ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

11/11/2026

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\square \to \square$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x = 1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

α)Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ (Μονάδες 4)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.(Μονάδες 8)

γ)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα$\left(\dfrac{1}{\pi},+\infty\right)$. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|, \text{ για κάθε } x\in[0,\pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|\eta\mu x|$.(Μονάδες 06)
ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση h: $(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:$\lim_{x\to 0}\ h(x)$(Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)}=\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}+\mathrm{x}^3+2\mathrm{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση fαντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών τοR.(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.
(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})=0$.(Μονάδες 5)

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με τύπο:

$$f(x)=2x^4+3\ln x+1\,.$$

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

6. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1} = 2017$.
- $|g(x)-2| \le |f(x)-1|$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.
- $f(x) = f(x+1)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

1. Να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

4. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 g(x) = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

---

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \le \dfrac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

9. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -\sqrt{x^2+x+1},\ x \in \mathbf{R}$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - f(x))$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = x - f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

---

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ (1) κ
γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

---

11. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η *συνεχής* συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}=-1$

Γ1. Να δείξετε ότι: $\boldsymbol{f(1)=1}$. (Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ και να βρείτε την $f'(1)$.

(Μονάδες 5)

Αν επιπλέον δίνεται ότι $\boldsymbol{f^2(x)+2xf(x)=3}$, **για κάθε** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$, ***τότε:***

Γ3. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+3}-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Αν η συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών $g([0,1])=[1,\sqrt{3}]$, να δείξετε ότι η C_f τέμνει την C_g σε ένα, τουλάχιστον, σημείο.

(Μονάδες 5)

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu^2 x)-\sqrt{3}}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

(Μονάδες 5)

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_o

11/11/2026

ΑΣΚΗΣΗ 25749

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειαςτης f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

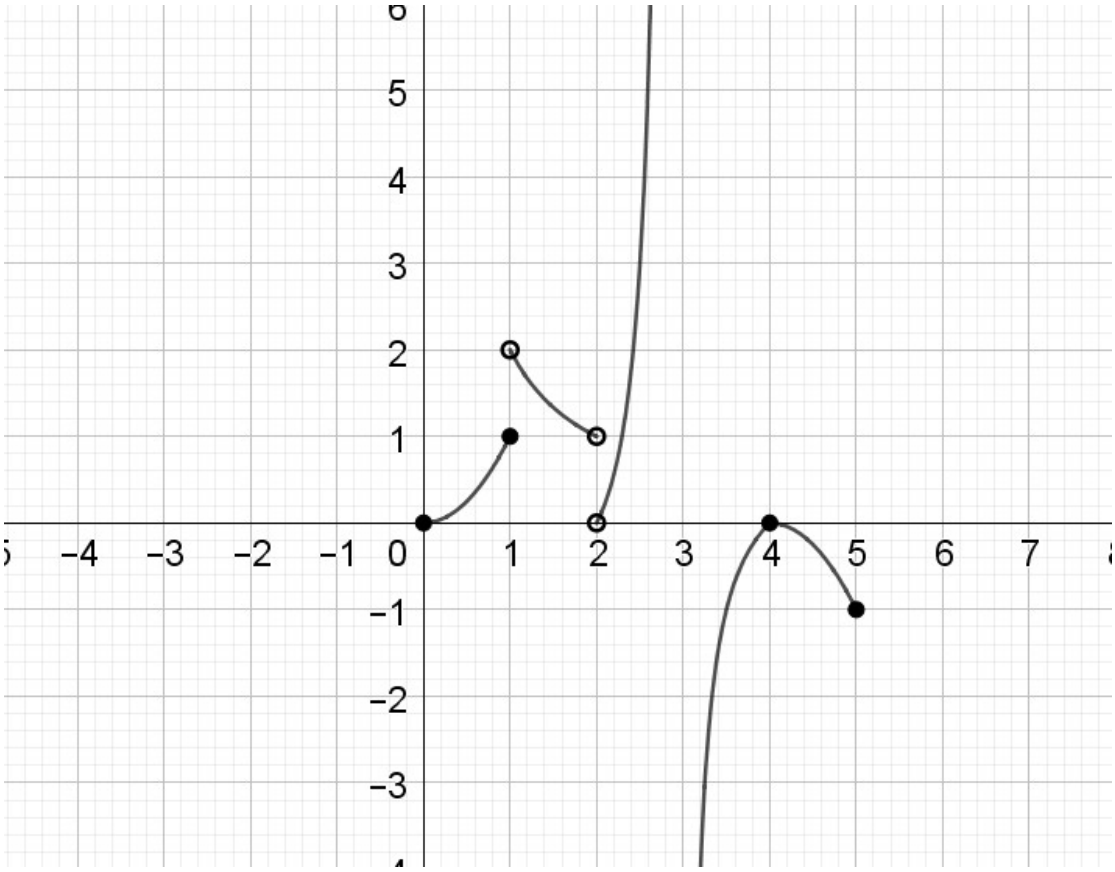
(Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

