



Θ.Ε. ΠΛΣ50 (2007-8) – ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ Ε9

I. Στόχος

Στην εργασία αυτή καλείστε να απαντήσετε ένα σύνολο ερωτημάτων σε σχέση με το μαθηματικό μοντέλο των γραφημάτων. Τα ερωτήματα αυτά κυμαίνονται από τον ορισμό γραφημάτων με στόχο τη μοντελοποίηση προβλημάτων, την απόδειξη ιδιοτήτων, το σχεδιασμό αλγορίθμου για την επίλυση του προβλήματος του μακρύτερου μονοπατιού καθώς και τη σχεδίασμό/υλοποίηση ενός αλγορίθμου ο οποίος στόχο έχει να ελέγξει αν ένα γράφημα είναι άκυκλο. Η υλοποίηση σας θα πρέπει να γίνει στη γλώσσα προγραμματισμού C.

II. Θέματα

Θέμα 1 (Μοντελοποίηση)

Εξηγήστε πώς τα γραφήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν:

- Τα μηνύματα ηλεκτρονικού ταχυδρομείου στο διαδίκτυο
- Τα μηνύματα ηλεκτρονικού ταχυδρομείου που στέλνονται στο διαδίκτυο σε μια εβδομάδα
- Την σχέση συζύγων. Μπορείτε να ανιχνεύσετε κάποιες ιδιότητες σε αυτά τα γραφήματα;

Θέμα 2 (Αποδείξεις)

- Έστω $G(V,E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Αποδείξτε ότι $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$ (όπου $\deg^-(v)$ είναι ο βαθμός εισόδου της κορυφής v και $\deg^+(v)$ ο βαθμός εξόδου της κορυφής v).
- Αποδείξτε ότι κάθε συνδεδεμένο γράφημα το οποίο περιλαμβάνει τουλάχιστο ένα κύκλο έχει τουλάχιστο n ακμές, όπου n είναι ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.
- Είναι μοναδικό το συντομότερο μονοπάτι ανάμεσα σε δυο (οποιοσδήποτε) κορυφές σε ένα γράφημα με βάρη όταν κάθε ακμή έχει διακριτό βάρος (δηλ., όλα τα βάρη είναι διαφορετικά). Είναι αληθής ή ψευδής ο πιο πάνω ισχυρισμός ναι ή όχι και γιατί;

Θέμα 3 (Μακρύτερο Μονοπάτι)

Παρουσιάστε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του μακρύτερου μονοπατιού ανάμεσα σε δυο κορυφές ενός γραφήματος με βάρη. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και τη χρονική πολυπλοκότητα του. Αναφέρετε σαφώς όποιες υποθέσεις κάνετε.

Θέμα 4 (Άκυκλο Γράφημα)

- Παρουσιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα δέχεται σαν είσοδο ένα γράφημα και θα επιστρέφει false στην περίπτωση που το γράφημα αυτό δεν περιλαμβάνει κανένα κύκλο. Στην περίπτωση όπου υπάρχει κύκλος στο γράφημα, τότε επιστρέφει την τιμή true και ένα κύκλο. Αναφέρετε επίσης τη χρονική πολυπλοκότητα του.
- Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα στη γλώσσα προγραμματισμού C το οποίο θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξουμε αν ένα γράφημα περιλαμβάνει κύκλους ή όχι. Στην περίπτωση που το γράφημα περιλαμβάνει κύκλο, τότε τυπώνει τουλάχιστον ένα κύκλο.
 - Το πρόγραμμα σας μπορεί να διαβάζει ένα γράφημα από αρχείο το οποίο θα έχει την ακόλουθη μορφή:

n, m

u, v float string



Δηλαδή, στην πρώτη γραμμή του αρχείου υπάρχουν δύο ακέραιοι αριθμοί, οι n και m , που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των κορυφών και των ακμών του γραφήματος αντίστοιχα. Σε κάθε μια από τις επόμενες γραμμές παρουσιάζεται μια ακμή του γραφήματος.

