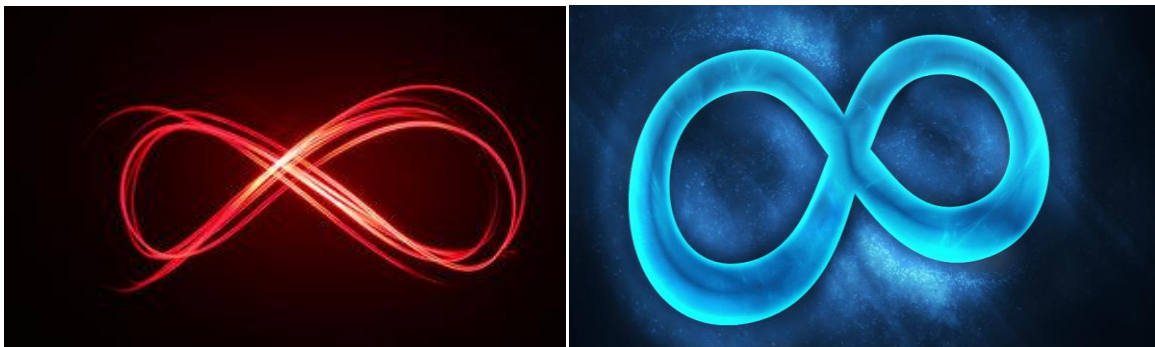


Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

**«Διενέξεις περί απείρου στην Ιστορία των Μαθηματικών
και σήμερα»**



ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΚΑΣΟΥΡΙΔΗΣ

Επιβλέποντες καθηγητές:
ΕΛΕΝΗ ΜΑΝΩΛΑΚΑΚΗ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΒΛΑΜΟΣ

Πάτρα, Μάιος 2019

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

«Διενέξεις περί απείρου στην Ιστορία των Μαθηματικών
και σήμερα»

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΚΑΣΟΥΡΙΔΗΣ

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΕΛΕΝΗ ΜΑΝΩΛΑΚΑΚΗ

Επίκουρη Καθηγήτρια Φιλοσοφίας και
Θεωρίας της Επιστήμης και της
Τεχνολογίας

Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας, Θεωρίας
της Επιστήμης

ΕΚΠΑ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΒΛΑΜΟΣ

Πρόεδρος Τμήματος Πληροφορικής &
Δ/ντης Εργαστηρίου Βιοπληροφορικής &
Ανθρώπινης Ηλεκτροφυσιολογίας,

Ιόνιο Παν/μιο

Πάτρα, Μάιος 2019

Περίληψη

Η παρούσα εργασία καταπιάνεται με δύο από τις μεγαλύτερες έριδες στην Ιστορία των Μαθηματικών στις οποίες η κεντρική διαμάχη έχει να κάνει σχετικά με το ερώτημα: είναι το άπειρο πραγματικό ή δυνητικό; Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται η εμπλοκή του άπειρου με όλους σχεδόν τους κλάδους των μαθηματικών όπως η άλγεβρα, οι μαθηματικές σειρές, οι αριθμοί e , π , i , φ , η γεωμετρία και άλλοι. Κυρίως, στο πρώτο αυτό μέρος γίνεται προσπάθεια να ενημερωθεί ο ερευνητής πώς μέσα από τις σειρές, ξεκίνησε μια διαδικασία που έφερε το άπειρο πολύ κοντά στις αναζητήσεις των μαθηματικών. Στο δεύτερο μέρος, γίνεται μελέτη των θέσεων του Αριστοτέλη, του μεγάλου Έλληνα φιλοσόφου που θεωρείται ο πατέρας του δυνητικού απείρου. Μέσα από το εμβληματικό του έργο «Φυσικά» καταγράφεται η πίστη του στο δυνητικό άπειρο, ως απάντηση στις περισσότερες από τις κρατούσες αντιλήψεις των υπόλοιπων φιλοσόφων της εποχής του. Κυρίως καταγράφεται η καίρια αντίθεσή του με την ελεατική φιλοσοφική σχολή με κύριο εκφραστή τον Ζήνωνα. Στο τρίτο μέρος η εργασία παραθέτει τις αντιλήψεις του Georg Cantor, του μεγάλου μαθηματικού που το εξαιρετικό έργο του γύρω από τη θεωρία συνόλων έφερε κοσμογονικές αλλαγές στην επιστήμη των μαθηματικών στο ξημέρωμα του εικοστού αιώνα. Η διαμάχη του με τον πρώην καθηγητή του Leopold Kronecker έφτασε στα άκρα, ενώ η πίστη του για το πραγματικό άπειρο έφερε πλήθη ακολούθων και των δύο πλευρών να διασταυρώνουν τα ξίφη τους μέχρι και σήμερα. Η εργασία ολοκληρώνεται με ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε μαθητές και με την προσωπική θέση του συγγραφέα του παρόντος σχετικά με το άπειρο.

Λέξεις – κλειδιά : *Αριστοτέλης, Cantor, πραγματικό ή δυνητικό άπειρο, παράδοξα.*

«Conflicts of Infinity in the History of Mathematics and today»

Alexandros Kasouridis

Abstract

This paper deals with two of the biggest disputes in the history of mathematics in which the central controversy has to do with the question: is the infinite real or potential? The first part presents the involvement of the infinite with almost all branches of mathematics such as algebra, mathematical series, numbers like e , π , i , geometry and others. Above all, this first part attempts to inform the researcher how a process that brought infinity very close to mathematical quests, began through the series. In the second part we study the positions of Aristotle, the great Greek philosopher who is considered to be the father of potential infinity. In his flagship work "Physics", his belief in potential infinity is recorded, in response to most of the dominant perceptions of the other philosophers of his time. Mainly, his key opposition to the philosophical school of Elea with Zeno being the main spokesman is being recorded. In the third part, the paper cites the perceptions of Georg Cantor, the great mathematician, whose exceptional work on set theory, brought cosmogenic changes in the science of mathematics at the beginning of the twentieth century. His controversy with his former professor Leopold Kronecker went overboard, while his belief in actual infinity made crowds of followers on both sides cross swords up until today. The work is completed with a questionnaire given to students and the personal position of the author of the present paper about infinity.

Key words : *Aristotelis, Cantor, potential or actual infinity, paradoxes.*

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	i
Abstract.....	ii
Περιεχόμενα.....	iii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Το άπειρο γενικά.....	1
1.2. Η συμβολή της Αρχαίας Ελλάδας.....	1
1.3. Τα πρώτα παράδοξα που γέννησε το άπειρο.....	2
1.4. Το π , το 0 και το άπειρο.....	4
1.5. Μέθοδος της εξάντλησης και μέθοδος των αδιαίρετων.....	7
1.6. Άπειρο και σύγκλιση.....	8
1.7. Άπειρο και αρμονική σειρά. Άπειρο και γεωμετρική σειρά.....	11
1.8. Πώς το άπειρο και τα παράδοξά του επηρέασε την εξέλιξη της θεωρίας των σειρών.....	12
1.9. Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.....	15
1.10. Η συνεισφορά του απείρου στην ανακάλυψη των υπερβατικών αριθμών π , φ και e	17
1.11. Η εμφάνιση του Georg Cantor και το άπειρο στο προσκήνιο.....	20
1.12. Το άπειρο επηρεάζει και τη γεωμετρία.....	22
1.13. Οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες.....	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

2.1. Ο προβληματισμός για το άπειρο στην αρχαία Ελληνική σκέψη. Ο Αριστοτέλης.....	29
2.2. Το βιβλίο Γ' των Φυσικών του Αριστοτέλη: περί κινήσεως και περί απείρου.....	30
2.2.1. Ενότητες Γ1, Γ2, Γ3 των Φυσικών του Αριστοτέλη: η κίνηση.....	31
2.2.2. Οι ενότητες Γ4 έως Γ8 των Φυσικών του Αριστοτέλη: το άπειρο και οι έριδες γύρω από αυτό.....	33
2.3. Το βιβλίο Ζ των Φυσικών του Αριστοτέλη: περί συνέχειας, άπειρης διαιρετότητας και τα παράδοξα του Ζήνωνα.....	37
2.3.1. Οι ενότητες Ζ1, Ζ2, Ζ3 των Φυσικών του Αριστοτέλη: η κίνηση, η άπειρη διαιρετότητα των συνεχών μεγεθών και η διάκριση του χρονικού διαστήματος από τη χρονική στιγμή.....	38
2.3.2. Οι ενότητες Ζ4, Ζ5, Ζ6, Ζ7 των Φυσικών του Αριστοτέλη: η είσοδος του απείρου στο χωροχρονικό επιστητό. Η ασυμβατότητα πεπερασμένων και άπειρων μεγεθών.....	40
2.3.3. Οι ενότητες Ζ8, Ζ9 και Ζ10 των Φυσικών του Αριστοτέλη, τα παράδοξα του Ζήνωνα και η αριστοτελική λύση στην έριδα μεταξύ Αριστοτέλη - Ελεατών.....	41
2.4. Το βιβλίο Θ' των Φυσικών του Αριστοτέλη: η αιωνιότητα της κίνησης και το πρώτο κινούν ακίνητο.....	45
2.4.1. Ενότητες Θ1, Θ2, Θ3 : αιωνιότητα της κίνησης.....	45
2.4.2. Θ4 έως Θ10: Το πρώτο κινούν ακίνητο, η αέναη κυκλική κίνηση και οι φιλοσοφικές έριδες πάνω στην κοσμολογία.....	47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: CANTOR

3.1.	Ο προβληματισμός για το ∞ στα τέλη του 19 ^{ου} αιώνα.....	51
3.2.	Το δυνητικό και το πραγματικό άπειρο με παραδείγματα. Η εμφάνιση του Cantor.....	52
3.3.	G. Cantor: γέννηση, καταγωγή και σπουδές του.....	56
3.4.	Η έννοια της δύναμης ή πληθικού αριθμού.....	57
3.5.	Σχέσεις με πληθικούς αριθμούς.....	59
3.6.	Οι πεπερασμένοι πληθικοί αριθμοί.....	62
3.7.	Ο μικρότερος υπερπεπερασμένος πληθικός αριθμός $\aleph_0$	64
3.8.	Οι τακτικοί αριθμοί ενός απλά διατεταγμένου συνόλου.....	68
3.9.	Πράξεις με τακτικούς αριθμούς.....	70
3.10.	Το διάστημα $(0,1)$ από τη σκοπιά των ρητών από τη σκοπιά των πραγματικών.....	72
3.11.	Καλώς διατεταγμένα σύνολα.....	74
3.12.	Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor του 1890.....	74
3.13.	Εκλαϊκευμένες αποδείξεις των βασικών προτάσεων της θεωρίας συνόλων του Cantor.....	77
3.14.	Η υπόθεση του συνεχούς.....	86
3.15.	Τα παράδοξα που έφερε η θεωρία συνόλου.....	87
3.16.	Η μειοψηφία της κοινότητας που είναι απέναντι στον Cantor. Ο ρόλος του Kronecker.....	89
3.17.	Τα αξιώματα της θεωρίας Zermelo – Fraenkel.....	91
3.18.	Το θεώρημα της καλής διάταξης.....	96
3.19.	Η διπλή απάντηση στην υπόθεση του συνεχούς του Cantor.....	101
3.20.	Ερωτηματολόγιο για το άπειρο και συμπεράσματα.....	102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4.1.	Η προσωπική θέση μας για το άπειρο.....	109
4.2.	Αποτίμηση - συμπεράσματα της εργασίας.....	112

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	117
-------------------	-----

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	121
----------------------------	-----

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Το άπειρο γενικά

Μια έννοια που έχει συζητηθεί πολύ, έχει αμφισβητηθεί και έχει συνδεθεί με σωρεία παραδόξων, είναι αυτή του απείρου. Για παράδειγμα στη σειρά $1,2,3,4,\dots$ φτάνει ποτέ κανείς στο άπειρο ή όχι ; Ο άνθρωπος από καταβολής κόσμου αναρωτήθηκε τί βρισκόταν πέρα από αυτό που μπορούσε να μετρήσει και να καταλάβει, έτσι: α) ο πρωτόγονος άνθρωπος βρήκε το άπειρο μετά το τρία αφού από εκεί πέρα ήταν «πολλά», άρα αμέτρητα β) ο λαϊκός άνθρωπος το αντιλαμβάνεται ως ένα είδος «αριθμού» μεγαλύτερου από όλους τους άλλους αριθμούς γ) το άπειρο του φωτογράφου ξεκινά σε απόσταση μεγαλύτερη των 30 μέτρων από το φακό της κάμεράς του, ενώ δ) για τον αστρονόμο ολόκληρο το σύμπαν μπορεί να μην είναι αρκετό για να καλύψει το άπειρο, αφού επί του παρόντος δεν είναι ακόμα γνωστό αν το σύμπαν είναι οριοθετημένο ή απεριόριστο. Διενέξεις περί του απείρου βρίσκουμε στη θεωρία της τέχνης, στη θεολογία και αλλού. Εδώ θα ασχοληθούμε με διενέξεις περί απείρου στα μαθηματικά., αφού στα μαθηματικά η έννοια έχει τις βαθύτερες ρίζες της, όπου έχει διαμορφωθεί και αναμορφωθεί αμέτρητες φορές και όπου τελικά ενσωματώνεται σε θεωρίες περί απείρου [1].