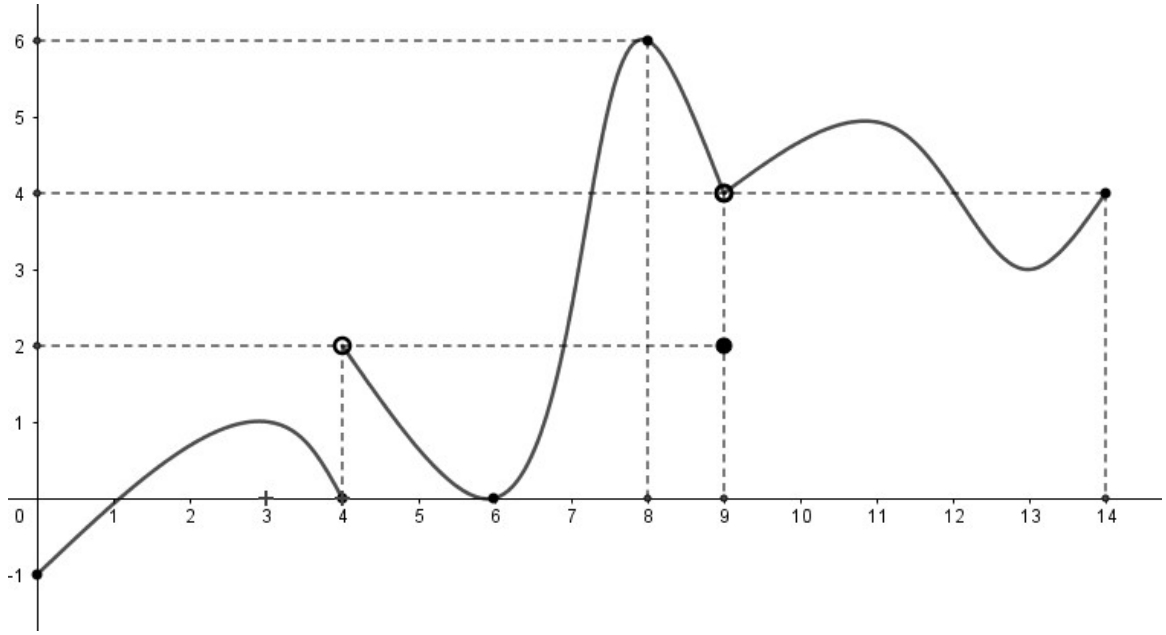
ii. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 27318

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.Γνωρίζουμε ότιη fπαίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$
ii. $\lim_{x\to 4} f(x)$
iii. $\lim_{x\to 9} f(x)$
iv. $\lim_{x\to 14} f(x)$
v. $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

