθετη δεν παράγει έργο, ενώ η παράλληλη παράγει έργο $F x \cos \phi$.



‘Ορίζουμε έργο W σταθερής δύναμης F που σχηματίζει γωνία ϕ με τη μετατόπιση το γινόμενο της παράλληλης συνιστώσας της δύναμης $F_x = F \cos \phi$, επί τη μετατόπιση x ’.

$$W = F_x \cdot x = F \cdot x \cdot \cos \phi$$

4. Ποτέ ένα έργο χαρακτηρίζεται παραγόμενο και ποτέ καταναλισκόμενο;

Παραγόμενο είναι το έργο όταν η συνιστώσα F_x της δύναμης F έχει ίδια φορά με τη μετατόπιση x δηλαδή όταν: $90^\circ > \phi > -90^\circ \Rightarrow \cos \phi > 0$. Το έργο τότε της δύναμης F είναι θετικό και η δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα.

Καταναλισκόμενο είναι το έργο όταν η συνιστώσα F_x της δύναμης F έχει αντίθετη φορά με τη μετατόπιση x δηλαδή όταν: $270^\circ > \phi > 90^\circ \Rightarrow \cos \phi < 0$. Το έργο τότε της δύναμης F είναι αρνητικό και η δύναμη αφαιρεί ενέργεια από το σώμα.

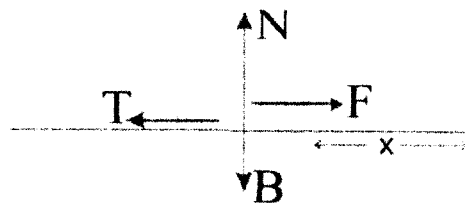
5. Πόσο είναι το έργο δύναμης που είναι μόνιμα κάθετη στη μετατόπιση;

Σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι: $W = Fx \sin 90^\circ = 0$. Συνεπώς το έργο δυνάμεων που είναι κάθετες στη μετατόπιση, όπως η κάθετη αντίδραση που ασκεί μία επιφάνεια είναι πάντα μηδέν, δηλαδή οι δυνάμεις αυτές δεν προσφέρουν ενέργεια στο σώμα, ούτε και αφαιρούν ενέργεια από αυτό.

6. Τι γνωρίζετε για το έργο της τριβής;

Επειδή η τριβή έχει μόνιμα αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, το έργο της θα είναι καταναλισκόμενο:

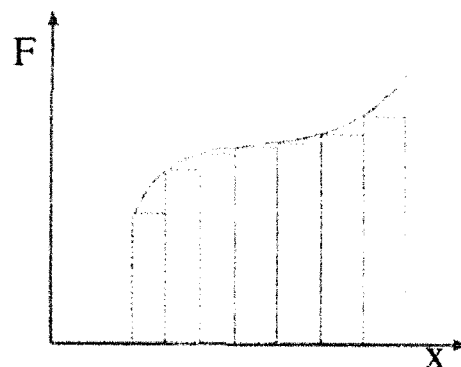
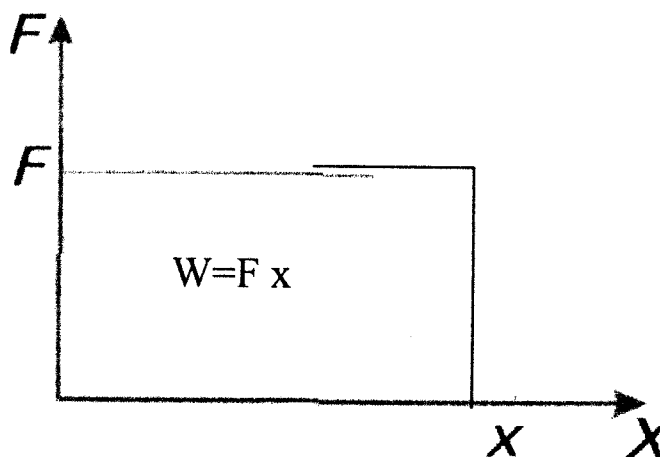
$$W_T = T_x \cdot x = T \sin 180^\circ \cdot x = -T \cdot x = -\mu \cdot N \cdot x$$



7. Τι παριστάνει το εμβαδά του διαγράμματος $F=f(x)$;

Το έργο σταθερής δύναμης παριστάνεται από το εμβαδόν του ορθογωνίου διαστάσεων F, x

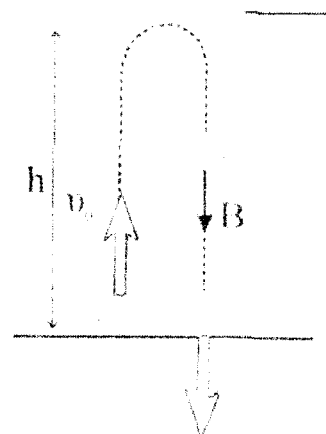
Στην περίπτωση που η δύναμη είναι μεταβλητή αν χωρίσουμε τη μετατόπιση σε στοιχειώδη έργα τότε και πάλι το συνολικό έργο της δύναμης θα είναι όσο το συνολικό εμβαδόν.



8. Πως υπολογίζουμε το έργο του βάρους στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω;

Κατά την άνοδο του σώματος το έργο του βάρους είναι καταναλισκόμενο και είναι:

$W_B = -Bh = -mgh$ ενώ κατά την κάθοδο του σώματος το έργο είναι παραγόμενο: $W_B = Bh = mgh$



9. Πώς ορίζεται η κινητική ενέργεια ενός σώματος;

Είναι το μονόμετρο μέγεθος που ορίζεται με το γινόμενο ένα δεύτερο της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της στιγμιαίας ταχύτητας του προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

10. Δείξτε ότι ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση τότε το έργο του βάρους ισούται με την κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα.

Το βάρος B προκαλεί επιτάχυνση g . Η ταχύτητα που αποκτά το σώμα υπολογίζεται από τη σχέση $v=gt$ και η μετατόπιση από τη $h=1/2 g t^2$. Το έργο του βάρους θα είναι:

$$W = mgx = mg \frac{1}{2} gt^2 = mg \frac{1}{2} g \left(\frac{v}{g} \right)^2 = mg \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} mv^2 = K$$

11. Ποιο είναι το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

‘Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του.’

$$\Delta K = \sum W \Leftrightarrow K_2 - K_1 = W_1 + W_2 + \dots$$

12. Πότε λέμε ότι ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων έχει δυναμική ενέργεια;

‘Λέμε ότι ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων έχει δυναμική ενέργεια όταν έχει τη δυνατότητα παραγωγής έργου λόγω της θέσης ή κατάστασης στην οποία βρίσκεται.’

13. Πώς ορίζεται η δυναμική ενέργεια σώματος λόγω του βάρους του;

Θεωρούμε σώμα το οποίο βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Θεωρούμε ακόμη οριζόντια επιφάνεια. Τότε η δυναμική ενέργεια που έχει το σώμα ως προς την οριζόντια επιφάνεια δίνεται από το γινόμενο $U = m g h$ όπου h είναι η κατακόρυφη απόσταση του σώματος από την οριζόντια επιφάνεια. Η δυναμική ενέργεια είναι θετική αν το σώμα βρίσκεται ψηλότερα και αρνητική αν βρίσκεται χαμηλότερα από την επιφάνεια.