1.2. Η συμβολή της Αρχαίας Ελλάδας

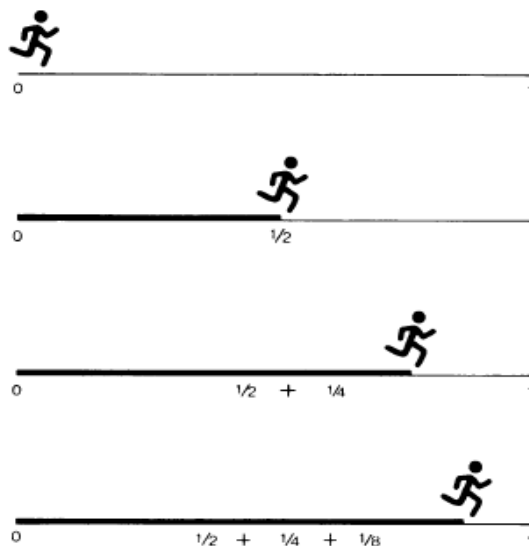
Ο David Hilbert (1862-1943) έχει πει σύμφωνα με τον Eli Maor στο βιβλίο του “To Infinity and Beyond”, ότι καμία άλλη ερώτηση όπως αυτή της υφής του απείρου δεν έχει μετακινήσει τόσο βαθιά το πνεύμα του ανθρώπου, καμία άλλη ιδέα δεν έδωσε τόσο καρποφόρα τη διάνοιά της, ωστόσο και καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται μεγαλύτερη διευκρίνιση όσο αυτή του απείρου. Η συζήτηση περί απείρου ξεκινά από την Αρχαία Ελλάδα και τους Έλληνες. Πριν από αυτούς οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι περιορίστηκαν μόνο στα πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής, όπως η μέτρηση της έκτασης, του όγκου, του βάρους και του χρόνου. Σε ένα τέτοιο σύστημα δεν υπήρχε χώρος για μια έντονη έννοια όπως αυτή του απείρου αφού τίποτα στην

καθημερινότητα δε συνδέεται με αυτό. Το άπειρο έπρεπε να περιμένει μέχρι τα μαθηματικά να κάνουν τη μετάβαση από μια αυστηρά πρακτική ανάγκη σε μια πνευματική, όπου η χάρη της γνώσης έγινε ο κύριος στόχος και κάτι τέτοιο συνέβη στην αρχαία Ελλάδα τον 6^ο π. Χ. αιώνα περίπου. Η ελληνική σκέψη ήταν αυτή που ανήγαγε το άπειρο σε κεντρικό ζήτημα των μαθηματικών.

Ο Αναξαγόρας (500- 428 π. Χ.) έλεγε ότι «δεν υπάρχει μικρότερο μεταξύ των μικρών και μεγαλύτερο μεταξύ των μεγάλων. Αλλά πάντα κάτι ακόμη μικρότερο και κάτι ακόμη μεγαλύτερο» αναφερόμενος ενδεχομένως στην έννοια της ποσότητας που είναι αντικείμενο των μαθηματικών. Η σπουδαιότερη διαδικασία θεμελίωσης των μαθηματικών και της επιστήμης γενικότερα είναι η αξιωματική μέθοδος, που κατά γενική ομολογία υπήρξε η μεγαλύτερη προσφορά της αρχαίας Ελλάδας στη δυτική επιστήμη. Χωρίς αυτήν δεν υπάρχουν επιστήμες [2]. Η αξιωματική μέθοδος είναι ένας τρόπος κατασκευής μιας επιστημονικής θεωρίας κατά τον οποίο ορισμένες προτάσεις, τα λεγόμενα αξιώματα ή αιτήματα, λαμβάνονται ως σημείο εκκινήσεως, και χωρίς αναφορά στην εμπειρία, από αυτά συνάγονται όλα τα θεωρήματα της θεωρίας με μια ακολουθία συλλογισμών που ονομάζεται απόδειξη. Οι επιστήμες που κατασκευάζονται με τη μέθοδο αυτή ονομάζονται αποδεικτικές ή παραγωγικές επιστήμες [3]. Ενώ όμως η κλασσική Γεωμετρία ήρθε σε μια τελειότητα μέσα από το έργο κυρίως του Ευκλείδη, τελειότητα που φθάνει μέχρι τις ημέρες μας, στην άλγεβρα δεν έγιναν τα αντίστοιχα βήματα κυρίως λόγω έλλειψης της αλγεβρικής γλώσσας και των συμβόλων, με αποτέλεσμα το άπειρο να θεωρείται ταμπού και να τρομάζει την αποδοχή κάθε νέας ιδέας που το περιείχε.

1.3. Τα πρώτα παράδοξα που γέννησε το άπειρο

Ο ορθολογισμός της σκέψης που απέφερε η αξιωματική μέθοδος της Αρχαίας Ελλάδας σε συνδυασμό με την επακόλουθη ενασχόληση με το άπειρο δεν άργησαν να φέρουν τα πρώτα παράδοξα στην χώρα της τότε Επιστήμης. Πρώτος εμφανίστηκε ο Ελεάτης φιλόσοφος Ζήνων που έθεσε τα παράδοξα του δρομέα (Σχήμα 1):



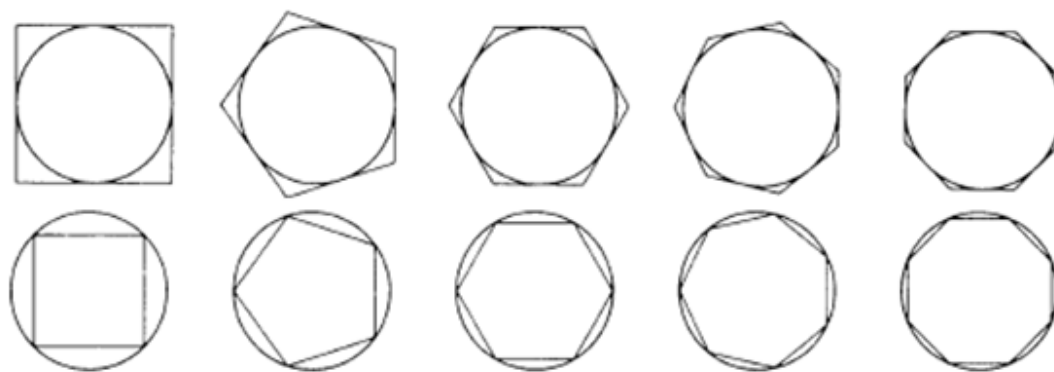
Σχήμα 1 Παράδοξο του Ζήνωνα

Όπως βλέπει κανείς από το σχήμα, ο δρομέας πρέπει πρώτα να καλύψει τη μισή διαδρομή, δηλ. $1/2$, μετά από την υπόλοιπη διαδρομή τη μισή, δηλ. $1/4$, κατόπιν το $1/8$, το $1/16$, κλπ. Καθώς θα υπάρχει πάντοτε μια υπολειπόμενη απόσταση να καλύψει, θα πρέπει κάθε φορά να φθάνει στο μισό αυτής της απόστασης και αφού όλα αυτά τα «μισά» είναι άπειρα, ο Ζήνων υποστήριξε ότι δεν θα φθάσει ποτέ ο δρομέας στο τέλος. Βέβαια ο ίδιος γνώριζε ότι σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων ο δρομέας θα τερματίσει, όμως παραμένοντας ο ίδιος ταπεινός, έδωσε τα παράδοξά του, που η ανθρωπότητα χρειάστηκε σχεδόν είκοσι αιώνες μέχρι να επιλύσει με τη βοήθεια των άπειρων σειρών, μέθοδος που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα μετά τον 16^ο αιώνα μ. Χ!

Μεγάλη έριδα υπήρξε μεταξύ του Αριστοτέλη και της Ελεατικής σχολής με βασικό εκπρόσωπο τον Ζήνωνα. Η έριδα αυτή, οι φιλοσοφικές διαφωνίες που προέκυψαν μεταξύ των δύο αυτών σχολών σκέψης, είναι βασικός στόχος μελέτης του παρόντος συγγράμματος και φωτίζεται εκτενώς στο κυρίως μέρος της εργασίας. Είναι από τις περίφημες περιόδους του Ελληνικού πνεύματος που ως φυσικοί απόγονοι του χώρου που έζησαν οι μεγάλοι αυτοί στοχαστές, παρακολουθούμε την επιχειρηματολογία τους στον υπέρτατο βαθμό, φωτίζοντας ο καθένας από την σκοπιά του την έννοια του απείρου για πρώτη φορά στην ιστορία της επιστήμης.

1.4. Το π , το 0 και το άπειρο

Οι Έλληνες ήταν οι πρώτοι που πρότειναν μία μέθοδο υπολογισμού του αριθμού π με την ακρίβεια μιας στενά μαθηματικής διαδικασίας παρά μια απλής μέτρησης. Στον πάπυρο του Rhind (περίπου 1650 π. Χ.) συναντάμε την τιμή $(4/3)^4$ δηλαδή κοντά στο 1,16049, τιμή με σφάλμα λιγότερο από 0,6%, αποτέλεσμα όμως συνήθους διαδικασίας μέτρησης γνωστής στους αρχαίους Αιγυπτίους. Ο πρώτος που προσέγγισε το π με μια διαδικασία απείρου ήταν ο Αρχιμήδης από τις Συρακούσες (περίπου 287-212 π. Χ.) με τη μέθοδο κανονικών πολυγώνων, εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε κύκλο (Σχήμα 2):



Σχήμα 2 Εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα σε κύκλο

Ο Αρχιμήδης παρακολούθησε πολύγωνα 6, 12, 24, 48 και 96 πλευρών και έφθασε στον αριθμό 3,14103, περίπου 3 και $10/71$. Αυτό που ο Αρχιμήδης πρόσφερε στην ανθρωπότητα με τη μεθοδό του ήταν η αξιοθαύμαστη ακρίβεια που μπορούσε κανείς να πάρει την τιμή του π , επιλέγοντας ο καθένας την ακριβή τάξη δεκαδικής προσέγγισης που επιθυμούσε!

Ίσως η έννοια του μηδενός εγείρει ζητήματα συγγενικά με αυτά της έννοιας του απείρου, αφού εκτός της σχέσης της σύγκλισης $\frac{1}{0} \rightarrow \square$ και το απειροελάχιστο έχει συγγενική δομή με του απείρου. Η λέξη zero προέρχεται από το Ινδουιστικό sunya που σημαίνει «κενό» ή «λευκό», «άγραφο». Οι Άραβες το παράφρασαν σε as-sifr και αργότερα αποδόθηκε στα Λατινικά ως zephirum. Κατόπιν στα Ιταλικά zeuero που απέχει μόνο ένα βήμα από το σημερινό zero. Το σύμβολο για το μηδέν «0» συναντάται στα Ινδουιστικά από το 870 μ. Χ.

Ενώ το σύμβολο του μηδενός χρησιμοποιείται για περισσότερα από 1.100 χρόνια, ο συμβολισμός του απείρου ∞ είναι σχετικά πρόσφατος και για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό John Wallis (1616-1703) που πιθανώς το πήρε από το αριθμητικό σύμβολο των Ρωμαίων για τα 100 εκατομμύρια. Πολύ αργότερα μέσα στους αιώνες ο άνθρωπος κατάλαβε ότι το άπειρο είναι μια ιδέα, όχι αριθμός και συμβολίζει τα όρια της ποσότητας $\frac{1}{x}$ καθώς το x τείνει στο μηδέν να μεγαλώνει χωρίς να σταματά πουθενά.

Η τριάδα 0, 1, και ∞ έχουν σημαντική γεωμετρική ερμηνεία στη σειρά των αριθμών ιστορικά: το 0 εκφράζει την αρχή, το 1 το βήμα που χρησιμοποιούμε και το ∞ είναι το σύμβολο που χρησιμοποιήθηκε πολύ μεταγενέστερα των 0 και 1 και σήμερα συμβολίζει τη συμπλήρωση της γραμμής, το γεγονός δηλαδή ότι η γραμμή περιέχει όλους τους αριθμούς.

Από τη σκοπιά της ανάλυσης, έχουν αναδειχθεί οι επτά μορφές απροσδιοριστίας που εμπλέκονται οι αριθμοί 0, 1 και το σύμβολο του ∞ . Αυτές είναι $\frac{0}{0}$, $\frac{\square}{\square}$, $\square \cdot 0$, $1^\square$, 0^0 , $\square^0$ και $\square - \square$.

Όπως και οι υπόλοιπες επιστήμες, έτσι και στα μαθηματικά έφτασαν σε ένα εικονικό σταμάτημα κατά τη διάρκεια του μακρού, σκοτεινού Μεσαίωνα. Δεν ήταν παρά τον 16^ο αιώνα που η έννοια του απείρου, ξεχασμένη επιστημονική έννοια εδώ και καιρό, έχοντας μάλιστα γίνει αντικείμενο θεολογικών εικασιών, υπέστη την αναβίωσή της. Αποτέλεσμα αυτού ήταν ένας αξιοθαύμαστος τύπος για το π , που ακόμη και σήμερα προκαλεί τον θαυμασμό, τον οποίο ανακάλυψε ο Γάλλος μαθηματικός Francois Viete (1540-1603):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Ο παραπάνω τύπος έχει δύο αξιοθαύμαστα χαρακτηριστικά: α) υπολογίζει το π με τη χρήση μόνο του αριθμού 2!!! και β) οι τρεις τελείες του τύπου χρησιμοποιούνται για πρώτη φορά και οι οποίες μας λένε να συνεχίσουμε τη διαδικασία... επ' άπειρον!!! Είναι δηλαδή η πρώτη φορά που μια άπειρη διαδικασία εκφράστηκε ρητά ως μαθηματική φόρμουλα και προανήγγειλε την αρχή μιας νέας εποχής. Από τον τύπο προκύπτει εδώ μια

έννοια μιας άπειρης ποσότητας, πράγμα που δεν είναι πια κάτι δυσοίωνο όπως πίστευαν κάποιοι από τους μεσαιωνικούς στοχαστές επηρεασμένοι κυρίως από τα δόγματα της εκκλησίας, κάποια αόριστη ιδέα που πρέπει να αποφευχθεί με κάθε κόστος, αλλά αντίθετα μπορεί τώρα να τεθεί γραπτώς και έτσι να γίνει νόμιμα δεκτή στο βασίλειο των μαθηματικών. Σύντομα ακολούθησαν κι άλλοι τύποι που απαιτούσαν την άπειρη εφαρμογή αριθμητικών πράξεων, ένας εκ των οποίων αποδίδεται στον Άγγλο μαθηματικό John Wallis (1616-1703), που μην ξεχνάμε ήταν αυτός που χρησιμοποίησε πρώτος το σύμβολο του απείρου ∞ πάλι για την έκφραση του π :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots}$$

Και το 1671 ο Σκωτσέζος μαθηματικός James Gregory (1638-1675), βρήκε τύπο για τον αριθμό π , χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την άπειρη σειρά:

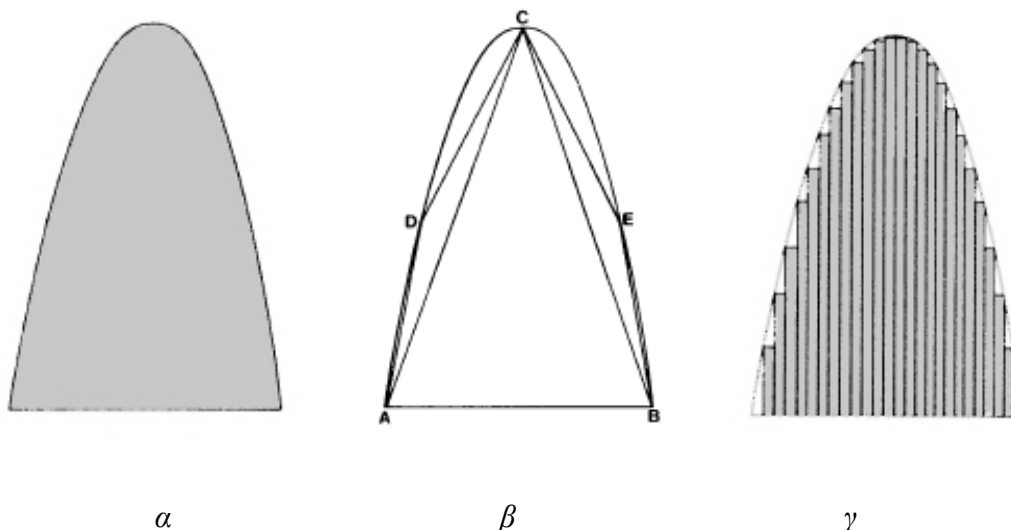
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Η ίδια σειρά ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τον Gregory, το 1674 από τον Γερμανό Gottfried Wilhelm Leibnitz, συνεφευρέτη με τον Newton του απειροστικού λογισμού, και αναφέρεται ως σειρά Gregory - Leibnitz.