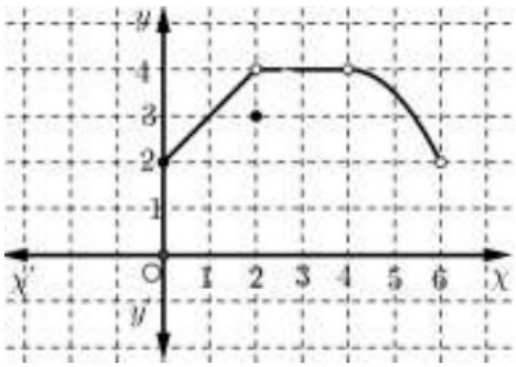
1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

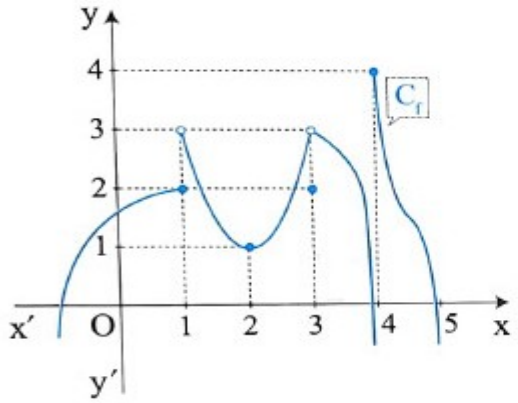
γ) τις τιμές $f(2), f(0)$

δ) τα σημεία στα οποία αυτη δεν είναι συνεχής.

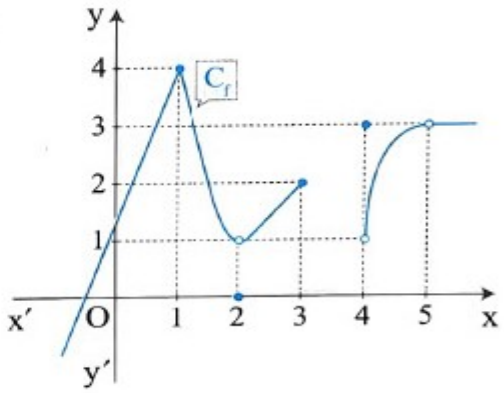


2. Σε καθεμία από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις να βρείτε σε ποια από τα σημεία $x_0 = 1, 2, 3, 4, 5$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και σε ποια δεν είναι συνεχής.

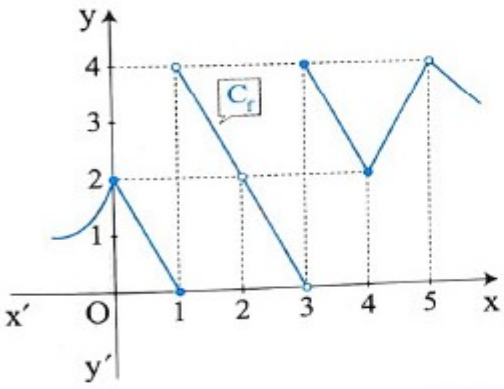
α.



β.



γ.



δ.



3. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια σ

$$\gamma)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1\\ 2, & x=1\\ 3x-1 & x>1\end{cases}\quad (x_0=1)$$

$$\delta)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}, & x\le 0\\ 0 & ,x=0\\ \dfrac{\eta\mu x}{2x} & ,x>0\end{cases}\quad (x_0=0)$$

4. Έστω $\alpha, \beta \in IR$ και η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0\\ 2e^{x^2+\alpha^2}+\ln(x^2+\beta^2+1), & x\ge 0\end{cases}$$

i. Να βρείτε τα α, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)-4}{f(x)-2}.$$

5. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=2$. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+\alpha x-\beta}{x^3-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in IR$, ώστε η f να είναι συνεχής στο IR.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2+2}{|x-1|}, & x\neq 1\\ \gamma, & x=1\end{cases}$.