14. Ποια η σχέση μεταξύ έργου του βάρους και μεταβολής της δυναμικής ενέργειας;

Έστω ότι ένα σώμα κινείται μεταξύ δύο θέσεων z_1 και z_2 που απέχουν κατακόρυφη απόσταση $z_1 - z_2$. Αν η μετατόπιση είναι σχετικά μικρή και κατά συνέπεια η μεταβολή του βάρους $m g$ είναι αμελητέα, τότε το έργο του βάρους είναι:

$$W_{B(1 \rightarrow 2)} = mg(z_1 - z_2) = mgz_1 - mgz_2 = U_1 - U_2$$

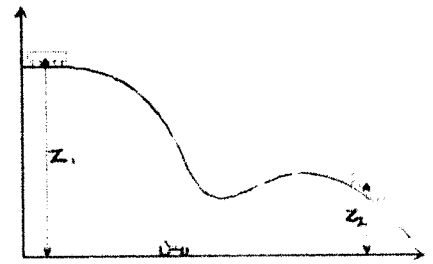
Όταν το σώμα κινείται προς το έδαφος η δυναμική του ενέργεια ελαττώνεται άρα είναι:

$U_1 - U_2 > 0$ και συνεπώς $W_{B(1 \rightarrow 2)} > 0$. Τότε έχουμε

θετικό έργο του βάρους δηλαδή παραγόμενο. Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε $U_1 - U_2 < 0$ και συνεπώς

$W_{B(1 \rightarrow 2)} < 0$. Το έργο τότε είναι καταναλισκόμενο. Γενικότερα έχουμε:

$$W_B = U_1 - U_2 = -\Delta U$$



15. Ποιες δυνάμεις χαρακτηρίζονται διατηρητικές-συντηρητικές;

‘Είναι οι δυνάμεις, των οποίων το έργο σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν’. Το έργο που παράγουν οι δυνάμεις αυτές, εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος.

16. Ποιες είναι οι ιδιότητες των συντηρητικών δυνάμεων;

1. Διατηρούν τη μηχανική ενέργεια των σωμάτων στα οποία εφαρμόζονται.
2. Το έργο τους κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.
3. Το έργο τους εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος και όχι από το είδος της διαδρομής.

17. Ποιο σύστημα ονομάζεται διατηρητικό ή συντηρητικό;

Είναι το κλειστό σύστημα στο οποίο εμφανίζονται μόνο εσωτερικές δυνάμεις διατηρητικές, δηλαδή δεν εμφανίζονται δυνάμεις σαν την τριβή ή την αντίσταση του αέρα, ούτε παρεμβάσεις που θα μπορούσαν να προέρχονται από ανθρώπους ή από μηχανές. Στα συστήματα αυτά η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

18. Πως υπολογίζουμε το έργο που παράγει μία συντηρητική δύναμη για μετακίνηση μεταξύ των θέσεων 1 και 2;

Γενικότερα για οποιαδήποτε συντηρητική δύναμη έχουμε: $W_{\text{συντ}} = U_1 - U_2 = -\Delta U$

19. Δείξτε ότι το βάρος είναι συντηρητική δύναμη.

Εάν ένα σώμα μετακινηθεί κατακόρυφα προς τα κάτω κατά h , τότε το έργο του βάρους είναι θετικό (παραγόμενο) και ίσο με $W = mgh$

Εάν ένα σώμα μετακινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω κατά h , τότε το έργο του βάρους είναι αρνητικό (καταναλισκόμενο) και ίσο με $W = -mgh$. Έτσι σε μια κλειστή διαδρομή το συνολικό έργο θα είναι: $mgh + (-mgh) = 0$

20. Ποιο είναι το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας;

Στα συστήματα στα οποία εκτελείται έργο μόνο από τις διατηρητικές δυνάμεις που εκφράζουν την εσωτερική αλληλεπίδραση, το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό. $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

21. Πως εφαρμόζεται η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην ελεύθερη πτώση;

$$E_{\mu 1} = E_{\mu 2} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

22. Πως αποδεικνύεται το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας;

Θεωρούμε ένα σώμα στο οποίο ασκείται μία συντηρητική δύναμη. Το έργο της συντηρητικής δύναμης θα είναι $W = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε: $K_2 - K_1 = W \Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

Επίσης από τη σχέση $K_2 - K_1 = -\Delta U$ άρα είναι $\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$. Η σχέση αυτή σημαίνει ότι το σύνολο των μεταβολών κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν.

23. Πως ορίζεται η ισχύς μίας μηχανής;

Είναι το πηλίκο του έργου που παράγει η μηχανή σε ορισμένο χρόνο προς το χρόνο αυτό.

$$P = \frac{W}{t}$$

Ισχύς είναι δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται έργο.

Μονάδα ισχύος είναι το ένα **Watt** (1W), 1 Joule/sec.

Ωφέλιμη χαρακτηρίζεται η ισχύς που μας δίνει μια μηχανή.

Καταναλισκόμενη χαρακτηρίζεται η ισχύς με την οποία τροφοδοτούμε μια μηχανή.

24. Δείξτε ότι η ισχύς μιας μηχανής δίνεται και από τη σχέση $P=Fv$

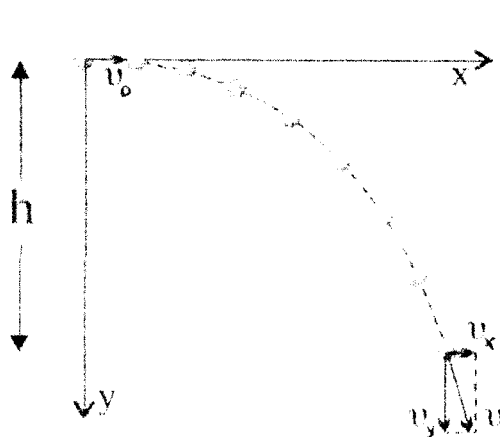
Θεωρούμε μια μηχανή που ασκεί δύναμη F παράλληλα στη μετατόπιση x που προκαλεί στο σώμα

μέσα σε χρόνο t . Τότε η ισχύς θα είναι: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot x}{t} = F \cdot \frac{x}{t} = F \cdot v \Rightarrow \boxed{P = F \cdot v}$

25. Υπολογίστε την ταχύτητα πτώσεως στην οριζόντια βολή, χρησιμοποιώντας α) τις εξισώσεις κίνησης και β) την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

α) Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης εργαζόμαστε ως εξής:

Υπολογίζουμε αρχικά τον χρόνο πτώσεως. Θέτουμε στην εξίσωση $y = \frac{1}{2}gt^2$ όπου y το



ύψος h και έχουμε:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1)$$

Υπολογίζουμε κατόπιν την κατακόρυφη ταχύτητα πτώσεως:

$$v_y = gt \xrightarrow{(1)} v_y = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τη συνισταμένη ταχύτητα πτώσεως:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \xrightarrow{(2)} v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

β) Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$K + U = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v_0^2 + 2gh = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

26. Πότε η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων δεν διατηρείται;

Η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται, όταν σε κάποιο σώμα του συστήματος ασκούνται μη συντηρητικές δυνάμεις.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης που μειώνει τη μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι η τριβή.

$$W_T = -T \cdot x$$

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η πλαστική κρούση.

Υπάρχουν και περιπτώσεις που η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος αυξάνεται λόγω της παρέμβασης δύναμης η οποία προσφέρει ενέργεια στο σύστημα.

27. Εφαρμογές:

α. Πως υπολογίζουμε το έργο του βάρους σώματος που κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο;

Αναλύουμε το βάρος σε συνιστώσες $B_x = mg\eta\mu\phi$ και $B_y = mg\sigma\upsilon\nu\phi$. Από αυτές έργο παράγει μόνο η B_x , γιατί η B_y είναι κάθετη στη μετατόπιση.