Τώρα, είναι γνωστό ότι αλγεβρικοί αριθμοί λέγονται αυτοί που είναι λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές. Για παράδειγμα οι αριθμοί 5, $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$ είναι αλγεβρικοί αφού αποτελούν λύσεις αντίστοιχα των πολυωνυμικών εξισώσεων $x-5=0$, $x^2-2=0$ και $x^2-4x+1=0$. Ένας αριθμός είναι υπερβατικός αν δεν είναι αλγεβρικός. Η υπερβατικότητα του αριθμού π ανακαλύφθηκε το 1882 και είναι αποτέλεσμα της δυναμικής που είχε πια αποκτήσει η χρήση του απείρου, σχεδόν τέσσερις χιλιετίες αναζήτησης μέσα στη φύση αυτού του μοναδικού αριθμού, του π .

1.5. Μέθοδος της εξάντλησης και μέθοδος των αδιαίρετων

Πώς όμως το άπειρο εκδηλώθηκε πάνω σε υπολογισμούς εμβαδών και όγκων στερών στην ιστορία της επιστήμης; Ο μεγάλος Αρχιμήδης εφάρμοζε ήδη τη μέθοδο της εξάντλησης



Σχήμα 3 Μέθοδος της εξάντλησης και των αδιαίρετων

για τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από μία παραβολή (Σχήμα 3β) χωρίζοντας το χώρο κάτω από αυτήν με τη βοήθεια πολυγώνων εγγεγραμμένων στην παραβολή που αυξάνοντας κάθε φορά τον αριθμό των πλευρών, προσεγγίζουν το εμβαδόν της,. Θεωρητικά η διαδικασία τελειώνει στην άπειρη επανάληψη σε πολλά πολύγωνα που τελικά θα ταυτιστούν με την καμπύλη. Από την άλλη μεριά η μέθοδος των αδιαίρετων (indivisibles) που φαίνεται στο Σχήμα 3γ πρωτοεμφανίστηκε από τους Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630) και Bonaventura Cavalieri (1598-1647) με έμφαση στο έργο του τελευταίου με τίτλο *Geometria indivisibiles continuorum*, που δημοσιεύτηκε το 1635. Ο Sir Isaac Newton (1642-1727) και ο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ήταν που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο που βασίστηκε ο σύγχρονος διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός όπως προφανώς γίνεται αντιληπτό από το σχήμα 3 με χωρισμό σε στοιχειώδη εμβαδά, μια μέθοδος που αναπτύσσεται εύκολα και για έναν μέτριο μαθητή τρίτης Λυκείου! Και αφού πια το χαρακτηριστικό της νέας μεθόδου αποτελούσε το στοιχειωδώς μικρό, το απειροελάχιστο, πολλές αντιπαραθέσεις αναδύθηκαν με βασικό εκφραστή τον Άγγλο μαθηματικό και επίσκοπο George Berkeley

(1685-1753). Παρά τις ενστάσεις όμως, η εμπειρία έδειξε ότι χωρίς την τεχνογνωσία του λογισμού των Newton και Leibniz με τη χρήση λογικών σχετικά με το άπειρο και το απειροελάχιστο, ελάχιστα από τα σημερινά τεχνολογικά κατορθώματα του ανθρώπου θα είχαν επιτευχθεί και οι τεράστιες επιστημονικές εφαρμογές του λογισμού δεν θα είχαν ξεδιπλωθεί.

1.6. Άπειρο και σύγκλιση

Οι αρχαίοι λέγεται ότι είχαν μια μυθική ευλάβεια για τους μεγάλους αριθμούς, οι οποίοι γι' αυτούς συμβόλιζαν τη δύναμη και τη γονιμότητα (ο μεγαλύτερος αριθμός με ένα ανεξάρτητο όνομα έξω από το δεκαδικό σύστημα ονοματολογίας είναι η βουδιστική asankhyera, ίση με 10^{140}). Οι φυσικοί έχουν υιοθετήσει έναν συμβολισμό που το μέγεθος ενός αριθμού φαίνεται από τη δύναμη που είναι υψωμένο το 10, έτσι για παράδειγμα ο αριθμός 123.000.000 γράφεται $1,23 \cdot 10^8$. Επίσης, πολύ μικροί αριθμοί γράφονται με αρνητικές δυνάμεις του 10, ο 0,000123 για παράδειγμα γράφεται $1,23 \cdot 10^{-6}$. Τώρα πολύ μεγάλοι αριθμοί δεν έχουν σχέση με το άπειρο, όπως οι αρχαίοι λαοί πίστευαν. Μια μεταβλητή ποσότητα λέγεται ότι πλησιάζει το άπειρο αν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από κάθε πεπερασμένο αριθμό, άρα το άπειρο δεν είναι καθόλου αριθμός, αλλά μια έννοια.

Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται τώρα στις άπειρες σειρές, ιδιαίτερα στη σύγκλισή τους. Και επανερχόμενοι στο παράδοξο του δρομέα του Ζήνωνα καταλήγει κανείς ξανά στον υπολογισμό της σειράς

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

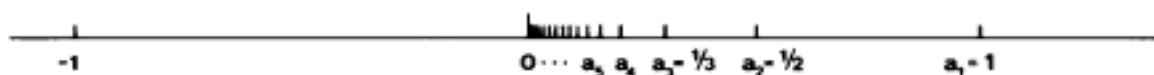
που κάθε φορά προσθέτουμε το μισό της υπολειπόμενης απόστασης μέχρι το τέρμα της διαδρομής. Σήμερα γνωρίζουμε ότι η σειρά συγκλίνει στο 1 και αυτό που ο Ζήνων και γενικά οι στοχαστές της εποχής του αρνούνταν να δεχθούν ήταν το γεγονός πως μια άπειρη σειρά θα μπορούσε να δώσει αποτέλεσμα έναν πεπερασμένο αριθμό, δηλαδή αυτό που λέμε σήμερα να συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο.

Η έννοια του απείρου ή του απειροελάχιστου έδωσε όχι μόνο λύσεις στα παράδοξα αλλά και ώθηση στο νέο οικοδόμημα του λογισμού, διαφορικού και ολοκληρωτικού. Για παράδειγμα η ακολουθία

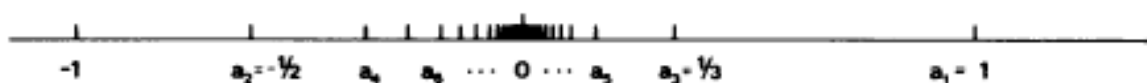
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n}$$

έχει όριο τον αριθμό 0, όμως τι γίνεται με το όριο της ακολουθίας

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \dots ;$$



Σχήμα 4 Ακολουθία που συγκλίνει στο 0 από δεξιά



Σχήμα 5 Ακολουθία που συγκλίνει στο 0

Στα Σχήματα 4 και 5 παρατηρούμε ότι για την πρώτη ακολουθία ισχύει

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$ καθώς $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ είναι ο γενικός όρος της δεύτερης ακολουθίας. Τέλος η ακολουθία:

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

συγκλίνει στο 1 με "άλματα" αφού οι τιμές της ταλαντεύονται. Το ζευγάρι των γενικών της όρων είναι $\frac{n+1}{n}, \frac{n}{n+1}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Ας διακόψουμε όμως προς στιγμήν τη μελέτη των απείρων σειρών για να εξετάσουμε λίγο την ύπαρξη των πρώτων αριθμών και πώς αυτοί κατανέμονται στο απειροσύνολο των φυσικών. Οι πρώτοι αριθμοί είναι τα δομικά στοιχεία που τα γινόμενά τους φτιάχνουν το

σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, παίζουν τον ρόλο ας πούμε των χημικών στοιχείων του περιοδικού πίνακα στην κατασκευή όλου του φυσικού κόσμου. Ωστόσο υπάρχουν δύο στοιχεία που κάνουν αυτή την αναλογία ατελή: α) Πρώτον σε αντίθεση με τα χημικά στοιχεία, υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί και β) Δεύτερον, δεν υπάρχει περιοδικός πίνακας πρώτων αριθμών αφού αυτοί είναι κάπως άτακτα διασκορπισμένοι στο σύνολο των φυσικών. Η απόδειξη της ύπαρξης άπειρων πρώτων είναι γνωστή από τον τρίτο π. Χ. αιώνα σε μία υπέροχης ομορφιάς απόδειξη: Έστω πεπερασμένοι πρώτοι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ με $\alpha_1=2, \alpha_2=3, \dots$ και α_N ο τελευταίος πρώτος, με τη διάταξη $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_N$. Τότε ο αριθμός $k = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_N + 1$ δεν διαιρείται με κανέναν από τους πρώτους, άρα θα πρέπει και αυτός να είναι πρώτος. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $k > \alpha_N$. Η διασπορά των πρώτων αριθμών ανάμεσα στο σύνολο των φυσικών αριθμών έχει απασχολήσει σειρά επιστημόνων και δεν έχει βρεθεί ακόμη και σήμερα ένας τύπος της πυκνότητας αυτών. Όμως το 1896 ο Jaques Hadamard (1866-1962) και ο de la Vallee O Poussin (1866-1962) επιβεβαίωσαν μια εικασία που έγινε σχεδόν έναν αιώνα νωρίτερα από τον Carl Friedrich Gauss (1777-1855) σχετικά με τη στατιστική κατανομή των πρώτων αριθμών, που λέει ότι ο αριθμός των πρώτων που βρίσκονται κάτω από έναν δεδομένο ακέραιο N τείνει στον αριθμό $\frac{N}{\ln N}$. Για την ακρίβεια αν $\pi(N)$ εκφράζει το πλήθος αυτών ισχύει ότι $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi(N)}{N/\ln N} = 1$, άρα γενικά μιλώντας $\pi(N)$ γίνεται περίπου ίσο με $\frac{N}{\ln N}$ για N να τείνει στο άπειρο.

Προβληματισμός υπάρχει και για τους λεγόμενους «δίδυμους πρώτους» της μορφής $p, p+2$ όπως οι: 3 και 5, 5 και 7, 11 και 13, ... , 29671 και 29673, Είναι άραγε άπειρα τα δίδυμα ζευγάρια πρώτων; Όλες οι άπειρες αποδείξεις του ισχυρισμού έχουν αποτύχει. Το 1981 το μεγαλύτερο ζευγάρι δίδυμων πρώτων ήταν το: 140.737.488.353.699 και 140.737.488.353.701. Την επόμενη χρονιά το μεγαλύτερο ζευγάρι δίδυμων πρώτων ήταν το $1.159.142.985 \times 2^{2304} \pm 1$. Το 1986 ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος ήταν ο $2^{216.091} - 1$ με 65.050 ψηφία.

1.7. Άπειρο και αρμονική σειρά. Άπειρο και γεωμετρική σειρά

Η αρμονική σειρά $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ είναι το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών και το αξιοπερίεργο εδώ είναι ότι αν και προσθέτουμε ολοένα και μικρότερους αριθμούς της μονάδας, αυτή δεν συγκλίνει! Πρώτος έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα ο Γάλλος σχολάρχης Nicolae Oresme (1323-1382) με μια απόδειξη που έχει μείνει η ίδια έως σήμερα! Το άθροισμα των πρώτων χιλίων όρων είναι 7,49, του πρώτου εκατομμυρίου όρων 14,36, του πρώτου δισεκατομμυρίου όρων 21 και του πρώτου τρισεκατομμυρίου όρων περίπου 28. Το ερώτημα που τίθεται είναι: πόσους και ποιούς όρους μπορεί κανείς να αφαιρέσει από την αρμονική σειρά ώστε το άθροισμα των εναπομεινάντων όρων να συγκλίνει. Έχει αποδειχθεί ότι αν αφαιρέσουμε από τη σειρά, τους όρους με παρονομαστή σύνθετο αριθμό, αυτή θα εξακολουθεί να αποκλίνει! Ενώ αν αφαιρέσουμε όλα τα κλάσματα που περιέχουν το ψηφίο 9 στον παρονομαστή όπως 9, 19, 199, 92, 199, 9192 κ.λπ. τότε η προκύπτουσα σειρά συγκλίνει ανάμεσα στους αριθμούς 22,4 και 23,3!.

Τέλος, καθώς $N \rightarrow \infty$, η έκφραση $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}) - \ln N$ τείνει σε ένα πεπερασμένο όριο, γνωστό ως σταθερά του Euler, που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα «γ» και είναι περίπου 0,57722. Είναι ακόμη και σήμερα άγνωστο αν ο αριθμός γ είναι ρητός ή άρρητος.

Αν η αρμονική είναι η πιο γνωστή αποκλίνουσα σειρά, η γεωμετρική είναι η γνωστότερη συγκλίνουσα σειρά και έχει την μορφή:

$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots$ η οποία είναι γνωστό από το Λύκειο ότι συγκλίνει στον αριθμό $\frac{a}{1-q}$ αν και μόνο αν $-1 < q < 1$.

Μια εξαιρετική εφαρμογή της άπειρης αυτής σειράς γίνεται για τον αριθμό 0,9999..... που γράφεται και $0,9\bar{9}$. Ο αριθμός αυτός είναι $0,999\dots = 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \dots$ που για $a=9/10$ και $q=1/10$ είναι η άπειρη γεωμετρική σειρά που συγκλίνει στον αριθμό $a/(1-q) = 0,9/(1-0,1) = 1$ και άρα μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι $0,9999\dots=1$., δηλαδή είναι ίσος με 1, όχι περίπου 1, αλλά ακριβώς 1!

