

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

07/10/2024

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$

β) $x^2 + 16 \geq 8x$

γ) $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

δ) $\alpha^2 + 2\alpha + 3 > 0$

ε) $3x^2 + 4x + 4 > 0$

στ) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 5 \geq 0$

ζ) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$

η) $2\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0$

θ) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2 \geq 0$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) $2x^2 - 4x + 5 > 0, x \in \mathbb{R}$

β) $x^2 + y^2 \geq 12x + 4y - 40, x, y \in \mathbb{R}$

γ) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 + 25 \geq 6\alpha + 8\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2.$

4. α) Αν $\alpha < 2 < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 < 0.$

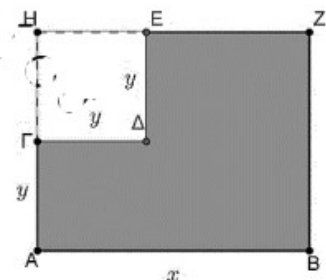
5. α) Αν $\alpha + \beta > 0$ τότε $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}.$

β) Αν $\alpha \geq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2.$

6. (Θ2). Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y.$

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



7. (Θ2). Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

8. (Θ2). Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

9. (Θ2). Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$

β) $\alpha - \beta$

10. (Θ2). Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.