Έστω ότι u και v είναι οι κορυφές στα δύο άκρα μιας ακμής. Τότε στο αρχείο θα υπάρχει μία γραμμή της μορφής:

u, v float string .

Δηλαδή θα υπάρχουν τα δύο άκρα της ακμής ακολουθούμενα από έναν πραγματικό αριθμό που θα μπορούσε να είναι το βάρος της ακμής, και ένα string το οποίο θα μπορούσε να είναι κάποιο σχόλιο που αφορά τη συγκεκριμένη ακμή. Προσέξτε ότι όταν ένα γράφημα είναι ΜΗ κατευθυνόμενο δεν υπάρχει ανάγκη να παρουσιάσουμε την ακμή (u,v) δύο φορές. Αντίθετα, όταν το γράφημα είναι κατευθυνόμενο, τότε θα πρέπει να εμφανίζονται και οι δυο ακμές (u,v) και (v,u) όταν είναι και οι δυο ανήκουν στο G .

Σας δίνεται ένα πρόγραμμα το οποίο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για να δημιουργήσετε διάφορα τυχαία γραφήματα τα οποία θα αποθηκεύονται σε αρχεία της μορφής που περιγράψαμε πιο πάνω. Ο γεννήτορας τυχαίων γραφημάτων βρίσκεται στο αρχείο *generator.c*.

Παράδειγμα: Έστω ένα γράφημα με 100 κορυφές και 240 ακμές, το αρχείο εισόδου μπορεί να αρχίζει ως εξής:

```
100, 240
1, 2 0 {}
1, 5 0 {}
1, 12 0 {}
.
.
.
99, 100 0 {}
```

III. Κριτήρια αξιολόγησης:

Θέμα 1 (Μοντελοποίηση)	10
Θέμα 2 (Αποδείξεις)	20
Θέμα 3 (Μακρύτερο Μονοπάτι):	20
Θέμα 4 (Άκυκλο Γράφημα):	40
Θέμα 4a) Αλγόριθμος	10
Θέμα 4b) Ορθότητα και χρονική πολυπλοκότητα	10
Θέμα 4c) Πρόγραμμα	20
Γενική εικόνα (παρουσίαση αλγορίθμων, πλήρεις αποδείξεις, ευανάγνωστος κώδικας, σχολιασμός, κλπ.)	10
ΣΥΝΟΛΟ	100

Ο συνολικός βαθμός θα διαιρεθεί δια 10, ώστε να προκύψει ο τελικός βαθμός της εργασίας (με μέγιστη τιμή το 10).



Τρόπος – Ημερομηνία Παράδοσης

Η εργασία σας θα πρέπει να έχει φτάσει στον Καθηγητή-Σύμβουλό σας μέχρι την Κυριακή 4/5/2008 ώρα 23:59.

Περιμένουμε όλες οι εργασίες να αποσταλούν μέσω Email και να είναι γραμμένες σε επεξεργαστή κειμένου MSWord (διευκρινήσεις, σχόλια και παραδοχές που θεωρείτε απαραίτητα να συμπεριλάβετε στην εργασία σας). Τα τμήματα κώδικα και τα τμήματα δεδομένων θα βρίσκονται σε ξεχωριστά αρχεία και θα υπάρχουν αναφορές σ' αυτά από το κείμενο της εργασίας. Στον Καθηγητή-Σύμβουλό σας, σε κάθε περίπτωση, στέλνετε ΕΝΑ μόνο αρχείο (συμπιεσμένο).

Δεν θα δοθεί παράταση στην παράδοση της εργασίας πέραν της ως άνω αναφερόμενης ημέρας και ώρας, για κανένα λόγο. Την Τρίτη 6/5/2008 και ώρα 13:00, θα δημοσιευθεί ενδεικτική επίλυση της εργασίας στο διαδίκτυο (portal).

Καλή Επιτυχία!!!