8 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: IR\to IR$ για την οποία ισχύει :

$x^2f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sigma\upsilon\nu^2x$, για κάθε $x\in IR$

Να βρείτε : i. το $f(0)$ ii. το $\lim\limits_{x\to-\infty}[xf(x)]$

9. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:IR\to IR$, συνεχής στο 2, για την οποια ισχύει :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+x^2+x-2}{x-2}=9.$$

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο -2.
iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-4x+4}$
iv. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)+\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$

10. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f: IR\to IR$ με την ιδιότητα :

$f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+x\left(f(x)+1\right)$, για κάθε $x\in IR$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: IR\to IR$ για την οποία ισχύει :

$xf(x)-2=f(x)-\sqrt{3x^2+1}$, για κάθε $x\in IR$

Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε τον τύπο της.

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: IR\to IR$ τέτοια ώστε :

$\kappa\,\eta\mu^2x=x^2f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2x}-\lambda$ για κάθε $x\in IR$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ.
ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f .

13. Αν η f είναι συνεχής στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+2}}{x-2}=\dfrac{3}{4}$, να βρείτε το

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

14 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to IR$, για την οποία ισχύει

$$1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x,\ \text{για κάθε } x\in[0,\ \pi].$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\dfrac{\pi}{2}$.

β. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{3-f(x)}$ ii. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{|f(x)-3|-xf(x)-3}{3-f(x)}$

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2-\eta\mu x}{x^2+x}=2$$

α. Να αποδείξετε ότι :

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0, 2).

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$.

β. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|5-3f(x)|-1}{x^2-x}$.

γ. Να βρείτε τον $\lambda\in IR$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lambda x^4+(f(x)-2)^4}{x(f(x)-2)^3-6x^4}=4$.

δ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $f(-2)=0$, τότε :

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}-2}{f(x)}$.

16. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ \text{για κάθε } x,\ y\in IR \text{ και } f(0)\neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι :

i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, τότε η f είναι συνεχής στο IR.

ii. Αν η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $\alpha\in IR$ με $f(\alpha)\neq 0$, τότε η f είναι συνεχής στο IR.

17. Για τη συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$$f(x+y)=f(x)f(y)-e^x-e^y,\ \text{για κάθε } x,\ y\in IR.$$

i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο IR.

ii. Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha\in IR$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο IR.

18. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in IR^*$.
Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 1$, τότε η f είναι συνεχής στο IR^*.

19. Έστω συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in IR$.
Να αποδείξετε ότι :
i. $f(0) = 0$
ii. η f είναι περιττή.
iii. αν η f είναι συνεχής στο σημείο $\alpha \in IR$, τότε είναι συνεχής σε όλο το IR.

20. Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει :
$$f(x - y) = f(x) + f(y) + 5xy, \quad \text{γιακάθε } x, y \in IR$$
Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, τότε είναι συνεχής στο IR.
Αν η $f: IR \to IR$ είναι συνεχής στο σημείο $x_o = \alpha$ και
$$f(x - 2y) = f(x) - 2f(y) \text{ για κάθε } x, y \in IR,$$
να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο IR.

21. Έστω ότι $f\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(ex)f(y) + \ln(ey)f(x)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.
Αν η f είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

118.
Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $xf(x)+2 = f(x)+\sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x \in R$.
Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ να βρείτε τον τύπο της f.

119.
Να βρείτε το τύπο της συνεχούς συνάρτησης f(x) στο σύνολο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
$(x-1)f(x)+2 = \sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

120.
Για την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $xf(x)-2=f(x)-\sqrt{x^2+3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της

121.
Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f όταν για κάθε $x \in R$ ισχύει $3 - x \cdot f(x) = \sqrt{3x+6} - f(x)$

122.
Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x)+\eta\mu\pi x = (x-2)^2$ για κάθε $x \in R$.Να βρείτε τον τύπο της f.