1.8. Πώς το άπειρο και τα παράδοξά του επηρέασε την εξέλιξη της θεωρίας των σειρών

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η γεωμετρική σειρά $a+aq+aq^2+\dots$ για τις τιμές του q να πλησιάζουν τους αριθμούς 1 και -1. Έτσι:

- για $a=1$ και $q=1$ παίρνουμε τη σειρά $1+1+1+\dots$ που προφανώς αποκλίνει
- για $a=1$ και $q=-1$ παίρνουμε τη σειρά $1-1+1-1+1-\dots$

Εδώ και αιώνες η έννοια της άπειρης επανάληψης $1-1$ έδωσε αντιφατικά αποτελέσματα με αποκορύφωμα τον ισχυρισμό του Leibniz ότι αφού αυτή η σειρά μπορεί να δίνει 0 ή 1 ως αποτέλεσμα με ίση πιθανότητα, η πραγματική τιμή της θα πρέπει να είναι ίση με το μέσο όρο τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$! Σήμερα γνωρίζουμε ότι μια τέτοια αποκλίνουσα σειρά δεν έχει συγκεκριμένο άθροισμα και κάθε προσπάθεια να της δοθεί μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Από τους πρώτους που αναγνώρισε αυτό το γεγονός ήταν ο Νορβηγός μαθηματικός Niels Abel (1802-1829) που το 1828 έγραψε: «Οι αποκλίνουσες σειρές είναι εφεύρεση του διαβόλου· χρησιμοποιώντας τις μπορεί κανείς να καταλήξει σε όποιο συμπέρασμα θέλει για αυτό και έχουν προκαλέσει τόσες πολλές πλάνες και τόσα παράδοξα». Κάτι τέτοιο φαίνεται και για την σειρά $1-1+1-1+\dots$ από τις τρεις εκδοχές που ακολουθούν και στηρίζονται στον διαφορετικό τρόπο που μπορούν να γραφούν:

1^{ov} $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots=1$, αφού άπειρες επαναλήψεις των παρενθέσεων δίνει ανάλογα μηδενικά

2^{ov} $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0$, για τον ίδιο λόγο

3^{ov} Αν θέσουμε $S=1-1+1-1+\dots$ όλη τη σειρά τότε: $S=1-(1-1+1-1+\dots)=1-S \Rightarrow S=1-S \Rightarrow 2S=1 \Rightarrow S=\frac{1}{2}$.

Επιστρέφοντας στην αρμονική σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ έχουμε δει ότι αποκλίνει. Τι γίνεται όμως αν οι παρανομαστές υψωθούν στο τετράγωνο; Το μυστήριο έλυσε το 1736 ο μεγάλος Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler (1707-1783) με ένα απροσδόκητα κομψό αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

όπου προσεγγίζει τον αριθμό π με μια σειρά φυσικών μόνο αριθμών!

Με παρόμοιες μεθόδους όπως αυτές της απόδειξης για την προηγούμενη σειρά ο Euler κατάφερε να βρει αθροίσματα πολλών άλλων άπειρων σειρών που αφορούσαν φυσικούς αριθμούς και να τα συγκεντρώσει το 1748 στο μνημειώδες έργο του "*Indoduction in analysin infinitorum*" που θεωρείται θεμέλιο της σύγχρονης ανάλυσης. Μεταξύ άλλων αναφέρει την άθροιση της σειράς

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$$

για όλους τους άρτιους φυσικούς k από το 2 έως το 26. Για το $k=26$ το άθροισμα είναι:

$$\frac{2^{24} \cdot 76,977,927 \cdot \pi^{26}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 27}$$

Η ίδια σειρά για τις περιττές τιμές του φυσικού k είναι πολύ πιο δύσκολη περίπτωση και μέχρι πρόσφατα, το 1978 αποδείχθηκε ότι το άθροισμα της σειράς είναι περίπου 1202. Είναι όμως γνωστό πως για $k > 1$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $k \leq 1$ αποκλίνει.

Ο Euler βέβαια δεν ήταν ο μόνος που ασχολήθηκε με μια άπειρη σειρά που έχει σχέση με το π . Έχουμε ήδη αναφέρει τη σειρά του Gregory του 1671:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

αν όμως προσπαθήσει κανείς να υπολογίσει την τιμή του π θα απογοητευθεί: η σειρά συγκλίνει τόσο αργά ώστε απαιτεί 628 όρους για να προσεγγίσει το π με προσέγγιση εκατοστού (δηλαδή σε 3,14), ενώ πολύ πιο πρακτικός είναι ο τύπος:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

που είναι η σειρά Euler για $\kappa=4$ που συγκλίνει πολύ γρήγορα. Αυτές οι παρατηρήσεις αφορούν το ζήτημα του ρυθμού σύγκλισης, ζήτημα που έχει καταστεί ιδιαίτερα σημαντικό από την εμφάνιση του υπολογιστή. Η σύγκλιση άπειρων σειρών έδωσε μερικά από τα πιο αξιοσημείωτα παράδοξα του απείρου που απασχόλησαν τους μαθηματικούς του 17ου και 18ου αιώνα, ακριβώς όπως τα παράδοξα της κίνησης είχαν προβληματίσει τους Έλληνες φιλοσόφους (Ζήνων, Αριστοτέλης) δύο χιλιάδες χρόνια νωρίτερα.

Ας δούμε τώρα ένα ακόμη παράδοξο του απείρου: πώς η αναδιάταξη των όρων μιας άπειρης σειράς μπορεί να επηρεάσει το όριο στο οποίο συγκλίνει η σειρά ή ακόμα και να μετατρέψει μια συγκλίνουσα σειρά σε αποκλίνουσα! Έτσι, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με $1/2$ τότε παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Η τελευταία σχέση όμως αποτελεί αναδιάταξη της πρώτης σχέσης οπότε για να ισχύουν και οι δύο θα πρέπει $1=3/2$! Η αιτία του παράδοξου βρίσκεται στο γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει αποκλειστικά και μόνο επειδή οι όροι της έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα και κατά συνέπεια "αντισταθμίζουν" μερικώς ο ένας τον άλλον. Αν όμως είχαμε τους όρους κατ' απόλυτη τιμή (δηλαδή όλους θετικούς) τότε θα είχαμε την αρμονική σειρά, που αποκλίνει. Συνεπώς επειδή μόνο σε απόλυτα συγκλίνουσες σειρές αποδεικνύεται στον λογισμό ότι μπορεί να γίνεται αναδιάταξη των όρων χωρίς να επηρεάζεται το άθροισμα, εδώ η αναδιάταξη είχε καταστροφικά αποτελέσματα.

Όλες οι σειρές που έχουν ως τώρα αναφερθεί ανήκουν σε μία μεγάλη και σημαντική κατηγορία άπειρων σειρών γνωστών ως δυναμοσειρών με γενική μορφή:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Έτσι η γεωμετρική σειρά $1+x+x^2+\dots$ είναι δυναμοσειρά με όλα τα $a_n=1$ και για να συγκλίνει θα πρέπει το x να πάρει τιμές ανάμεσα στο -1 και το 1 . Ομοίως, η αρμονική

σειρά $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ είναι εφαρμογή της δυναμοσειράς $x + x^2/2 + x^3/3 + \dots$

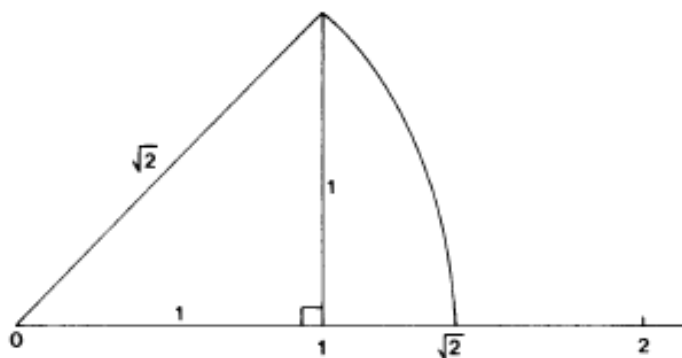
για $x=1$. Για την πλήρη μελέτη της σύγκλισης των δυναμοσειρών θα πρέπει κανείς να επεκταθεί από το σύνολο των πραγματικών στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Μάλιστα κάθε σειρά συγκλίνει σε έναν κύκλο σύγκλισης, ενώ έξω από αυτόν αποκλίνει. Για παράδειγμα, η γεωμετρική σειρά $1+z+z^2+\dots$, για $z=x+yi$ έχει κύκλο σύγκλισης με κέντρο το O και ακτίνα 1 και συγκλίνει για κάθε σημείο του κύκλου αυτού. Με την ανακάλυψη όλων των παραπάνω από τον Γάλλο μαθηματικό Augustine Louis Cauchy (1789-1857) το 1831 επήλθε η πλήρης κατανόηση των άπειρων σειρών και αυτές έγιναν αναπόσπαστο τμήμα κάθε κλάδου των μαθηματικών. Το επόμενο βήμα ήταν η εξερεύνηση μιγαδικών συναρτήσεων με μιγαδική μεταβλητή $z=x+yi$, κυρίως δε των τριγωνομετρικών μιγαδικών συναρτήσεων. Τεράστια ήταν η συνεισφορά τέτοιων συναρτήσεων στη φυσική και ειδικά στην ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας.

1.9. Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

Προς τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, ο μακρύς αγώνας για την κατανόηση της έννοιας του απείρου έφθανε σε μια επιτυχή κατάληξη και η ιδέα στάθηκε πια σε σταθερά θεμέλια. Ήταν τότε που ένας νέος και σχετικά άγνωστος μαθηματικός ήρθε στη σκηνή ταρακουνώντας τα θεμέλια αυτά. Το όνομά του ήταν Georg Cantor.

Ξεκινώντας την ιστορία των αριθμών από την αρχή, κάποιοι από τους αρχαίους Έλληνες όπως οι Πυθαγόριοι πίστευαν ότι η φύση είναι δομημένη με λόγους, με κλάσματα ακέραιων αριθμών, δηλαδή όπως σήμερα θεωρούνται από ρητούς αριθμούς. Η πιο γνωστή σχολή, αυτή των Πυθαγόρειων, έχοντας δημιουργήσει στην πραγματικότητα μια μυστικιστική κοινωνία, είχε τεράστια επιρροή στην ιστορία των μαθηματικών για πάνω από δύο χιλιάδες χρόνια! Είχαν στο ενεργητικό τους το πασίγνωστο Πυθαγόρειο Θεώρημα, είχαν όμως επίσης ανακαλύψει ότι παρ' ότι οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί, υπήρχαν χάσματα ή «τρύπες» ανάμεσά τους στη γραμμή αναπαράστασής τους, μια ανακάλυψη που αποδίδεται προσωπικά στον Πυθαγόρα. Κάποια μέρα οι Πυθαγόρειοι, λέγεται ότι ήταν μάλλον ο ίδιος ο Πυθαγόρας, βρήκαν πως υπάρχει κάποιος αριθμός ασύμμετρος προς τη μονάδα, δηλαδή ασύμμετρος με τους ρητούς αριθμούς, ο $\sqrt{2}$. Η

εφεύρεση ήταν εύκολο να την αντιληφθεί κανείς αφού στο Πυθαγόρειο Θεώρημα $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, βάζοντας $\alpha = \beta = 1$ παίρνουμε $\gamma^2 = 2$ ή $\gamma = \sqrt{2}$. Η μυστική συμφωνία της σχολής του Πυθαγόρα ήταν να κρατήσουν το μη βολικό αυτό συμπέρασμα προς τις αντιλήψεις της σχολής μυστικό, όμως ένας μαθητής, ο Ίππασος, ο μύθος λέει ότι μόλις το φανέρωσε στον έξω κόσμο ρίχτηκε από πλοίο στο βυθό της Μεσογείου από τους συμμαθητές του και πνίγηκε. Υπάρχει μάλιστα μια υπέροχη γεωμετρική απόδειξη της ύπαρξης του $\sqrt{2}$ ανάμεσα στους ακεραίους 1 και 2 στο Σχήμα 6 που μόνο με κανόνα και διαβήτη (κρατώντας την ελληνική παράδοση) φαίνεται η θέση που ο άρρητος $\sqrt{2}$ καταλαμβάνει στην ευθεία των αριθμών.



Σχήμα 6 Θέση του $\sqrt{2}$ ανάμεσα στο 1 και το 2

Υπάρχει όμως και άλλος λόγος να εισάγει κανείς τους άρρητους αριθμούς στα μαθηματικά. Αυτός είναι ότι οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι κλειστές στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών. Είναι όμως κλειστές μόνο για πεπερασμένο αριθμό πράξεων. Όπως πριν έχει αποδειχθεί ισχύουν οι τύποι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad \text{που συγκλίνει στο } \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{ενώ το άπειρο γινόμενο} \\ (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots) / (1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots) \text{ στο } \frac{\pi}{2}.$$

Δηλαδή έχουμε πράξεις ρητών αριθμών με αποτέλεσμα άρρητους αριθμούς, αφού η κλειστότητα των πράξεων καταργείται αν οι όροι είναι άπειροι.

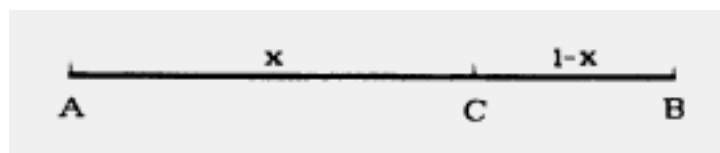
Σήμερα, είναι γνωστό ότι οι ρίζες όλων των πρώτων αριθμών: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... και των περισσοτέρων σύνθετων: $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, ... είναι άρρητοι, όπως και οι αριθμοί π και e και συνδυασμοί αυτών. Μια πλήρως ικανοποιητική θεωρία περί άρρητων δόθηκε το 1872, όταν ο Richard Dedekind (1831-1916) δημοσίευσε το διάσημο δοκίμιό του "Continuity and Irrational Numbers" (Συνέχεια και Άρρητοι Αριθμοί).