Το έργο αυτό για την άνοδο είναι καταναλισκόμενο: $W_B = -B_x \cdot x = -mg \cdot \eta\mu\phi \cdot x$

Για την κάθοδο θα είναι παραγόμενο: $W_B = B_x \cdot x = mg \cdot \eta\mu\phi \cdot x$

β. Πόσο είναι το έργο της κεντρομόλου δυνάμεως;

Για να κινηθεί ένα σώμα σε κυκλική τροχιά, πρέπει απαραίτητα να ασκείται κεντρομόλος δύναμη, η οποία έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και συνεπώς είναι διαρκώς κάθετη στη διεύθυνση της

κίνησης. Η κεντρομόλος αυτή δύναμη έχει μηδενικό έργο συνεπώς δεν χρειάζεται μεταβίβαση ενέργειας για να «στρίψει» ένα σώμα που κινείται.

γ. Δείξτε ότι αν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα ασκηθεί δύναμη F τότε το έργο της δύναμης αυτής ισούται με την κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα.

Έστω ότι μία δύναμη F ασκείται σε ένα σώμα για χρονικό διάστημα t . Η δύναμη F προκαλεί επιτάχυνση που υπολογίζεται από τη σχέση $F=ma$. Η ταχύτητα που αποκτά το σώμα υπολογίζεται από τη σχέση $v=at$ και η μετατόπιση από τη $x=(1/2)at^2$. Το έργο της δύναμης F θα είναι:

$$W = F \cdot x = F \cdot \frac{1}{2}at^2 = F \cdot \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = F \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{1}{2}mv^2 = K$$

δ. Δείξτε ότι σε κάθε μετατόπιση το ολικό έργο των δυνάμεων που ασκήθηκαν σε ένα σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος. (Απόδειξη του Θ.Μ.Κ.Ε. - θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας)

Θεωρούμε την περίπτωση ενός σώματος που κινείται με αρχική ταχύτητα v_0 ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς και παράλληλα στη v_0 , ασκείται σταθερή δύναμη F που επιταχύνει το σώμα με σταθερή επιτάχυνση a σύμφωνα με τη σχέση $F=ma$. Από την εξίσωση της ταχύτητας

$$v = v_0 + at \text{ λύνουμε ως προς το χρόνο } t \text{ και έχουμε: } t = \frac{v - v_0}{a}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της μετατόπισης $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2} = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} \\ &= \frac{2v_0 v - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 + v_0^2}{2a} \Rightarrow x = \frac{v^2 + v_0^2}{2a} \quad (1) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του έργου έχουμε:

$$W = F \cdot x \xrightarrow{(1)} W = F \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = ma \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = K_2 - K_1$$

Έτσι το προσφερόμενο από τη δύναμη έργο είναι ίσο με την αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος.

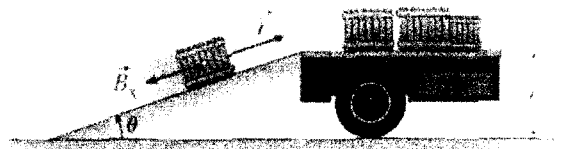
Ερωτήσεις:**Έργο δύναμης:**

1. i) Να περιγράψετε τρία φαινόμενα κατά τα οποία ασκείται μία δύναμη σε ένα σώμα αλλά το έργο της είναι μηδέν.

ii) Σπρώχνουμε ένα σώμα πάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο. Τι εκφράζει το έργο κάθε δύναμης που ασκείται στο σώμα;

2. Το έργο μιας δύναμης εκφράζει ποσότητα μεταβιβαζόμενης ενέργειας. Αν το έργο είναι θετικό, ποιος μεταβιβάζει ενέργεια και σε ποιόν την μεταβιβάζει; Τι συμβαίνει αν το έργο της δύναμης είναι αρνητικό;

3. Για να φορτώσουμε ένα βαρύ σώμα σε ένα φορτηγό, χρησιμοποιούμε ράμπα, όπως στο διπλανό σχήμα. Αυτό το κάνουμε γιατί έτσι απαιτείται λιγότερη ενέργεια απ' ό,τι αν σηκώναμε το σώμα κατακόρυφα ή για κάποιον άλλο λόγο;



4. Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι αρνητικό επειδή:

- i) η γωνία μεταξύ της τριβής T και της μετατόπισης είναι 180° ,
- ii) το συνφ στον τύπο του έργου $W_T = T x \text{ συνφ}$ είναι ίσο με -1 ,
- iii) κάθε στιγμή η τριβή έχει φορά αντίθετη από εκείνη της ταχύτητας,
- iv) ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι καθαρός αριθμός.

Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές;

5. Το έργο μίας από τις δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα σώμα:

- i) είναι μηδέν όταν το σώμα είναι ακίνητο,
- ii) έχει πρόσημο το οποίο εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζουν τα μεγέθη δύναμη και επιτάχυνση του σώματος,
- iii) έχει πρόσημο που εξαρτάται από τη γωνία μεταξύ της δύναμης και της μετατόπισης,
- iv) είναι πάντοτε θετικό, γιατί το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος.

Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

6. Το έργο μιας δύναμης, από τις πολλές ενδεχομένως που ασκούνται σ' ένα σώμα, είναι μηδέν όταν:

- i) η κίνηση του σώματος είναι οριζόντια και δύναμη κατακόρυφη,
- ii) η κίνηση του σώματος είναι κατακόρυφη και η δύναμη οριζόντια,
- iii) η κίνηση του σώματος είναι οριζόντια και η δύναμη οριζόντια, αλλά κάθετη στην ταχύτητα του σώματος,
- iv) η κίνηση του σώματος είναι οριζόντια και η δύναμη οριζόντια ίδιας διεύθυνσης με την ταχύτητα.

Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές;

Δυναμική ενέργεια – συντηρητικές δυνάμεις:

7. Μια δύναμη λέμε ότι είναι συντηρητική όταν:

- i) ικανοποιεί τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής ($F = ma$),
- ii) ικανοποιεί τον νόμο δράσης - αντίδρασης,
- iii) το έργο της σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν,
- iv) το έργο της για δεδομένη αρχική και τελική θέση είναι ανεξάρτητο της διαδρομής του σώματος.

Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές;

8. Ένα σώμα διαγράφει κλειστή διαδρομή υπό την επίδραση του βάρους του και μιας άγνωστης δύναμης. Αν κατά την επιστροφή του σώματος στην αρχική του θέση διαπιστώνεται αύξηση του μέτρου της ταχύτητας του, τότε η άγνωστη δύναμη:

- i) είναι συντηρητική,
- ii) είναι μη συντηρητική,
- iii) είναι συνεχώς κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης,
- iv) αφαιρεί ενέργεια από το σώμα.

Ποια από τις προτάσεις αυτές είναι σωστή;

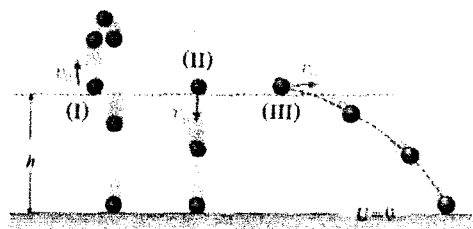
9. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

- i) Η δυναμική ενέργεια είναι ανεξάρτητη της κινητικής κατάστασης του σώματος και εξαρτάται μόνο από τη θέση του σώματος.
- ii) Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται με συντηρητικές δυνάμεις.
- iii) Σε κάθε είδος συντηρητικής δύναμης αντιστοιχεί ένα είδος δυναμικής ενέργειας.

iv) Η δυναμική ενέργεια έχει σχέση και με μη συντηρητικές δυνάμεις.

