ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

16/11/2026

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3, & x\le 2\\ 2x-3, & x>2\end{cases}$. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[0,4]$ και να βρείτε $\xi\in(0,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.

2. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x+2\le f(x)<e^{x+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^3x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

3. Έστω f συνεχής στο $[1,3]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2-4x+3}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

4. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=2x^3-x-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

5. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x)+4f^3(x)=x^3+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

6. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$ με $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f^2(\xi)=f(\xi)-\xi$.

7. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $(f\circ g)(x_0)=(g\circ f)(x_0)+2x_0^2-1$.

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
- $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ και
- $\beta^2<3\gamma,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 24x + 3 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0,3)$.

10 Δίνεται $f : [2,6] \to R$ και συνεχής στο $[2,6]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} = 0$, έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(2,6)$.

11. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$ για την οποία ισχύει: $e^{-\alpha} f(\alpha) + e^{-\beta} f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

12. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu x_0) = \eta\mu x_0$.

13. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1,3]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi + 2)$.

14. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0,2] \to [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2]$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$.

15. Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, για την οποία ισχύει $3x^2 \leq f(x) + x \leq 3x$ για $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y = 4x - 1$ στο $(0,1)$.

16. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τα κ, λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + ex = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,+\infty)$.

2. Μια συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta=[1,5]$.

Αν $f(4)=0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, να αποδείξετε ότι :

i. $f(1)>0$ και $f(5)<0$

ii. η εξίσωση $f(2x+3)=x$ έχει μοναδική ρίζα.

3. Έστω συνάρτηση $f: IR\to IR$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1)=3 \quad \text{και} \quad |f(x)-f(y)|\le\frac{|x-y|}{2016+|x+y|} \quad \text{για κάθε } x,y\in IR$$

Να α**1.** είξετε ότι :

i. Η f είναι συνεχής στο IR.

ii. Η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\le g(\alpha)$ και $f(\beta)\ge g(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$0\le f(x)\le 1, \text{ για κάθε } x\in[0,1].$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x-xe^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in IR$, η εξίσωση $\eta\mu x-\eta\mu\lambda=\frac{\pi}{2}-x$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα μικρότερη ή ίση του $\frac{\pi}{2}$.

ώστε :

7. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: IR\to IR$ για την οποία ισχύει ότι :

$$x^2\le f(x)<x^2+2 \quad \text{για κάθε } x\in IR$$

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi\cdot 3^{\xi}$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\eta\mu^2 x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^3 x\, f\left(\frac{1}{x}\right)+5x}{x^2+\eta\mu 3x}$.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Αν η f είναι συνεχής και $f(1)=-2$, να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)|-2}{f^2(x)+2f(x)}$ β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(f(2)-1)x^3+5x-1\right]$.

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f(x)\neq 0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3f(0)+x-1}{x^2f(1)+1}$.

10. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f(x)\neq 0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)=x^2-4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,2)$.

11. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α. $f(x)=3x^3-2x-1$ β. $f(x)=\eta\mu x+x$ γ. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

12. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για τις τιμές του x, όταν:

α. $f(x)=\sqrt{2}\eta\mu x-1$, $x\in[0,\pi]$ β. $f(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+1$, $x\in[0,\pi]$

γ. $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi]$ δ. $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,2\pi]$

13. Να βρείτε τον τύπο των παρακάτω συνεχών συναρτήσεων $f:\Delta\to\mathbb{R}$, που οποίες ισχύουν:

α. $f^2(x)=e^{2x}+2e^x+1$, για κάθε $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

β. $f^2(x)+4\eta\mu x=\eta\mu^2x+4$, για κάθε $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

14. Να βρείτε τον τύπο των παρακάτω συναρτήσεων $f:\Delta\to\mathbb{R}$, για τις ισχύει:

α. $|f(x)|=1-x^2$, $x\in\Delta=[-1,1]$ και $f(0)=1$

β. $f^2(x)=4-x^2$, $x\in\Delta=[-2,2]$ και $f(0)=2$

15. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία ισχύει:

α. $f^2(x)=x^2-4x+4$, $x\in\mathbb{R}$.

β. $f^2(x)+2e^x=e^{2x}+1$, $x\in\mathbb{R}$.

16. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x)\neq e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{f(x)-e^x}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

17. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$e^{f(x)}+2x=e^{-f(x)}\text{ , για κάθε }x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

18.

α. Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x-1=0$.

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που είναι συνεχής και για την οποία ισχύει $f^2(x)=(e^x+x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

19. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. $f^2(x)-2xf(x)=4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$

β. $f^2(x)-2f(x)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$

γ. $f^2(x)+3-4f(x)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$

δ. $f^2(x)=1+x^4+2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1+\sqrt{2}$

ε. $f^2(x)=1+2e^xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1+\sqrt{2}$

στ. $f^2(x)+2f(x)=\eta\mu^2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=-2$.