

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ «Δυνάμεις – Ταυτότητες»

24/09/2024

1. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

$$\left[(\alpha^{-7}\beta^3) : (\alpha\beta)^4 \right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{(\alpha^{18})^0 (\beta^{-2}\alpha)^{-1} \beta^7} = 1$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\alpha^{-12}\beta^4 (\alpha^2\beta^{-5})^3}{\alpha^{-5} (\alpha^{-3}\beta^5)^{-2}} \cdot \left[\frac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2\beta^4} \right]^{-3}$ για

$$\alpha = \frac{1}{2024} \text{ και } \beta = 2024.$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) (\alpha+4)^2 + (2\alpha+3)^2 &= \alpha^2 + (2\alpha+5)^2 & \beta) (\alpha-3\beta)^2 - (\beta-3\alpha)^2 + 8(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) &= 0 \\ \gamma) (\alpha-\beta+\gamma)^2 + (\beta-\alpha+\gamma)^2 &= 2[(\alpha-\beta)^2 + \gamma^2] \end{aligned}$$

δ) $(x+2)^3 - 4(x+1)^3 + 6x^3 + (x-2)^3 = 4(x-1)^3$

4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\frac{\alpha^3 - 8\alpha^2 + 16\alpha}{\alpha^3 - 16\alpha}$

β) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

γ) $\frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2\alpha^2 + 3\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 - 9}{4\alpha^2 - 12\alpha + 9}$

δ) $\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^3 + 8} : \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - 2\alpha + 4}$

- 5). (13088) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε

$$A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2.$$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

6. (14555) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$.

7. (1251) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

8. (Θ2). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$,

τότε να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ β) $\alpha = \beta$.

9. (Θ2). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$.

10. (Θ2). Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι: i) $(2y - x)^2 = 0$ ii) $y = \frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

11. (Θ2). Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.