Μηχανική ενέργεια:

10. Αν παραλείψουμε τις αντιστάσεις του αέρα, ποια από τις τρεις σφαίρες του σχήματος θα φτάσει με μεγαλύτερη ταχύτητα στο έδαφος;



11. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές;

- i) Το θεώρημα της κινητικής ενέργειας και η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας δεν ισχύουν στην περίπτωση μη συντηρητικών δυνάμεων.
- ii) Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων είναι μηδέν.
- iii) Αν ένα σώμα αφεθεί να κινηθεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο μόνο με την επίδραση του βάρους του, τότε το έργο του βάρους είναι ίσο με την ελάττωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος, η οποία είναι ισόποση με την αύξηση της κινητικής του ενέργειας.
- iv) Το έργο του βάρους ενός υποβρυχίου καθώς αυτό βυθίζεται κατακόρυφα είναι μηδέν.
- v) Το θεώρημα της κινητικής ενέργειας είναι ένας διαφορετικός τρόπος διατύπωσης της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

12. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές

- i) Για να έχουμε κινητική ενέργεια, πρέπει να υπάρχει κίνηση ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.
- ii) Ένα σώμα έχει κινητική ενέργεια μόνο όταν ασκούνται σ' αυτό δυνάμεις,
- iii) Η δύναμη της τριβής είναι μη συντηρητική.
- iv) Οι δυνάμεις της παγκόσμιας έλξης είναι συντηρητικές

13. Στη διάρκεια της κίνησης ενός σώματος διαπιστώθηκε ότι η μηχανική του ενέργεια είναι σταθερή, ενώ μειώθηκε η δυναμική του ενέργεια. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

- i) Το ολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται το σώμα είναι μηδέν.
- ii) Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι διάφορο από το μηδέν.

iii) Το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι διάφορο από το μηδέν.

iv) Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι αντίθετο από το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνταν σ' αυτό.

Να αναφέρετε ένα παράδειγμα.

Τριβή και μηχανική ενέργεια:

14. i) Όταν ανεβαίνει κάποιος με τα πόδια στον τρίτο όροφο, η μηχανική του ενέργεια αυξάνεται. Από πού προέρχεται αυτή η αύξηση;

ii) Σ' έναν αλεξιπτωτιστή που πέφτει με τη βοήθεια αλεξίπτωτου μειώνεται ή αυξάνεται η μηχανική του ενέργεια;

15. i) Μπορεί να έχουμε για ένα σύστημα διατήρηση της ορμής κι όμως να μην διατηρείται η μηχανική του ενέργεια; Να αναφέρετε ένα παράδειγμα.

ii) Μπορεί σ' ένα σύστημα ν' ασκείται δύναμη τριβής και όμως η μηχανική του ενέργεια ν' αυξάνεται;

16. Ένα σώμα, έχοντας αρχική ταχύτητα, κατεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Αν η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλή, ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

i) Αν δεν δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα, αυτό θα παρέμενε ακίνητο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

ii) Καθώς το σώμα κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, διατηρεί σταθερή τη μηχανική του ενέργεια.

iii) Η θερμότητα που παράγεται καθώς το σώμα κατεβαίνει είναι ίση κατά μέτρο με το έργο του βάρους του.

iv) Αν το ίδιο σώμα το ρίχναμε με αρχική ταχύτητα προς τα πάνω κατά μήκος του ίδιου κεκλιμένου επιπέδου, θα επέστρεφε και πάλι στο σημείο βολής με μικρότερη ταχύτητα.

17. Εργάτης σπρώχνει ένα σώμα από τη βάση ενός μη λείου κεκλιμένου επιπέδου προς τα πάνω, με αποτέλεσμα ν' αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος. Η χημική ενέργεια που ξοδεύει ο εργάτης μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε:

i) κινητική ενέργεια του σώματος,

- ii) δυναμική ενέργεια του σώματος,
- iii) θερμική ενέργεια,
- iv) κινητική και δυναμική ενέργεια στο σώμα και σε θερμική ενέργεια στο σώμα και στο περιβάλλον.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Ισχύς:

18. Για μια πραγματική μηχανή που βρίσκεται σε λειτουργία ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

- i) Η προσφερόμενη σ' αυτήν ισχύς είναι μεγαλύτερη από την ισχύ που η μηχανή αποδίδει.
- ii) Η προσφερόμενη σ' αυτήν ισχύς είναι μικρότερη από την ισχύ που η μηχανή αποδίδει.
- iii) Η προσφερόμενη σ' αυτήν ισχύς είναι ίση με την ισχύ που η μηχανή αποδίδει.
- iv) Η ενέργεια που «χάνεται» είναι πάντα μεγαλύτερη από την ενέργεια που η μηχανή αποδίδει.

19. Γερανός ανυψώνει κατακόρυφα σώμα βάρους $B=1000\text{ N}$ με σταθερή ταχύτητα $v=2\text{ m/s}$. Πόση είναι η ωφέλιμη ισχύς που αποδίδει ο γερανός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- i) 500 W ii) 2000 W
- iii) 2 W iv) 4000 W

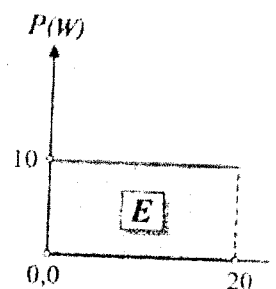
20. Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής είναι 0,6. Αυτό σημαίνει ότι:

- i) η ωφέλιμη ισχύς είναι το 40% της δαπανώμενης,
- ii) η ισχύς που χάνεται είναι το 60% της δαπανώμενης,
- iii) η προσφερόμενη από τη μηχανή ενέργεια είναι το 40% της δαπανώμενης,
- iv) η ωφέλιμη ισχύς είναι το 60% της δαπανώμενης.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

21. Για μια μηχανή η αποδιδόμενη (ωφέλιμη) ισχύς μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές:

- i) Η στιγμιαία ισχύς της μηχανής είναι σταθερή και ίση με τη μέση ισχύ της.
- ii) Το εμβαδόν E είναι αριθμητικά ίσο με τη δύναμη της μηχανής.
- iii) Η ωφέλιμη ενέργεια που αποδίδει η μηχανή μέσα σε χρόνο 20 s είναι 200 J .



iv) Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι: $\alpha = \frac{P}{t} = \frac{10}{20} = 0,5$

Ασκήσεις:

Έργο δύναμης:

1. Σε σώμα που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη $F = 20 \text{ N}$. Να βρείτε: i) το έργο της δύναμης F για μετατόπιση του σώματος κατά $\Delta x = 10 \text{ m}$, ii) την ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα.

2. Σ' ένα σώμα ασκείται δύναμη $F = 10^{-3} \text{ N}$ και αυτό μετατοπίζεται στη διεύθυνση της δύναμης κατά $\Delta x = 1 \text{ mm}$. Να βρείτε:

i) το έργο της δύναμης F ,

ii) την ενέργεια που κερδίζει το σώμα.

3. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε οριζόντιο δρόμο. Στο σώμα, εκτός των άλλων δυνάμεων, ασκείται και η δύναμη $F = 20 \text{ N}$. Για μετατόπιση του σώματος κατά $\Delta x = 1 \text{ m}$ να βρείτε το έργο της δύναμης F όταν η γωνία που σχηματίζει η F με τη Δx είναι: i) 0° ii) 60° iii) 90° iv) 120° v) 180°

4. Αν στο παράδειγμα του σχήματος είναι

$F_1 = 20 \text{ N}$, $F_2 = 5 \text{ N}$ και $\varphi = 30^\circ$, να βρείτε για

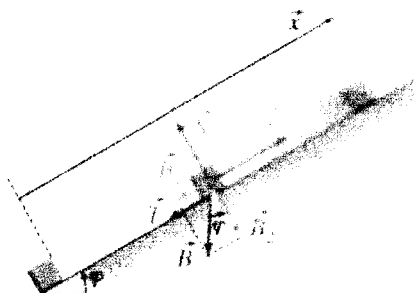
μετατόπιση του σώματος κατά $x = 5 \text{ m}$:

i) το έργο κάθε δύναμης,

ii) εάν το σώμα κερδίζει ή χάνει ενέργεια.



5. Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ κινείται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$ με τη βοήθεια της δύναμης $F = 50 \text{ N}$, που έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου



είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ να βρείτε για μετατόπιση του σώματος κατά $x = 2 \text{ m}$:

i) το έργο της F και το έργο του βάρους B .

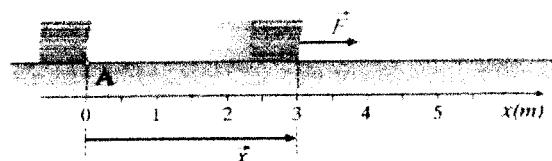
ii) το έργο της τριβής T .

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

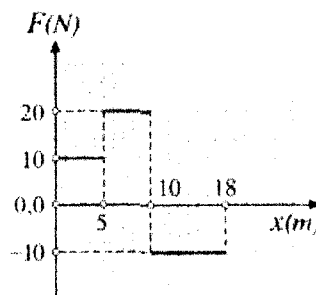
6. Το μέτρο της δύναμης F που ασκείται στο σώμα του σχήματος μεταβάλλεται με τη μετατόπιση του σώματος από το Α σύμφωνα με τη σχέση $F = 10x$ (F σε N, x σε m). Να βρείτε το έργο της F όταν το σώμα πάει:

i) από τη θέση $x = 0$ στη θέση $x = 3 \text{ m}$,

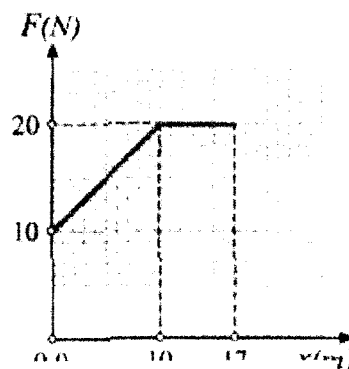
ii) από τη θέση $x = 1 \text{ m}$ στη θέση $x = 5 \text{ m}$.



7. Σώμα μάζας m αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη θέση $x_0 = 0$. Στο σώμα αρχίζει να ασκείται οριζόντια δύναμη F της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση $x_0 = 0$ όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Να βρείτε το έργο της δύναμης F για μετατόπιση του σώματος από τη θέση $x_0 = 0$ έως τη θέση $x = 18 \text{ m}$.



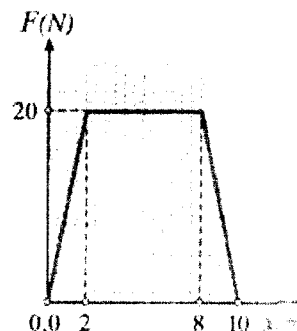
8. Σώμα αρχικά ηρεμεί στη θέση $x_0 = 0$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα αρχίζει να ασκείται οριζόντια δύναμη F , της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με τη θέση του σώματος όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Να βρείτε το έργο της δύναμης για μετατόπιση του σώματος από την αρχική του θέση κατά $\Delta x = 17 \text{ m}$.



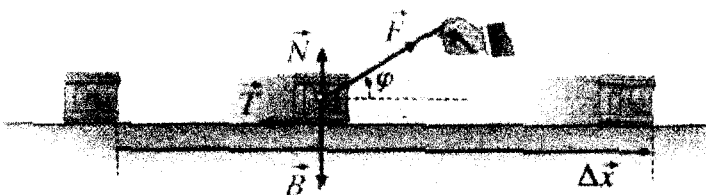
9. Σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_0 . Τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ αρχίζει να δέχεται οριζόντια δύναμη F ίδιας κατεύθυνσης με τη v_0 , το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση x_0 όπως φαίνεται στο διάγραμμα,

i) Να περιγράψετε αναλυτικά το είδος της κίνησης του σώματος.

ii) Να βρείτε το έργο της δύναμης F για μετατόπιση του σώματος από τη θέση $x_0 = 0$ έως τη θέση $x = 10 \text{ m}$.



10. Κιβώτιο μάζας $m = 5 \text{ kg}$ αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Άνθρωπος ασκεί στο κιβώτιο σταθερή δύναμη $F = 25 \text{ N}$, σε διεύθυνση που σχηματίζει με το δάπεδο γωνία φ προς τα πάνω με $\eta\mu\varphi = 4/5$. Το

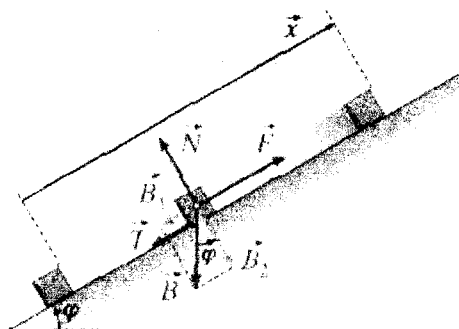


κιβώτιο παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Για χρονική διάρκεια κίνησης $\Delta t = 10 \text{ s}$. Να υπολογίσετε:

- την επιτάχυνση του κιβωτίου,
- το έργο της συνισταμένης δύναμης,
- το ποσό της ενέργειας που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στο κιβώτιο,
- το ποσοστό αυτής της ενέργειας που έγινε θερμότητα λόγω τριβών.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

11. Το σώμα του σχήματος, μάζας $m = 10 \text{ kg}$ ανεβάζουμε με σταθερή ταχύτητα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και



επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε:

- τη δύναμη F ,
- τη μεταβιβαζόμενη στο σώμα ποσότητα ενέργειας μέσω της δύναμης F για μετατόπιση του σώματος κατά $x = 4 \text{ m}$.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Θεώρημα της κινητικής ενέργειας:

12. Ένα σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F . Το σώμα στη θέση Α έχει κινητική ενέργεια $K_{(A)} = 5 \text{ J}$ και στη θέση Γ έχει κινητική ενέργεια $K_{(Γ)} = 15 \text{ J}$. Να βρείτε:

- τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος,
- το έργο της δύναμης F στη διαδρομή Α \rightarrow Γ.

13. Όχημα μάζας $m = 200 \text{ kg}$ κινείται σε οριζόντιο δρόμο. Σε μια θέση Α το όχημα έχει ταχύτητα $v_A = 10 \text{ m/s}$ και σε μια άλλη θέση Γ η ταχύτητα του γίνεται $v_\Gamma = 20 \text{ m/s}$. Να βρείτε:

- την κινητική ενέργεια του οχήματος στις θέσεις Α και Γ,
- το έργο της συνισταμένης δύναμης στη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$.

14. Σώμα μάζας $m = 8 \text{ kg}$ ρίχνεται οριζόντια σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Αν η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η τριβή, να βρείτε το έργο της για μετατόπιση του σώματος από την αρχική του θέση έως τη θέση όπου η ταχύτητα:

- γίνεται $v = 5 \text{ m/s}$,
- μηδενίζεται.