Αξίζει τέλος κανείς να δει τα τρία είδη αναπαράστασης αριθμών με δεκαδικά ψηφία: α) αυτών που τερματίζουν, όπως το 0,5 β) αυτών που τα δεκαδικά τους ψηφία επαναλαμβάνονται, δηλαδή των περιοδικών αριθμών, όπως το 0,121212... ή $0,\overline{12}$ και γ) αυτών που ούτε τερματίζονται ούτε επαναλαμβάνονται περιοδικά, όπως ο αριθμός 5,101001000100001... Αποδεικνύεται ότι τα πρώτα δύο είδη είναι ρητοί αριθμοί, αφού $0,5=1/2$ και $0,\overline{12}=4/33$ ενώ το τρίτο είδος είναι άρρητοι αριθμοί.

1.10. Η συνεισφορά του απείρου στην ανακάλυψη των υπερβατικών αριθμών π , ϕ και e

Ως γνωστόν ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ιστορικά ο πρώτος άρρητος αριθμός που ανακαλύφθηκε. Για το π , ήδη έχει γίνει μια εκτενής παρουσίαση γνωρίζοντας ότι ο Αρχιμήδης προσδιόρισε την τιμή του μεταξύ του $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$. Το 1761 ο Ελβετός μαθηματικός Johann Heinrich Lambert (1728-1777) καθόρισε ότι ο π είναι άρρητος.

Τώρα από το Σχήμα 7 παρατηρεί κανείς ότι αν $AB=1$, το σημείο C χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει :



Σχήμα 7 Χρυσή τομή

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ τότε το C λέμε ότι διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο ίσο με την αποκαλούμενη "χρυσή τομή". Η τιμή του λόγου αυτού συμβολίζεται με το ελληνικό

γράμμα ϕ και είναι περίπου 0,61803. Αυτό συμβαίνει γιατί: $\phi=1/x = x/(1-x)$ και λύνοντας το τριώνυμο $x^2+x-1=0$ η θετική ρίζα του ισούται με $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, δηλαδή 0,61803... Άρα $\phi=0,61803$ δεν τερματίζεται αλλά έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Στην αρχαία Ελλάδα ο αριθμός ϕ ήταν από τους πιο "όμορφους" αριθμούς και συμβόλιζε το κάλος και την αισθητική αρμονία της φύσης.

Ο αριθμός e είναι ο μόνος από τους π , ϕ και e που δεν ήταν γνωστός στους αρχαίους Έλληνες. Αποτελεί τη βάση των φυσικών λογαρίθμων και είναι το όριο στο άπειρο της παράστασης $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$. Η τιμή του e είναι περίπου 2,71828... και δεν είναι περιοδικός. Εδώ πρέπει να γίνει διαχωρισμός μεταξύ των άρρητων αριθμών. Οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και ϕ είναι αλγεβρικοί άρα λύσεις όπως ήδη έχει αναφερθεί των πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές αντίστοιχα: $x^2-2=0$ και $x^2-x-1=0$. Αριθμοί που δεν είναι λύσεις τέτοιων εξισώσεων λέγονται υπερβατικοί (transcendental) και σε αυτούς ανήκουν οι π και e . Ο πρώτος υπερβατικός αριθμός ανακαλύφθηκε το 1844 από τον Γάλλο μαθηματικό Joseph Liouville (1809-1882) και αυτός ήταν ο:

$$10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots$$

ή 0,110001000....

Την εποχή εκείνη τέτοιοι περίεργοι αριθμοί θεωρούνταν εξαιρέσεις και παραδοξότητες, αλλά το 1874 ο Georg Cantor έδειξε ότι όχι μόνο δεν αποτελούν εξαιρέσεις αλλά οι περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί είναι στην πραγματικότητα υπερβατικοί. Με άλλα λόγια, παρόλο που υπάρχουν άπειροι αλγεβρικοί αριθμοί και άπειροι υπερβατικοί, οι τελευταίοι είναι στην πραγματικότητα περισσότεροι από τους πρώτους, δείχνοντας για πρώτη φορά την ύπαρξη διαφορετικών τύπων απείρου.

Ένας από τους ομορφότερους τύπους των μαθηματικών ανακαλύφθηκε το 1748 από τον Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707-1783): $e^{\pi i}+1=0$ που με έναν άλλον τρόπο συνέδεσε τα πιο πολυχρησιμοποιούμενα μαθηματικά σύμβολα όπως το e , το π , το 0, το 1 και το i : τη φανταστική μονάδα των μιγαδικών! Μερικοί εξαιρετικοί τύποι με άπειρες

σειρές ή άπειρα γινόμενα φαίνονται στον Πίνακα 1 που ακολουθεί, σχετικά με τους αριθμούς π , e και ϕ :

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Άπειρη ρίζα (άγνωστος εφευρέτης)

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Άπειρα συνεχόμενα κλάσματα
(άγνωστος εφευρέτης)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}$$

Άπειρα συνεχόμενα κλάσματα
(William Brouncker, 1655)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Άπειρο γινόμενο
(Francois Viete, 1593)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots}$$

Άπειρο γινόμενο
(John Wallis, 1650)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Άπειρη σειρά (James Gregory, 1671)

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Άπειρη σειρά (Leonard Euler, 1736)

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Άπειρη σειρά (Leonard Euler, 1748)

Πίνακας 1 Διάφοροι τύποι σειρών

1.11. Η εμφάνιση του Georg Cantor και το άπειρο στο προσκήνιο

Ο Georg Cantor γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας στις 3 Μαρτίου 1845 από πατέρα εβραϊκής κοινότητας της Δανίας και μητέρα της εβραϊκής κοινότητας της Αυστροουγγαρίας. Σε ηλικία 11 ετών, μετά από μια ασθένεια του πατέρα του, όλη η οικογένειά του μετακόμισε στην Γερμανία ώστε κυρίως ο πατέρας του να έχει ηπιότερους χειμώνες από την Ρωσία. Από εκεί στο πανεπιστήμιο του Halle όπου το 1874 δημοσίευσε το πρώτο σημαντικό έργο του σχετικά με το άπειρο. Οι απόψεις του Cantor ήρθαν να ανατρέψουν όλες τις καθιερωμένες αντιλήψεις περί απείρου που ίσχυαν πριν από αυτόν. Διέλυσε την άποψη περί διάκρισης μεταξύ δυνητικού και πραγματικού απείρου. Για να το πετύχει αυτό έπρεπε πρώτα να θεμελιώσει μια θεωρία συνόλων που να υποστηρίζει τις ιδέες του για το άπειρο. Κατόπιν μέσω αυτής της θεωρίας απέδειξε ότι δεν υπάρχει ένα μόνο άπειρο, αλλά διαφορετικές τάξεις απείρου που μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, υπάρχει δηλαδή μια ολόκληρη ιεραρχία μεταξύ των τάξεων του απείρου που έχουν τα σύνολα. Επειδή η παρουσίαση τέτοιων "περίεργων" απόψεων κατά τον δέκατο ένατο αιώνα δεν ήταν τίποτα λιγότερο από πράξη εξέγερσης απέναντι στα δόγματα των σπουδαιότερων μαθηματικών της εποχής, του ασκήθηκε έντονη κριτική, πραγματική καταίγίδα με μανία που έμελε να επηρεάσει την υγεία του στα τελευταία τραγικά χρόνια της ζωής του, όταν μπαινόβγαине στα σανατόρια εκτεθειμένος ταυτόχρονα σε ακραία φτώχεια.

Ο Cantor βάσισε τα συμπεράσματά του σε δύο απίστευτα απλές έννοιες: αυτή του συνόλου και της ένα προς ένα αντιστοίχισης. Ένα σύνολο είναι απλά μια συλλογή αντικειμένων όπως τα παιδικά παιχνίδια, τα γράμματα της αλφαβήτου ή οι αριθμοί 1, 2, 3... Το τελευταίο είναι ένα παράδειγμα απείρου συνόλου με άπειρα πολλά στοιχεία. Τώρα αν πάρει κανείς το σύνολο με τα στοιχεία α, β, γ και ένα άλλο σύνολο με στοιχεία τα 1, 2, 3 μπορεί να κάνει μία ένα προς ένα (1-1) αντιστοίχιση μεταξύ των δύο συνόλων και αυτό μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε σύνολα, όταν αυτά είναι πεπερασμένα. Στην περίπτωση των απειροσυνόλων όμως ο Cantor προχώρησε σε καινοτόμες ιδέες όπως η 1-1 αντιστοίχιση του συνόλου των φυσικών αριθμών με το σύνολο των άρτιων αριθμών που αποτελεί υποσύνολο των φυσικών! Διατύπωσε την ιδέα τότε ότι αν ένα σύνολο μπορεί να τεθεί σε μία 1-1 αντιστοίχιση με το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο, μπορεί να μετρηθεί σε ελεύθερη μετάφραση, με την αντίληψη της μέτρησης που ο άνθρωπος έχει

για τους φυσικούς αριθμούς: 1, 2, 3,... Έπεσε τότε η ριζωμένη άποψη στο κέντρο της μαθηματικής σκέψης που πρώτος ο Ευκλείδης είχε διατυπώσει: "Το σύνολο είναι μεγαλύτερο από το μέρος" και πια το άπειρο καθορίστηκε με σαφή τρόπο μακριά από οποιαδήποτε ασάφεια ή και μυστικισμό ακόμα.

Ο Cantor προχώρησε παραπέρα ονομάζοντας τα σύνολα αυτά αριθμήσιμα και ακόμα έδειξε ότι πυκνά σύνολα όπως το σύνολο των ρητών αριθμών, σε μια εξαιρετική αναλαμπή της ανθρώπινης σκέψης, είναι επίσης αριθμήσιμα. Έδωσε μάλιστα και όνομα στην πληθικότητα αυτού του συνόλου με το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου, το "άλεφ": $\aleph_0$. Όλα τα σύνολα της τάξης $\aleph_0$ έχουν ακριβώς τόσα στοιχεία όσα τα σύνολο των φυσικών αριθμών και άρα είναι αριθμήσιμα (denumerable). Εδώ είναι που ο Cantor αναρωτήθηκε αν όλα τα απειροσύνολα είναι αριθμήσιμα, έδειξε όμως ότι υπάρχουν κάποια σύνολα των οποίων τα στοιχεία είναι τόσο πυκνά που να μην μπορούν να μετρηθούν άρα αποτελούν το "συνεχές" με τάξη απείρου μεγαλύτερη από το $\aleph_0$, την c : την τάξη απείρου του συνεχούς! Ισχύει ότι $\aleph_0 < c$. Οι ρηζικέλευθες απόψεις του Cantor και κυρίως ο απλός τρόπος των αποδείξεων των ισχυρισμών του αναλύονται εκτενώς σε επόμενα κεφάλαια αυτής της εργασίας, αποτελώντας κεντρικό σημείο της διατριβής. Με το περίφημο "διαγώνιο θεώρημά" του έφερε τη μαθηματική κοινότητα μπροστά σε κάτι καινούργιο που είναι απορίας άξιον πώς μέχρι τότε δεν είχε κανείς άλλος αντιληφθεί. Επίσης, με το κατασκευαστικό θεώρημα που αποδεικνύει ότι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών από 0 έως το 1 δεν είναι αριθμήσιμο. Επιστρέφοντας στους πληθάριμους του απείρου, το $\aleph_0$ και το c , το ερώτημα που τέθηκε από τον Cantor ήταν αν μπορεί να υπάρχει σύνολο με στοιχεία ανάμεσα στους πληθικούς αριθμούς $\aleph_0$ και c . Η διαίσθησή του έλεγε όχι, όμως ο Cantor δεν μπόρεσε να το αποδείξει ποτέ και η πρόταση έμεινε στην ιστορία ως "πρόταση του συνεχούς". Το ερώτημα επιλύθηκε το 1963 και σαν έκπληξη η υπόθεση αποδείχθηκε αληθής όσο και ψευδής, ανάλογα με τις υποθέσεις που ξεκινάμε. Αυτή η εκπληκτική ανακάλυψη έφερε κύματα σοκ στον μαθηματικό κόσμο που τις επιδράσεις βλέπει κανείς ακόμα και σήμερα. Έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων και αυτή η υπόθεση μπορεί να προστεθεί ως ένα αξίωμα του οποίου την αλήθεια δεχόμαστε ή όχι!

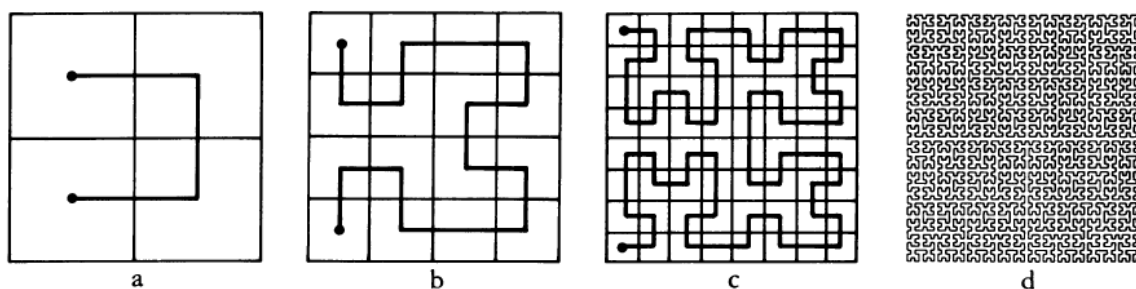
Όλες αυτές οι νέες ιδέες, τα νέα Μαθηματικά που έφερε μαζί του ο Cantor βρήκαν ένθερμους υποστηρικτές αλλά και ορκισμένους εχθρούς. Ο μεγαλύτερος εχθρός του,

βρέθηκε να είναι ένας πρώην δάσκαλός του από το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, ο Leopold Kronecker (1823-1891), φημισμένος μαθηματικός, με συντηρητικές όμως μαθηματικές απόψεις που απέρριπτε όχι μόνο την ιδέα του απείρου, αλλά και οτιδήποτε δεν βασιζόταν άμεσα στους φυσικούς αριθμούς. Η έριδα αυτή Cantor - Kronecker είναι η βασικότερη σπουδή του παρόντος συγγράμματος και αναπτύσσεται εκτενώς σε ξεχωριστό κεφάλαιο. Εκεί γίνεται και εκτενής αναφορά στο γιγαντιαίο έργο του Georg Cantor που σε αυτήν την παράγραφο αναφέρθηκε περιληπτικά.

