

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ «Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα»

27/09/2024

ΑΣΚΗΣΗ 1

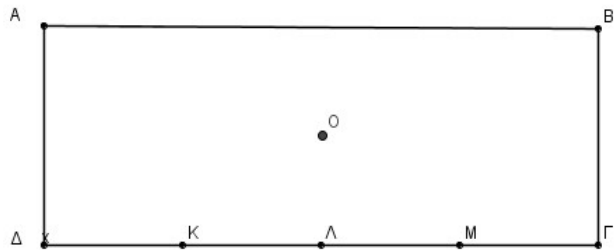
Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.

Αν $\overrightarrow{ΔΚ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΔΑ} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) $\overrightarrow{ΔΓ}$ (Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{ΜΑ}$ (Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{ΟΔ}$ (Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ 2(4°)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΑΒ} = \kappa \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = \lambda \cdot \overrightarrow{ΑΕ}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\alpha}$ και

$\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β)

i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΓ} \parallel \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = \kappa |\overrightarrow{ΔΕ}|$. (Μονάδες 10)

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

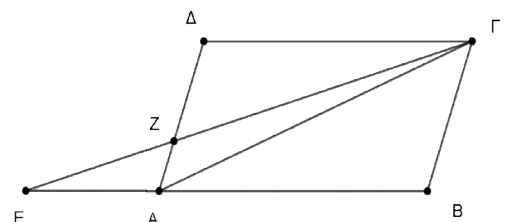
ΑΣΚΗΣΗ 3(2°)

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΑΕ} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΕΖ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΖΓ} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$. (Μ 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΖΓ} = 2\overrightarrow{ΕΖ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά. (Μ 6)



4. Αν ισχύει $2\overrightarrow{ΑΛ} + 3\overrightarrow{ΒΛ} + 2\overrightarrow{ΜΒ} = \overrightarrow{ΑΚ} + \overrightarrow{ΑΜ} + \overrightarrow{ΒΚ}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΜΛ}$ είναι αντίρροπα
5. Αν ισχύει ότι: $3\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΑ} = 3\overrightarrow{ΒΓ} - \overrightarrow{ΔΒ}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ} \uparrow \downarrow \overrightarrow{ΓΔ}$.
6. Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:
 α) το διάνυσμα $\vec{v} = 4\overrightarrow{ΑΓ} - 2\overrightarrow{ΑΒ} - 2\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΓΔ}$ είναι ομόρροπο με το $\overrightarrow{ΒΓ}$
 β) το διάνυσμα $\vec{w} = 2\overrightarrow{ΓΒ} - 3\overrightarrow{ΑΒ} + 3\overrightarrow{ΔΓ} - \overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΒΔ}$ είναι αντίρροπο με το $\overrightarrow{ΑΔ}$
7. Δίνονται σημεία A, B, Γ, Δ, E για τα οποία ισχύει ότι :
 $5\overrightarrow{ΑΔ} - 3\overrightarrow{ΑΕ} - 4\overrightarrow{ΔΓ} = 4\overrightarrow{ΕΒ} - \overrightarrow{ΕΓ} + 9\overrightarrow{ΒΔ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
8. Θεωρούμε σημεία O, A, B, Γ για τα οποία ισχύει ότι : $\overrightarrow{ΟΑ} = 4\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΟΓ} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
9. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{ΟΓ} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
10. Αν ισχύει $(\kappa + 2)\overrightarrow{ΡΑ} + 3\overrightarrow{ΡΒ} = (\kappa + 5)\overrightarrow{ΡΓ}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
11. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και Δ το μέσο της $ΑΒ$. Στην $ΒΓ$ παίρνουμε σημείο E ώστε $BE = 3BG$ και στην $ΑΓ$ σημείο Z ώστε $AZ = \frac{3}{5}AG$.
 α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{\beta}$.
 β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.