15. Ένα έλκηθρο μάζας $m = 20 \text{ kg}$ αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο χιονισμένο δρόμο. Τάρανδος αρχίζει ν' ασκεί στο έλκηθρο οριζόντια δύναμη $F = 150 \text{ N}$, οπότε το έλκηθρο μετά από μετατόπιση κατά $\Delta x = 20 \text{ m}$ αποκτά ταχύτητα $v = 10 \text{ m/s}$.

- Να βρείτε την τελική κινητική ενέργεια του έλκηθρου και το έργο της δύναμης F . Τι εκφράζει η διαφορά τους;
- Αν υπάρχει τριβή, να βρείτε το μέτρο της.

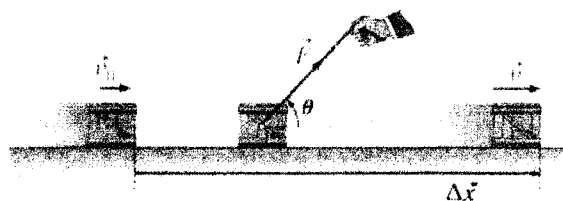
16. Αλεξιπτωτιστής μάζας $m = 70 \text{ kg}$ πέφτει χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος $h = 100 \text{ m}$ και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$.

- Να υπολογίσετε το έργο του βάρους και την τελική κινητική ενέργεια του αλεξιπτωτιστή. Γιατί πιστεύετε ότι δεν ισχύει $W_B = \Delta K$;
- Να βρείτε το έργο της αντίστασης του αέρα κατά την πτώση του αλεξιπτωτιστή.
- Τι εκφράζει το έργο της αντίστασης του αέρα; Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

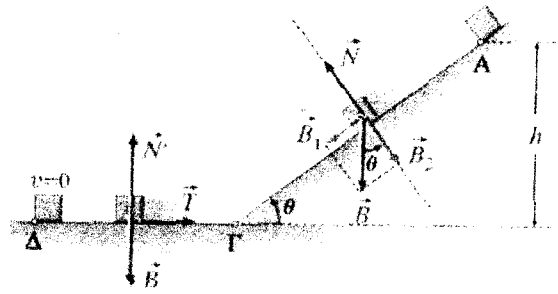
17. Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_0 = 6 \text{ m/s}$. Κάποια στιγμή το σώμα αρχίζει να δέχεται δύναμη $F = 16 \text{ N}$, που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\theta = 60^\circ$.

Να βρείτε για μετατόπιση του σώματος από τη θέση όπου άρχισε ν' ασκείται η δύναμη F κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$:

- το έργο της δύναμης F ,
- τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος,
- την τελική ταχύτητα του σώματος.



18. Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ αφήνεται να ολισθήσει από τη θέση A, που βρίσκεται σε ύψος $h = 10 \text{ m}$, κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\theta = 30^\circ$. Το σώμα, περνώντας από το Γ, συνεχίζει την κίνηση του στο οριζόντιο επίπεδο.



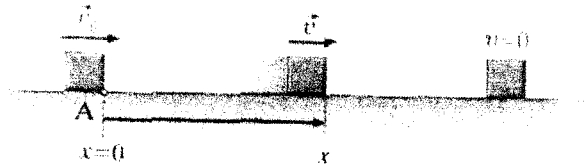
i) Να βρείτε το έργο του βάρους στη διαδρομή

$A \rightarrow \Gamma$ και την κινητική ενέργεια του σώματος στο Γ. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι $W_B^{(A \rightarrow \Gamma)} = \Delta K^{(A \rightarrow \Gamma)}$

ii) Αν το σώμα σταματήσει στο σημείο Δ με $(\Delta\Gamma) = h$, να βρείτε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζόντιου επιπέδου.

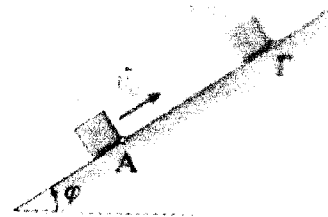
Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

19. Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και έχει στη θέση A, όπου $x = 0$, ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Αν στο σώμα στην οριζόντια διεύθυνση ασκείται μόνο η τριβή



ολίσθησης, $T = 20 \text{ N}$. Να βρείτε με τη βοήθεια του θεωρήματος της κινητικής ενέργειας τη σχέση της κινητικής ενέργειας K σε συνάρτηση με τη θέση x του σώματος και στη συνέχεια να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Σε πόση απόσταση από το A σταματά το σώμα;

20. Σώμα ρίχνεται προς τα πάνω κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου με γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Στη θέση A το σώμα έχει ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης



σώματος -επιπέδου είναι $\mu = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

i) Να βρείτε το διάστημα s που διανύει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

ii) Αν το σώμα το ρίχναμε με την ίδια αρχική ταχύτητα προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, ποιος θα έπρεπε να είναι ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου, ώστε το σώμα να σταματήσει αφού διανύσει διάστημα s ;

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

21. Σε σώμα που αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο αρχίζει ν' ασκείται οριζόντια δύναμη, η αλγεβρική τιμή της οποίας μεταβάλλεται με τη μετατόπιση του σώματος από την αρχική του θέση

σύμφωνα με τη σχέση $F = 10 + 2x$ (F σε N, x σε m). Να βρείτε για μετατόπιση του σώματος από την αρχική του θέση κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$:

- το έργο της δύναμης F ,
- την τελική κινητική ενέργεια του σώματος.

22. Ένα σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη F , της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με τη μετατόπιση του σώματος από την αρχική του θέση σύμφωνα με τη σχέση $F = 30 - 2x$ (F σε N, x σε m). Να βρείτε:

- το έργο της F μέχρι αυτή να μηδενιστεί.
- την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό βρίσκεται σε απόσταση $x = 10 \text{ m}$ από την αρχική του θέση,
- την ορμή του σώματος όπου μηδενίζεται η δύναμη F .

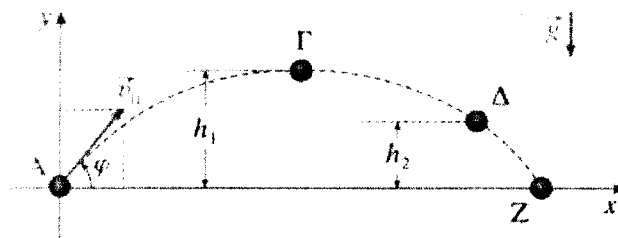
Δυναμική ενέργεια – συντηρητικές δυνάμεις:

23. Ένας ορειβάτης βάρους $B = 1000 \text{ N}$ ανεβαίνει σ' ένα βουνό. Ξεκινά από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 500 \text{ m}$ από την επιφάνεια της θάλασσας και φτάνει στην κορυφή Γ, που βρίσκεται σε ύψος $h_2 = 2000 \text{ m}$, πάλι από την επιφάνεια της θάλασσας. Να βρείτε:

- τη μεταβολή ΔU_{AG} ,
- τη μεταβολή ΔU_{GA} ,
- το έργο του βάρους $W_B^{(A \rightarrow \Gamma \rightarrow A)}$

24. Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ εκτελεί τη βολή του σχήματος. Αν $h_1 = 50 \text{ m}$ και $h_2 = 20 \text{ m}$, να βρείτε τα έργα του βάρους για τις διαδρομές:

- $A \rightarrow \Gamma$
- $A \rightarrow \Delta$
- $\Gamma \rightarrow \Delta$
- $A \rightarrow Z$
- $\Delta \rightarrow Z$