1.12. Το άπειρο επηρεάζει και τη γεωμετρία

Όπως είναι γνωστό μια ευθεία γραμμή επεκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, προς το άπειρο και αυτή η επέκταση είναι για πολλούς ένα ταξίδι σε έναν μονοδιάστατο κόσμο. Αυτή η απλή ιδέα της απεριόριστης ευθείας γραμμής έδωσε, γύρω στα μέσα του 19ου αιώνα, μια από τις πιο βαθιές επαναστάσεις στη μαθηματική σκέψη: τη δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας.

Πριν από αυτό όμως αξίζει κανείς να δει μερικές περιπτώσεις με παράδοξα από γεωμετρικά σχήματα που εμπλέκουν την έννοια του "γεωμετρικού απείρου", του απείρου που σχετίζεται με τη γεωμετρία. Το 1890 ο Ιταλός Giuseppe Peano (1858-1932) εισήγαγε την καμπύλη που έμεινε γνωστή με το όνομά του, την καμπύλη Peano (Σχήμα 8):

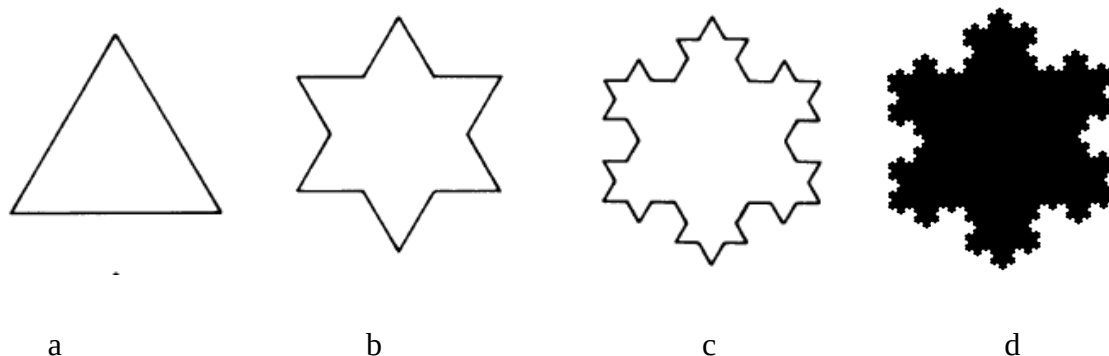


Σχήμα 8 Η καμπύλη Peano

Στο σχήμα (α) έχει χωριστεί το αρχικό τετράγωνο σε 4 τετράγωνα και έχουν ενωθεί τα κέντρα των 4 τετραγώνων. Στο (b) τα τετράγωνα είναι $4 \cdot 4 = 16$ και φαίνεται η αντίστοιχη τεθλασμένη γραμμή. Στο (c) τα τετράγωνα είναι $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ και στο (d) είναι $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ τετράγωνα. Καθώς τα τετράγωνα τείνουν στο άπειρο η τεθλασμένη

γραμμή θα περάσει από όλα τα σημεία του αρχικού τετραγώνου, θα έχει άπειρο μήκος, αλλά θα είναι περιορισμένη σε ένα τετράγωνο πεπερασμένου εμβαδού!

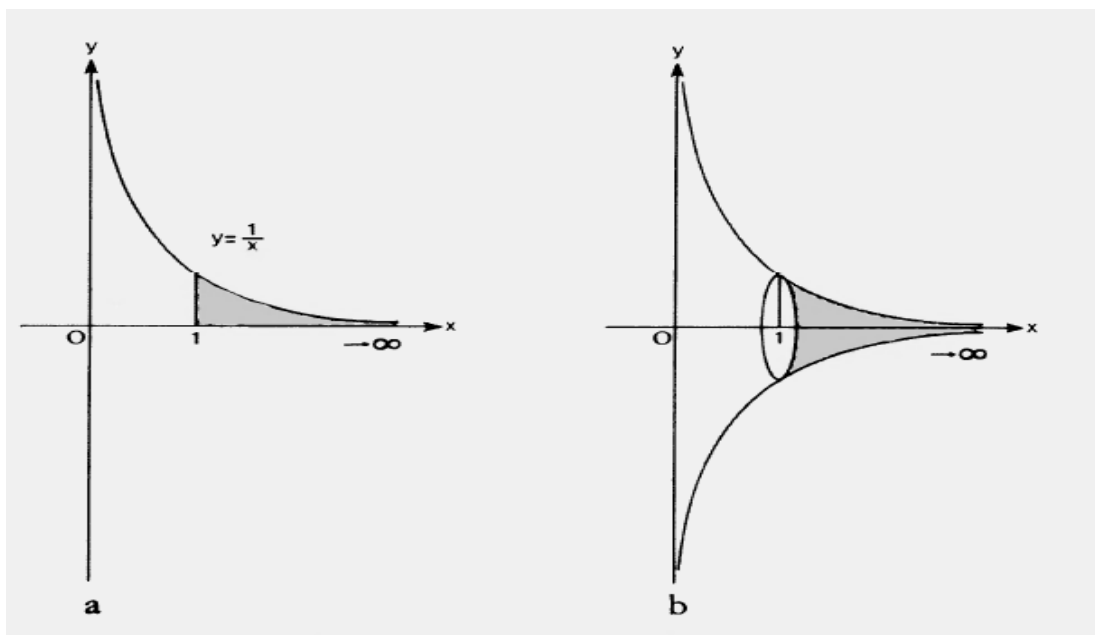
Μια άλλη διάσημη παθολογική περίπτωση καμπύλης είναι η "χιονονιφάδα του Koch" που πήρε το όνομά της από τον εφευρέτη της, τον Σουηδό Helge von Koch (1870-1924) το 1904 (Σχήμα 9):



Σχήμα 9 Η χιονονιφάδα του Koch

Ξεκινώντας στο (α) από ένα ισόπλευρο τρίγωνο αυτό μετατρέπεται στο σχήμα (b) πειράζοντας το ένα τρίτο κάθε πλευράς του και στο σχήμα (c) φαίνεται τι επέρχεται στο αρχικό τρίγωνο μετά από τρία βήματα. Στο σχήμα (d) φαίνεται πώς τείνει να εξελιχθεί το σχήμα μετά από πάρα πολλές επαναλήψεις, Για αριθμό βημάτων που τείνει στο άπειρο η χιονονιφάδα του Koch έχει άπειρη συνοριακή γραμμή, ενώ το εμβαδόν της είναι πεπερασμένο!

Ένα εντυπωσιακό παράδοξο από τη γεωμετρία στερεών σχημάτων φαίνεται στο Σχήμα 10:



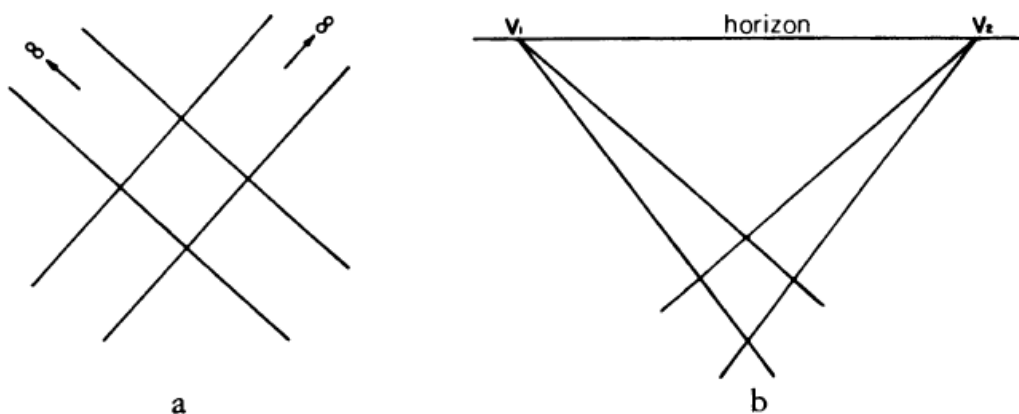
Σχήμα 10 Υπερβολοειδές εκ περιστροφής

Στο (α) φαίνεται ο θετικός κλάδος της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ για x μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Αν τώρα στρέψει κανείς το σχήμα με άξονα περιστροφής τον άξονα x , τότε βλέπει να σχηματίζεται το στερεό του σχήματος (b) που είναι γνωστό ως υπερβολοειδές εκ περιστροφής. Το παράδοξο εδώ είναι ότι ο όγκος που περικλείεται από αυτήν την επιφάνεια είναι πεπερασμένος, αλλά η επιφάνειά του είναι άπειρη.

Το άπειρο επηρέασε τον τρόπο που ο ανθρώπινος νους αντιλαμβανόταν όχι μόνο τις γεωμετρικές έννοιες, αλλά και τομείς σε άμεση σχέση με τη γεωμετρία, όπως η χαρτογράφηση της γης μέσα από τους γεωγραφικούς χάρτες και η τέχνη με πολυποίκιλες εκφράσεις γεωμετρικών απεικονίσεων. Κυρίως όμως οι συνέπειες ήταν άμεσες σ' αυτήν καθ' αυτήν την επιστήμη της γεωμετρίας με μια πολυεπίπεδη έκφραση πολλών ειδών γεωμετρίας, την μη - ευκλείδειων γεωμετριών, που προκάλεσαν επανάσταση.

1.13. Οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες

Η εισαγωγή της έννοιας του απείρου στη γεωμετρία, έδωσε ώθηση σε νέα είδη γεωμετρίας, όπου τώρα, ενδιαφέρον θα είχε η αναζήτηση: τι γίνεται στο άπειρο με δύο παράλληλες ευθείες; Μια τέτοια απάντηση δίνεται στο Σχήμα 11:



Σχήμα 11 Κάτοψη και προοπτική δύο παραλλήλων ευθειών

όπου στο σχήμα (α) φαίνεται η εικόνα δύο ζευγών παράλληλων από ψηλά (κάτοψη) και στο σχήμα (b) προοπτικά. Κάθε ζεύγος παραλλήλων στο επίπεδο καθορίζει ένα σημείο στο άπειρο, που φαίνεται οι δύο γραμμές να συγκλίνουν και το σύνολο όλων των σημείων στο άπειρο αποτελεί τη γραμμή στο άπειρο που ονομάζεται ορίζοντας. Αυτό το νέο είδος γεωμετρίας ονομάζεται προβολική γεωμετρία και το όνομα δόθηκε προς τιμήν του Γάλλου μηχανικού Jean-Victor Poncelet (1788-1867) και το έργο του "*Traite des Proprietes Projectives des Figures*". Αξίζει να σημειωθεί ότι σε καμία περίπτωση η προβολική γεωμετρία δεν έρχεται σε αντίθεση με την κλασσική γεωμετρία, αφού η τελευταία δεν ασχολείται με το άπειρο, αλλά μόνο με πεπερασμένα σημεία. Ο παραδοσιακός ορισμός λέει ότι οι παράλληλες γραμμές δεν συναντώνται σε κανένα πεπερασμένο σημείο. Η προσθήκη των σημείων και της γραμμής στο άπειρο αντικαθιστά αυτήν την αρνητική δήλωση με μια θετική. Η συνάντηση παραλλήλων στο άπειρο δηλώνει κατεύθυνση, όχι καθορισμένο σημείο του πεπερασμένου χώρου όπως όταν συναντώνται δύο μη παράλληλες γραμμές και άρα δεδομένου ότι όλες οι παράλληλες γραμμές μεταξύ τους έχουν την ίδια κατεύθυνση, λογικό είναι να συμφωνήσει κανείς ότι κάθε οικογένεια παραλλήλων ευθειών έχει το δικό της μοναδικό σημείο συνάντησης στο άπειρο. Αξίζει τέλος να σημειωθεί μια θαυμαστή ιδιότητα της προβολικής γεωμετρίας, αυτή της "Αρχής της δυαδικότητας". Σύμφωνα με την αρχή αυτή υπάρχουν πολλά θεωρήματα της θεωρίας που αν αλλάξει κανείς τη θέση δύο εννοιών, αυτά εξακολουθούν να ισχύουν. Για παράδειγμα οι εκφράσεις:

1. Δύο σημεία ορίζουν μια μόνο ευθεία,
2. Δύο ευθείες ορίζουν μόνο ένα σημείο.

Οι έννοιες σημείο και ευθεία άλλαξαν θέση εκατέρωθεν και οι προτάσεις ισχύουν και οι δύο. Προσοχή στην πρόταση 2, η οποία έχει νόημα πια, όχι μόνο για τεμνόμενες, αλλά και για παράλληλες ευθείες που το σημείο που καθορίζουν βρίσκεται στο άπειρο! Εκτός από τον Poncelet και περίπου έναν αιώνα πριν από αυτόν ένας επίσης Γάλλος, επίσης μηχανικός και μαθηματικός ο Girard Desargues (1591-1661) θεωρείται θεμελιωτής της προβολικής γεωμετρίας με έργο που δεν αναγνωρίστηκε τόσο όσο η μεγάλη του συνεισφορά (H. Eves, σελ. 99) [4].

Επιστρέφοντας στον Ευκλείδη και τα αξιώματά του κανένα αξίωμα δεν δέχθηκε τέτοια κριτική, αποδοχή, απόρριψη, αμφισβήτηση, μετάφραση, αναστοχασμό από ότι το περίφημο πέμπτο αξίωμα ή αίτημα:

«Αν μια ευθεία που τέμνει δύο άλλες ευθείες γραμμές σχηματίζει εντός και επί τα αυτά γωνίες συνολικά λιγότερες από δύο ορθές, οι εν λόγω ευθείες, προεκτεινόμενες απεριόριστα, συναντώνται σε εκείνη τη μεριά όπου σχηματίζονται οι γωνίες που είναι λιγότερες από δύο ορθές γωνίες» (D. Davis, σελ.40) [5]

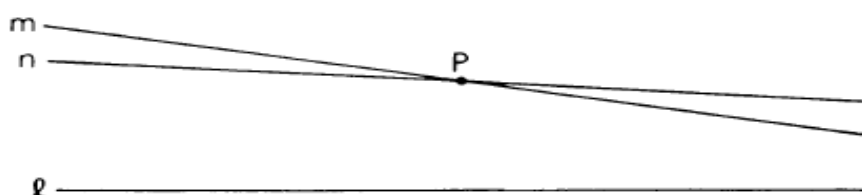
Στο σχολείο όμως οι μαθητές μαθαίνουν μια ισοδύναμη με το πέμπτο αίτημα πρόταση που πρώτος διατύπωσε ο Σκωτσέζος μαθηματικός John Playfair (1748-1819):

«Δοθείσης της ευθείας l και του σημείου P εκτός της l , υπάρχει μόνο μια ευθεία m στο επίπεδο των l και P , που είναι παράλληλη προς την l και περνάει από το P ».

Προς το τέλος του 17^{ου} αιώνα πολλοί μαθηματικοί αμφισβήτησαν την ισχύ του αιτήματος αυτού, ως περιττού. Ο Ιταλός μαθηματικός Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) πρώτος, ενώ έφτασε στην απόδειξη αντιφάσεων που οδήγησε το πέμπτο αίτημα, δεν τόλμησε, ίσως λόγω της εποχής να τα «βάλει» με τον Ευκλείδη. Αυτός που είχε την πνευματική ικανότητα να αντλήσει τα σωστά συμπεράσματα ήταν ο Γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss (1777-1856) που προσπάθησε από τα δεκαπέντε του χρόνια να αποδείξει το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη από τα υπόλοιπα, με αποτυχία. Τότε άρχισε να υποψιάζεται ότι αυτό είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα και δεν μπορεί να αποδειχθεί από αυτά. Ο Gauss όμως είχε το σπάνιο χαρακτηριστικό να μη δημοσιεύει σχεδόν τίποτα από τις ανακαλύψεις του, οπότε δύο νέοι μαθηματικοί, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, ο Ρώσος Nicolai Ivanovich Labachevsky (1793-1856) και ο Ούγγρος Janes

Bolyai (1802-1860) θεμελίωσαν τη γεωμετρία που είναι γνωστή ως «υπερβολική γεωμετρία» κρατώντας τα εννιά από τα δέκα αξιώματα του Ευκλείδη τα ίδια και αντικατέστησαν το πέμπτο αξίωμα με το εξής:

«Από ένα σημείο P που δεν ανήκει σε ευθεία l , υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες m και n , στο επίπεδο των P και l , που δεν τέμνουν την l . Δηλαδή από σημείο εκτός ευθείας, υπάρχουν τουλάχιστον δύο παράλληλες ευθείες προς αυτή" (Σχήμα 12):



Σχήμα 12 Το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη στην υπερβολική γεωμετρία

Όλα τα συμπεράσματα της υπερβολικής γεωμετρίας που εμπλέκονται με τα υπόλοιπα εννιά αξιώματα του Ευκλείδη είναι κοινά με αυτά της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Υπάρχουν όμως και βασικές διαφορές, με κύρια αυτή για το άθροισμα των μοιρών των γωνιών ενός τριγώνου, που στην υπερβολική γεωμετρία είναι μικρότερο από 180° . Μάλιστα, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του τριγώνου, τόσο μικρότερο είναι το άθροισμα, συμπέρασμα που το γεωμετρικό άπειρο άφησε σαφές αποτύπωμα. Σε αυτά τα συμπεράσματα είχε φθάσει και ο Saccheri, δεν τόλμησε όμως να τα υιοθετήσει.

Εκτός όμως από το αξίωμα της παραλληλίας, μεταξύ των αξιωμάτων του Ευκλείδη, υπάρχει και άλλο ένα που συνδέεται άμεσα με το άπειρο. Αυτό είναι το δεύτερο αξίωμα που αναφέρει ότι: *"κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως"* (D. Davis, σελ.79) [5], δηλαδή απειρίοριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις. Τώρα ήταν η σειρά του Γερμανού μαθηματικού Bernard Riemann (1829-1866) να αντικαταστήσει το δεύτερο αίτημα με το: *"κάθε ευθεία γραμμή είναι ασύνορη (unbounded) και πεπερασμένη!"* (D. Davis, σελ.144) [5]. Η γεωμετρία του Riemann ονομάστηκε σφαιρική ή ελλειπτική γεωμετρία και η ασύνορη και πεπερασμένη ευθεία αναφέρεται στην ευθεία γραμμή που προεκτεινόμενη δεν είναι άπειρη, αλλά σε κάποιο σημείο ξανασυναντά το σημείο από όπου ξεκίνησε, έχοντας κάνει έναν κύκλο γύρω από τη σφαίρα! Είναι εκ των πραγμάτων λοιπόν κανείς αναγκασμένος να δεχθεί ότι στη σφαίρα δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες, αφού πάντοτε δύο μεγάλοι κύκλοι θα τέμνονται

πάντοτε. Από τα αξιοθαύμαστα συμπεράσματα της σφαιρικής γεωμετρίας είναι το άθροισμα των μοιρών των γωνιών ενός τριγώνου που είναι τώρα μεγαλύτερο των 180^0 και πάλι επηρεάζεται από το μέγεθος του τριγώνου, όμως δεν ξεπερνάει τις $180,00000001^0$!!!

Στο ταξίδι της γεωμετρίας στον χρόνο, η ανάμειξη με το άπειρο έδωσε πολλές εκδοχές, άλλες με μεγαλύτερη, άλλες με μικρότερη αποδοχή, πάντοτε όμως σε σχέση με τα Ευκλείδεια αιτήματα που σχετίζονται με το άπειρο. Θα δει κανείς και άλλες ακόμα γεωμετρίες, όπως αυτή του Felix Klein (1849-1925) ή του Henry Poincare (1854-1912). Καθώς δε τα μαθηματικά δεν είναι ξεκομμένα από τον φυσικό κόσμο, θα δεχόταν κανείς το συμπέρασμα ότι η γεωμετρία του φυσικού κόσμου είναι μη-ευκλείδεια.

Κλείνοντας τις εναγώνιες προσπάθειες του ανθρώπου να ανακαλύψει τη γεωμετρική αλήθεια, ο Gauss προσπάθησε να φθάσει σε ένα συμπέρασμα σχετικά με το ποιο άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι σωστό: 180^0 από την Ευκλείδεια γεωμετρία, μικρότερο των 180^0 από την υπερβολική γεωμετρία ή μεγαλύτερο των 180^0 από τη σφαιρική. Τοποθέτησε τρεις παρατηρητές σε σχετικά μεγάλες απόστάσεις μεταξύ τους, το αποτέλεσμα όμως ήταν σχεδόν 180^0 με απόκλιση μέσα στα όρια ακρίβειας των οργάνων μέτρησης. Εκεί κατάλαβε ότι αν οι αποστάσεις δεν ήταν μεγάλες όσο οι ουράνιες απόστάσεις της αστρονομίας δεν είχε καμία ελπίδα επιτυχίας. Όμως το 1916 ένας νέος και σχετικά άγνωστος μέχρι τότε φυσικός προέβλεπε στη θεωρία του ότι οι ακτίνες του φωτός θα πρέπει να κάμπτονται με την παρουσία ενός ισχυρού βαρυτικού πεδίου, που δημιουργείται από ένα μεγάλο αστέρι για παράδειγμα. Αυτό σημαίνει ότι ο χωροχρόνος πρέπει να είναι καμπύλη και για να περιγράψει έναν τέτοιο χώρο μαθηματικά, ο νεαρός φυσικός έψαχνε για ένα είδος μη-ευκλείδειας γεωμετρίας και το βρήκε στη γεωμετρία του Riemann. Στις 29 Μαΐου του 1919 σε μια ολική έκλειψη του Ήλιου φωτογράφησε μια περιοχή του ουρανού και όταν αυτές οι φωτογραφικές πλάκες συγκρίθηκαν με φωτογραφίες που έδειχναν την ίδια περιοχή του ουρανού σε κανονική κατάσταση, απέδειξε ότι οι θέσεις των αστεριών βρέθηκαν να έχουν μετατοπιστεί με το ποσό που προέβλεπε η θεωρία του. Ήταν εκείνη η νύχτα που ο δημιουργός της θεωρίας έγινε παγκοσμίως γνωστός: το όνομά του ήταν Albert Einstein και η θεωρία του, η γενική θεωρία της σχετικότητας.

2. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

2.1. Ο προβληματισμός για το άπειρο στην αρχαία Ελληνική σκέψη. Ο Αριστοτέλης

Από τη μεγάλη αρχαία Ελληνική σχολή των φιλοσόφων, η ανθρωπότητα κέρδισε μια μεγάλη σε ποικιλία προσέγγιση απόψεων γύρω από τη φύση, τον άνθρωπο, τα όντα γενικά. Για πρώτη φορά η επιστήμη, η κάθε επιστήμη όπως τα μαθηματικά, η φυσική, η κοσμογραφία, η ιστορία και πολλές άλλες από απλές εικασίες συγκροτήθηκαν σε αυτό που σήμερα ονομάζεται επιστήμη. Έτσι και η φιλοσοφία ξεφεύγοντας από δοξασίες και αντιλήψεις θεολογικού χαρακτήρα κυρίως, έθεσε βάσεις πάνω στις οποίες διαπνέεται πια από μία προσπάθεια θεωρητικής θεμελίωσης. Ομοίως και η φυσική επιστήμη, η επιστήμη γύρω από τη φύση και άρα με έντονα οντολογικής υφής προβλήματα αναπτύσσεται τότε και ο φιλόσοφος προσπαθεί να συγκροτήσει μια επιστήμη (Μπετσάκος Β., σελ.15) [6], την περί φύσεως επιστήμη, πραγματεύεται κυρίως μέσω της λογικής βασικές έννοιες και αρχές. Η έννοια του απείρου βρίσκεται στο κέντρο της αρχαίας ελληνικής σκέψης και τα βασικά ερωτήματα: «Τι είναι άπειρο; Υπάρχει; Είναι ον; Είναι ουσία;».

Ο φιλόσοφος που αναζήτησε, μελέτησε, ήρθε σε αντιπαράθεση με το σύνολο σχεδόν των προγενέστερων από αυτόν και συνέγραψε ένα μεγάλο έργο με αιχμή τις αντιλήψεις του για το άπειρο ήταν ο Αριστοτέλης. Επικρίνονται από τον ίδιο όλες οι προϋπάρχουσες θεωρίες που πίστευαν πως το άπειρο είναι ον ή στοιχείο ή αρχή των όντων. Το άπειρο δεν μπορεί να έχει αυτοδύναμη ύπαρξη ανεξάρτητη από τα όντα στην πραγματικότητά τους. Το άπειρο αποτελεί **δυνητικά συμβεβηκός**, γνώρισμα δηλαδή κάποιων αυθύπαρκτων όντων. Το άπειρο υπάρχει κατά τον Αριστοτέλη ως ασταμάτητη πρόσθεση αριθμών, ως αέναη διαιρετότητα μεγεθών, ως διαρκής εναλλαγή γέννησης και φθοράς και ως χρονικής απειρίας.

Οι ήδη αναφερόμενες ενστάσεις του Αριστοτέλη με τις υποστηριγμένες θέσεις των άλλων φιλοσόφων περί απείρου κυρίως θα είναι το αντικείμενο μιας έρευνας που θα ακολουθήσει το παρόν σύγγραμμα. Κλείνοντας ο Β. Κάλφας (σελ.19) [7], αναφέρει ότι η Αριστοτελική διευρυμένη «φυσική» θα αποτελέσει θεωρητική αφετηρία για κάθε

μελλοντική πραγμάτευση και θα καθορίσει ένα μέτρο σύγκρισης σε όλη τη διάρκεια της ύστερης αρχαιότητας και του μεσαίωνα.

2.2. Το βιβλίο Γ' των Φυσικών του Αριστοτέλη: περί κινήσεως και περί απείρου

Ο Αριστοτέλης στα Φυσικά αποπειράται, δοκιμάζει να συγκροτήσει τον λόγο περί φύσης σε επιστήμη χωρίς να δίνει ένα ολοκληρωμένο φυσικό πόρισμα ή μια δοκιμασμένη περιγραφή και ποσοτική αποτύπωση της φύσης (Μπετσάκος Β., σελ.26) [6]. Αντίθετα όπως ο ίδιος το τοποθέτησε, στα «Αναλυτικά Ύστερα», κάθε επιστήμη ξεκινά με ένα σύνολο υποθέσεων, τις βασικές αρχές του θέματος που είναι κοινές σε όλες τις επιστήμες, τα **αξιώματα**. Μετά εισάγει κάποιους **ορισμούς** που αναφέρονται στα χαρακτηριστικά κάθε επιστήμης, πχ. φυσικές έννοιες, όπως η κίνηση, μεταβολή, αιτία, χρόνος, χωρίς όμως οι ορισμοί αυτοί να αποδεικνύουν την ύπαρξη των αντικειμένων. Κατόπιν διατυπώνονται κάποιες δηλώσεις που περιλαμβάνουν ιδιότητες ή σχέσεις των όρων, τις λεγόμενες **προτάσεις**. Επειδή όλες οι προτάσεις δεν μπορεί να αποδειχθούν απαιτείται κάποιες από αυτές να θεωρηθούν ορθές, αυτά είναι τα αιτήματα ή τα αξιώματα. Τώρα όλες οι ερευνητικές κινήσεις στα βιβλία των Φυσικών εφορμώνται από τις εξής αρχές: α) από μία σαφέστατη αρχή, τη φύση και β) από μία όχι φυσική αρχή, το πρώτο κινούν ακίνητο. Η ανάπτυξη των εννοιών αυτών είναι για τους στόχους της εργασίας αυτής κομβική και εξετάζεται σε σχέση με την αντίληψη περί απείρου της εποχής. Οι έριδες που αναπτύχθηκαν γύρω από το άπειρο σχεδόν ξεκίνησαν για πρώτη φορά με τη συγγραφή των "Φυσικών" του Αριστοτέλη όπου εκτός της καταγραφής της περιρρέουσας αντίληψης και των αντιρρήσεων του μεγάλου φιλοσόφου περί απείρου είναι και ένα πρώτης τάξεως σύγγραμμα που αποτελεί πηγή πληροφόρησης όλων αυτών των θέσεων. Έμφαση έχει δοθεί στην κόντρα του Αριστοτέλη – Ελεατικής σχολής, με πλήθος ερευνητών του έργου του Αριστοτέλη να πιστεύει σχεδόν καθολικά πως η κόντρα αυτή ήταν ο κινητήριος μοχλός για τη συγγραφή των "Φυσικών". Στις γενικές παρατηρήσεις η σημείωση πως το επάγγελμα του πατέρα του Αριστοτέλη (ιατρός) και η βαθιά πίστη του πως κάθε αρρώστια οφείλεται πάντα σε κάποια αιτία, επηρέασε τον ίδιο τον Αριστοτέλη ότι για τη γνώση των φυσικών φαινομένων χρειάζεται πρώτα η γνώση των αιτιών που τα

προκάλεσαν, η γνώση του αποτελέσματος δηλαδή συμπίπτει από την γνώση της αιτίας που έφερε το συγκεκριμένο φυσικό αποτέλεσμα (Μπετσάκος Β., σελ.14) [6].