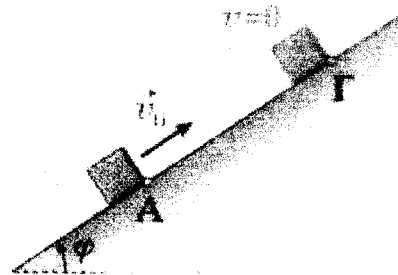
25. Σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ αφήνεται από ύψος $h = 20 \text{ m}$. Πέφτοντας το σώμα δέχεται από τον αέρα αντίσταση F_A , της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με τη μετατόπιση του σώματος από το σημείο που αφέθηκε σύμφωνα με τη σχέση $F_A = 2x$ (F σε N, x σε m). Να βρείτε:

- το έργο του βάρους απ το έργο της F_A κατά τη διαδρομή του σώματος μέχρι το έδαφος,
- την ταχύτητα με την οποία φτάνει το σώμα στο έδαφος,

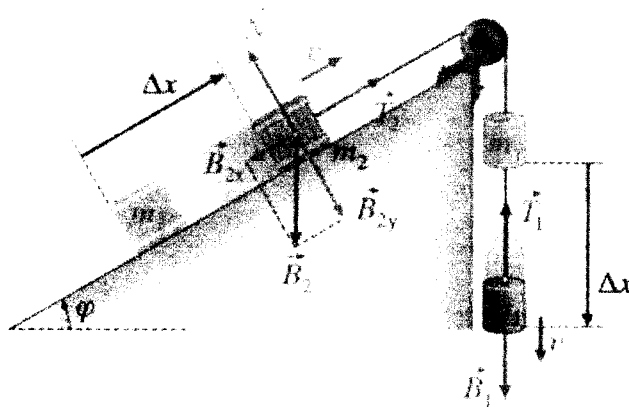
iii) το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του σώματος που έγινε τελικά κινητική ενέργεια αυτού. Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

26. Από το σημείο Α του κεκλιμένου επιπέδου του σχήματος ρίχνουμε ένα σώμα με αρχική ταχύτητα v_0 και αρχική κινητική ενέργεια $K_1=8 \text{ J}$. Το σώμα ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο, σταματά στιγμιαία και ξαναγυρίζει στο σημείο βολής Α με ταχύτητα $v=v_0/2$. Να βρείτε:

- την τελική κινητική ενέργεια του σώματος στο Α,
- το συνολικό έργο της τριβής,
- το έργο της τριβής στη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$.



27. Δύο μάζες $m_1=2 \text{ kg}$ και $m_2=3,6 \text{ kg}$ είναι δεμένες στα άκρα ενός αβαρούς και μη έκτατου νήματος όπως στο σχήμα. Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο, να βρείτε την ταχύτητα κάθε μάζας όταν η μάζα m_1 έχει μετακινηθεί από τη θέση όπου την αφήσαμε κατά $\Delta x=1,4 \text{ m}$. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi=30^\circ$. Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.



Μηχανική ενέργεια:

28. Σώμα αφήνεται από ύψος $h=20 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος να πέσει ελεύθερα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της κινητικής ενέργειας να βρείτε την ταχύτητα του σε ύψος $h_1=10 \text{ m}$ από το έδαφος. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας να βρείτε την ταχύτητα του όταν φτάνει στο έδαφος. Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

29. Αφήνουμε ένα σώμα μάζας $m=2 \text{ kg}$ να πέσει ελεύθερα από ύψος $h=20 \text{ m}$ από το δάπεδο, για το οποίο παίρνουμε $U=0$.

- Να βρείτε τη μηχανική ενέργεια του σώματος σε ύψος $h_1=10 \text{ m}$ από το δάπεδο,
- Σε ποιο ύψος η δυναμική ενέργεια του σώματος θα είναι ίση με την κινητική του ενέργεια; Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

30. Σώμα μάζας m ρίχνεται από το έδαφος η κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v_0=40 \text{ m/s}$

i) Σε πόσο ύψος η ταχύτητα του σώματος γίνεται $v_1=20 \text{ m/s}$

ii) Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος σε ύψος $h = 35 \text{ m}$;

Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

Αντιστάσεις παραλείπονται.

31. Σώμα ρίχνεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0 . Να αποδείξετε τον

τύπο του μέγιστου ύψους, $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$

i) με τη βοήθεια των τύπων της κινηματικής,

ii) με τη βοήθεια του θεωρήματος κινητικής ενέργειας,

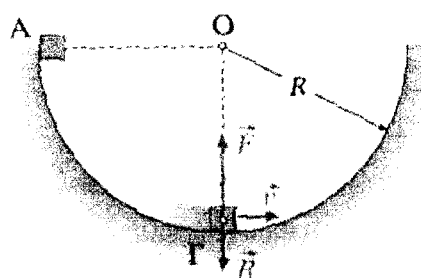
iii) με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

32. Πολύ μικρό σώμα μάζας $m=0,1 \text{ kg}$ αφήνεται να ολισθήσει, χωρίς τριβές, από το χείλος ημισφαιρίου ακτίνας $R=1 \text{ m}$. Να βρείτε στο κατώτατο σημείο Γ της τροχιάς του:

i) την ταχύτητα του,

ii) την κεντρομόλο δύναμη,

iii) τη δύναμη που δέχεται από το ημισφαίριο.



Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

33. Το μικρό καροτσάκι του σχήματος, μάζας $m=0,1 \text{ kg}$, αφήνεται από τη θέση Α, η οποία βρίσκεται σε ύψος $h=20 \text{ m}$, για να κάνει την ανακύκλωση. Ο κύκλος έχει ακτίνα $R=5 \text{ m}$ και οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

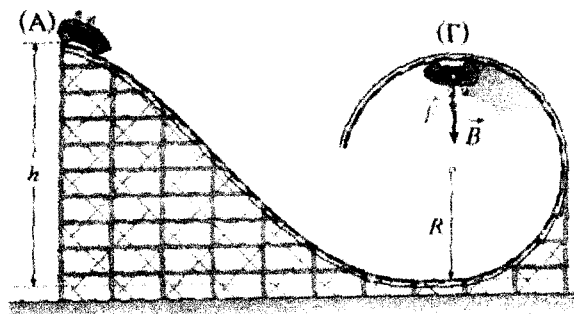
i) Στην ανώτατη θέση Γ του κύκλου να βρείτε:

α) την ταχύτητα που έχει το καροτσάκι,

β) τις δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο καροτσάκι.

ii) Ποιο είναι το ελάχιστο ύψος h_{\min} από το οποίο πρέπει να αφήσουμε το καροτσάκι, ώστε αυτό να κάνει με ασφάλεια την ανακύκλωση;

Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.



34. Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ρίχνεται οριζόντια από μεγάλο ύψος h με αρχική ταχύτητα v_0 . Για χρονικό διάστημα $\Delta t = 2 \text{ s}$ από τη στιγμή που ρίχνεται το σώμα να βρείτε:

- i) το έργο του βάρους,
- ii) τη μείωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος,
- iii) τη μεταβολή της ορμής του σώματος.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$. Αντιστάσεις παραλείπονται.

35. Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ρίχνεται οριζόντια από ύψος $h = 20 \text{ m}$ από το έδαφος με ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$ (οριζόντια βολή).

- i) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν αυτό χτυπά στο έδαφος.
- ii) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και το διάνυσμα της επιτάχυνσης σε τυχαίο σημείο της τροχιάς του. Γιατί σε κάθε σημείο της τροχιάς του η οριζόντια ταχύτητα του σώματος είναι ίδια;
- iii) Τι διεύθυνση πρέπει να έχει η v_0 ώστε το σώμα να φτάσει στο έδαφος με την μέγιστη δυνατή ταχύτητα;

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Τριβή και μηχανική ενέργεια:

36. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 6 \text{ kg}$ και ταχύτητες $v_1 = 30 \text{ m/s}$ και $v_2 = 10 \text{ m/s}$ αντίστοιχα, της ίδιας φοράς, συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά.

- i) Γιατί ενώ ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σωμάτων;
- ii) Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;
- iii) Κατά την πλαστική κρούση των σωμάτων έχουμε εμφάνιση ενέργειας παραμόρφωσης και θερμικής ενέργειας. Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα αυτών των ενεργειών;

37. Μια σφαίρα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω, πάνω σε οριζόντια πλάκα, από ύψος $h = 10 \text{ m}$ με ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Μετά την κρούση της η σφαίρα αναπηδά πάλι σε ύψος $h = 10 \text{ m}$. Αν η αντίσταση από τον αέρα είναι αμελητέα, να βρείτε:

- i) τη μηχανική ενέργεια της σφαίρας πριν και μετά την κρούση,
- ii) πόσο % της μηχανικής ενέργειας της σφαίρας χάνεται κατά την κρούση της με την πλάκα.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

38. Μια μπάλα του μπάσκετ αφήνεται από ύψος $h = 2 \text{ m}$ να πέσει στο δάπεδο. Κάθε φορά που η μπάλα χτυπά στο δάπεδο χάνει το 20% της ενέργειας που είχε πριν την κρούση. Να βρείτε το ύψος στο οποίο φτάνει η μπάλα μετά την πρώτη και μετά τη δεύτερη κρούση. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

39. Βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $v_1 = 300 \text{ m/s}$ εναντίον ξύλινου κιβωτίου μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα βγαίνει από το κιβώτιο με ταχύτητα $v = 100 \text{ m/s}$. Αν μετά την κρούση το κιβώτιο ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά αφού διανύσει διάστημα $s = 20 \text{ m}$, να βρείτε:

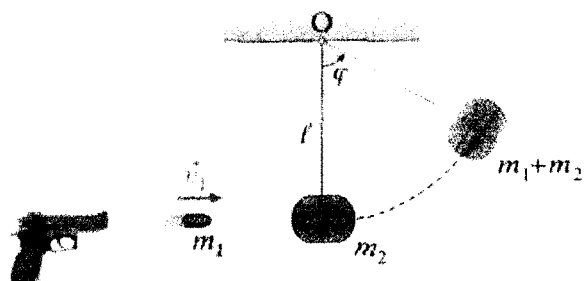
- τον συντελεστή της τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και επιπέδου,
- την ενέργεια που απαιτήθηκε για να κάνει το βλήμα την «τρύπα» στο κιβώτιο,
- τη μεταβολή της ορμής του βλήματος μέσα στο ξύλινο κιβώτιο.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

40. Βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_1 και σφηνώνεται σε κομμάτι ξύλου μάζας $m = 1,9 \text{ kg}$, που είναι κρεμασμένο με νήμα μήκους $l = 2,5 \text{ m}$, από σταθερό σημείο O. Το κομμάτι του ξύλου μαζί με το βλήμα που έχει σφηνωθεί σ' αυτό εκτρέπεται και το νήμα σχηματίζει μέγιστη γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την κατακόρυφο.

- Στη διάρκεια της κρούσης ποιες από τις απόμενες αρχές ισχύουν;

- αρχή διατήρησης της ενέργειας
- αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας
- αρχή διατήρησης της ορμής.

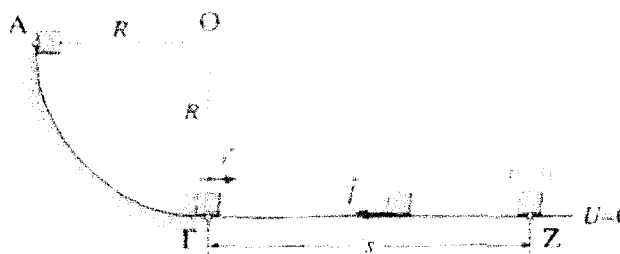


Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας,

- Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση.
- Να βρείτε την ταχύτητα v_1 του βλήματος.
- Πόση από την αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος χάθηκε κατά την κρούση;

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

41. Το σώμα του σχήματος, μάζας $m = 2 \text{ kg}$ αφήνεται να ολισθήσει από το σημείο A κατά μήκος του τεταρτοκύκλιου ακτίνας $R = 1,25 \text{ m}$. Το σώμα, αφού περάσει από το σημείο Γ, συνεχίζει στο οριζόντιο δάπεδο μέχρι το σημείο Z, που



απέχει από το Γ απόσταση $s = 2 \text{ m}$. Ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζώντιου δαπέδου είναι $\mu = 0,4$. Να βρείτε:

- i) Τη μηχανική ενέργεια του σώματος στα σημεία Α, Γ και Ζ,
 - ii) το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος που έγινε θερμότητα κατά τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$.
- Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

Ισχύς:

42. Όχημα κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $v = 20 \text{ m/s}$, υπό την επίδραση της δύναμης $F_{κιν} = 1000 \text{ N}$ του κινητήρα. Να βρείτε:

- i) την αποδιδόμενη ισχύ του κινητήρα,
- ii) τον ρυθμό με τον οποίο η προσφερόμενη από τον κινητήρα ενέργεια στο όχημα μετατρέπεται σε θερμική.

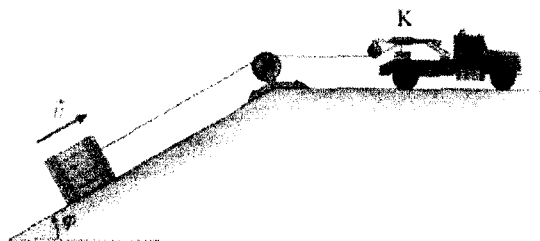
43. Αυτοκίνητο μάζας $m = 1200 \text{ kg}$ ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα $v = 72 \text{ km/h}$ σε κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Οι αντιστάσεις (τριβή, αντίσταση αέρα) ισοδυναμούν με σταθερή δύναμη μέτρου $F_A = 500 \text{ N}$ που έχει φορά αντίθετη της κίνησης. Να βρείτε την ισχύ P που αναπτύσσει ο κινητήρας του αυτοκινήτου. Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

44. Για ν' ανεβάσουμε το νερό από ένα πηγάδι βάθους $h = 300 \text{ m}$, χρησιμοποιούμε αντλία, η οποία αποδίδει ωφέλιμη ισχύ $P_{αντλ} = 20 \text{ kW}$. Να βρείτε τη μάζα νερού που αντλούμε μέσα σε ένα εικοσιτετράωρο. Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.

45. Αεροπλάνο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα v_1 , οπότε οι κινητήρες του αποδίδουν ισχύ P_1 . Αν η αντίσταση που δέχεται το αεροπλάνο από τον αέρα είναι ανάλογη του τετράγωνου της ταχύτητας του, να βρείτε:

- i) την ισχύ των κινητήρων όταν η ταχύτητα του αεροπλάνου διπλασιαστεί,
- ii) την ταχύτητα του αεροπλάνου όταν διπλασιαστεί η ισχύς των κινητήρων.

46. Ο κινητήρας τραβάει το κιβώτιο με σταθερή ταχύτητα $v = 4 \text{ m/s}$. Το κιβώτιο έχει μάζα $m = 20 \text{ kg}$ και η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi = 30^\circ$. Να βρείτε την ισχύ P του κινητήρα και τον ρυθμό αύξησης της δυναμικής ενέργειας του κιβωτίου όταν:



i) δεν υπάρχει τριβή,

ii) ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{10}$. Στην περίπτωση αυτή να βρείτε και τον ρυθμό μετατροπής της ενέργειας του κιβωτίου σε θερμική ενέργεια λόγω της τριβής. Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.