2.2.1. Ενότητες Γ1, Γ2, Γ3 των Φυσικών του Αριστοτέλη: η κίνηση

«*Η φύση είναι αρχή κινήσεως και μεταβολής*» η πρώτη φράση του Γ' βιβλίου και η ένταξη της κίνησης στη φύση που ασπάζεται η Αριστοτέλης αποδίδεται στην εποχή της πρώιμης παραδειγματικής ανάπτυξης της φιλοσοφίας και δη της Δυτικής από τους Έλληνες, που αναρωτήθηκαν τι είναι τα όντα στο σύνολό τους. Στα όντα δόθηκε το όνομα φύση, ενώ η λατινική μετάφραση *natura*, που στην κυριολεξία μεταφράζεται πιστά «γεννημένος» ή «γένεση» υποβαθμίζει το αρχέγονο περιεχόμενο της αντίστοιχης ελληνικής λέξης, της φύσης δηλαδή, φθείρεται δηλαδή η γνήσια κατονομαστική δύναμη της ελληνικής λέξης με την αρχέγονη έννοια. Η φύση είναι το ίδιο το «Είναι» και προς χάριν της τα όντα είναι θεατά. Ωστε φύση με την αρχέγονη έννοια σημαίνει τον ουρανό αλλά και τη γη, την πέτρα αλλά και τα φυτά, τα ζώα αλλά και τον άνθρωπο, μα και όλη την ανθρώπινη ιστορία ως έργο θεών και ανθρώπων, και τέλος πάνω από όλα, σημαίνει τους ίδιους τους θεούς μαζί με το περιεχόμενό τους (M.Heidegger, σελ. 43-45) [8].

Κυρίαρχη θέση του Αριστοτελικού έργου το συνεχές, κανένας ορισμός του οποίου δε σώζεται πριν από αυτόν. Ο ίδιος στο περί Ουρανού, 268 α, 6-7 αναφέρει: «*Συνεχές είναι αυτό που διαιρείται ..., ο χώρος και ο χρόνος*». Ο συνεχής χαρακτήρας, η συνέχεια της κίνησης προϋποθέτει την ύπαρξή της εξ' ανάγκης. Με πιο αυστηρούς όρους καμία θεωρία μεταβολής δεν νοείται χωρίς την έννοια της συνέχειας· αλλά και καμία έννοια συνέχειας δεν νοείται, χωρίς την έννοια της άπειρης διαιρετότητας (Wagner H., σελ. 487) [9]

Ο Αριστοτέλης στην προσπάθειά του να γίνει το δυνατόν πιο κατανοητός χρησιμοποιεί απλές, απλούστατες λέξεις καθημερινές. Μάλιστα αρκετά συχνά φτάνει στο σημείο να γεννάει ο ίδιος μια λέξη για να εκφράσει με ακρίβεια αυτό που θέλει να πει. Όπως για παράδειγμα η λέξη **εντελέχεια** = **εν** + **τέλος** + **έχω**, που σημαίνει ότι κάθε ον κατά τον Αριστοτέλη φτάνει στο τέλος (σκοπό) του που ενυπάρχει στη φύση του, δηλαδή εντελέχεια είναι η ενεργεία πραγμάτωση του δυνάμει όντος. Αυτό επιτυγχάνεται όταν κάθε ον έρχεται προς την ολοκλήρωσή του προς το τέλος, την πραγμάτωση του σκοπού που ενυπάρχει στη φύση του, όπου τίποτε άλλο δεν απομένει να γίνει. Σημαίνει όμως η

εντελέχεια και την ολοκλήρωση αυτής της ίδιας της διαδικασίας, της πορείας προς τον τελικό προορισμό του όντος που επίσης δεν απομένει κάτι ακόμα να γίνει (Β. Μπετσάκος, σελ. 128) [6]. Ο υπομνηματιστής (ο συντάκτης δηλαδή ερμηνευτικών σημειώσεων, ο σχολιαστής) του Αριστοτέλη Σιμπλίκιος εξηγεί ότι το «εντελέχεια μόνον» συναντάται στα αγέννητα όντα, ενώ το «δυνάμει και εντελέχεια» στα γεννημένα και άρα φθαρτά όντα. Τα μη γεννημένα, δηλαδή τα όντα που είναι άυλα δεν υφίστανται καμία μεταβολή ενώ τα γεννημένα – φθαρτά όντα επιδέχονται μεταβολών ως συνθέσεις ύλης και μορφής (Σιμπλίκιος, 392, 4-11). Εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι ο Αριστοτέλης θεωρεί τη μεταβολή και την κίνηση σχεδόν ταυτόσημες έννοιες στο Γ' βιβλίο. Μόνο στην αρχή του Ε' βιβλίου θα τις διακρίνει.

Έναν πρώτο αντιπλατωνικό υπαινιγμό θεωρεί ο Σιμπλίκιος (402, 11-15) την Αριστοτελική θέση ότι *«έξω από τα πράγματα δεν υπάρχει κίνηση – μεταβολή»* χτυπώντας τις άφθαρτες μορφές του πλατωνικού κόσμου. Στους στίχους 201b 16-25 σύμφωνα με τους αρχαίους υπομνηματιστές η αναφορά στοχεύει εκτός από τον Πλάτωνα και τις θέσεις των Πυθαγόρειων. Δεν μπορεί κανείς να εντάξει την κίνηση και τη μεταβολή σε κάποιο άλλο γένος... Ισχυρίζονται ότι *"η κίνηση είναι ετερότητα και ανισότητα και το μη - ον· από τούτα κανένα δεν κινείται κατ' ανάγκην, ούτε όσα τυχόν είναι έτερα ούτε άνισα ούτε μη - όντα· αλλά και η μεταβολή ούτε καταλήγει σε αυτά ούτε ξεκινάει από αυτά κατά λόγο μείζονα από ότι από τα ίδια τα αντιτιθέμενα πράγματα»* (Φιλόπονος, 359, 21-25). Ο Χ. Γιανναράς (σελ. 90) [10], το τοποθετεί εξαιρετικά λέγοντας ότι η λέξη με την οποία ο Αριστοτέλης διευκρινίζει οριστικά την ταύτιση της υπαρκτικής δυνατότητας με τη μορφή είναι η εντελέχεια· με αυτήν αντικαθιστά την πλατωνική μετοχή των υπαρκτών μέσω της μορφής στις δεδομένες και προϋπάρχουσες Ιδέες. Το αριστοτελικό είδος δεν είναι απλώς η αντανάκλαση στα υπαρκτά της οντολογικής πραγματικότητας των Ιδεών, αλλά αυτό συνιστά την πλήρη και εντελή πραγματικότητα του όντος, το εντελώς έχειν του υπαρκτού, την πραγματικότητα που ενέχει την αιτία συγχρόνως και τον σκοπό της – ταυτίζεται το είδος με την εντελέχεια.

2.2.2. Οι ενότητες Γ4 έως Γ8 των Φυσικών του Αριστοτέλη: το άπειρο και οι έριδες γύρω από αυτό

Στις προηγούμενες παραγράφους του Γ' βιβλίου η ένταξη του απείρου στις φυσικές επιστήμες επιχειρήθηκε α) ως το άπειρο να εμφανίζεται πρώτα στο συνεχές, αφού η κίνηση ανήκει στο συνεχές και β) το άπειρο μαζί με την κίνηση, το κενό, τον χώρο και τον χρόνο να αποτελούν κοινά και καθόλου των φυσικών όντων. Στο κεφάλαιο Γ4 ο Αριστοτέλης επιλέγει έναν άλλον τρόπο ένταξης του απείρου στη φυσική: η φυσική ασχολείται με τα σωματικά μεγέθη, με την κίνηση και τον χρόνο, και όλα αυτά είναι είτε άπειρα είτε πεπερασμένα. Είναι προφανές ότι αν τα σωματικά μεγέθη, η κίνηση και ο χρόνος έχουν μορφή απειρίας, αυτή θα οφείλεται στο συνεχή τους χαρακτήρα. Η επιστημολογική μελέτη του απείρου στη φυσική δεν συνεπάγεται την αυτόματη αποδοχή της ύπαρξής του εκ μέρους του φιλοσόφου· το ερώτημα της ύπαρξης παραμένει ανοικτό (Μπετσάκος Β., σελ., 42) [6]. Ο W.Wieland (σελ. 291) [11], επισημαίνει ότι η αριστοτελική διερεύνηση του απείρου έχει καταρχήν κοσμολογικό χαρακτήρα και ότι επίσης συνδέεται άμεσα με τα προβλήματα και τα παράδοξα που έθεσε η αμφισβήτηση της κίνησης από τον ελεάτη Ζήνωνα.

Μια εκπληκτική αποστροφή στα Φυσικά, Βιβλίο Γ', 203 α , 30-36, ότι **«τότε και η γένεση πρέπει να έχει τη δική της έναρξη και αυτή η έναρξη είναι μία και συγκεκριμένη...** Συμπέρασμα: δεν μπορεί παρά να ήταν όλα κάποτε μαζί, και κάποια συγκεκριμένη στιγμή να άρχισε η κίνησή τους», αναγκάζει τον υποψιασμένο μελετητή να σκεφτεί την κοσμολογική θεωρία της **Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang)** σύμφωνα με την οποία η αρχή του σύμπαντος ανάγεται σε μία μάζα ασύλληπτα μεγάλης πυκνότητας! Τώρα, στους στίχους 203b 17-28 εισάγεται η αριστοτελική αναζήτηση της ύπαρξης του απείρου. Αναφέρεται ότι από τα ακόλουθα πέντε, ως κυριότερα ανάμεσα στα άλλα, μπορεί η έρευνα να σχηματίσει την πεποίθηση ότι υπάρχει άπειρο, σε κάποια μορφή τουλάχιστον: πρώτον από τον χρόνο (διότι ο χρόνος είναι άπειρος)· δεύτερον, από τη διαίρεση εντός των μεγεθών (διότι και οι μαθηματικοί κάνουν χρήση του απείρου)· τρίτον, από το ότι μόνο με το ακόλουθο σκεπτικό θα είναι ανεξάντλητη η γένεση και η φθορά: αν δηλαδή είναι άπειρο αυτό από το οποίο αφαιρείται το καθετί που γεννιέται· τέταρτον, από το ότι το πεπερασμένο βρίσκει πάντα σε κάτι ένα πέρασ, με αναγκαίο αποτέλεσμα να μην υπάρχει κανένα πέρασ, δεδομένου ότι κατ' ανάγκην τα πέρατα θα είναι αλληλοδιάδοχα· πέμπτον και κυριότερο όλων, αυτό που προκαλεί την πάνκοινο

απορία: αφού νοητικά δεν εξαντλούνται, προκύπτει πιθανό το συμπέρασμα ότι και ο αριθμός είναι άπειρος και τα μαθηματικά μεγέθη και το έξω του κόσμου. Και, αν είναι άπειρο το έξω του κόσμου, φαίνεται πιθανό να υπάρχει και σώμα άπειρο και κόσμοι άπειροι.

Η πρώτη θέση περί απειρίας του χρόνου απορρίπτεται από τον Αριστοτέλη, όταν ο ίδιος στα Φυσικά, στο βιβλίο Θ', 251b, 10-28 αναφέρει ότι άλλο είναι ο άπειρος χρόνος, άλλο η αιώνια ύπαρξη του χρόνου. Τη δεύτερη εκδοχή αποδίδει ορθολογικά ο Α. Δ. Αναπολιτάνος (σελ. 62) [12], λέγοντας «ότι από τη δυνατότητα ύπαρξης διαδικασιών τμήσης εκτεταμένων μεγεθών, όπου ο αριθμός των πράξεων τμήσης –χωρίς να μπορεί να είναι άπειρος– δεν είναι φραγμένος προς τα άνω». Την πατρότητα της τρίτης εκδοχής απειρίας ότι μια άπειρη πηγή εξασφαλίζει πως το παγκόσμιο γίνεσθαι δεν θα πάψει λόγω έλλειψης υλικού ανήκει μάλλον στον Αναξίμανδρο. Την τέταρτη εκδοχή αποδίδει ξανά ο Α. Δ. Αναπολιτάνος (σελ. 62) [12], ισχυριζόμενος τώρα ότι «οτιδήποτε έχει όρια, οριοθετείται πάντοτε από κάτι άλλο που δεν αποτελεί μέρος του και επομένως η ολότητα των πραγμάτων δεν μπορεί να έχει όρια, γιατί αυτά τα όρια ήδη θα περιέχονταν στην ολότητα των πραγμάτων». Κατά την πέμπτη εκδοχή, η δυνητική ύπαρξη απείρων κόσμων συναντάται σε πολλούς προσωκρατικούς φιλοσόφους, εδώ στους ατομικιστές Λεύκιππο και Δημόκριτο. Όμως και το πέμπτο επιχείρημα περί απείρου προσκρούει σε αδιέξοδα, όπως το αδιανόητο για τον Αριστοτέλη σώμα άπειρον! Κατά τον Λ. Σιάσο (σελ. 260) [13], κανένα από τα δύο μεθοδολογικά προβλήματα του δεν απαντήθηκαν: α) ούτε η ύπαρξη του απείρου πέτυχε και β) ούτε και η τροπικότητα, το πώς, της ύπαρξής του απαντήθηκε.

Επιστρέφοντας στις έριδες για τις απόψεις των προγενέστερων του φιλοσόφων, ο Αριστοτέλης στην έναρξη του Γ4 λέει ότι αποκλείεται λοιπόν, να υπάρχει το άπειρο χωριστά από τα αισθητά όντα και να αποτελεί από μόνο του ένα ον άπειρο. Αυτό αποτελεί εναντίωση στην πυθαγόρεια θεωρία περί αυθυπόστατου άπειρου, ενώ η θέση του για μη αυτοδύναμη ύπαρξη του απείρου έχει έναν σαφέστατο αντιπλατωνικό χαρακτήρα. Η επιχειρηματολογία και προς τους δύο (Πυθαγόρα και Πλάτωνα) απλή και σε ελεύθερη απόδοση: αφού ο αριθμός και το μέγεθος δεν έχουν αυτόνομη ύπαρξη, πώς είναι δυνατόν να έχει τέτοια ύπαρξη το άπειρο, που αποτελεί βασικό και αναγκαίο γνώρισμα του αριθμού και του μεγέθους;

Ας παρατεθεί όμως τώρα η βάση της αριστοτελικής θέσης για τη **δυνητική ύπαρξη του απείρου** με δύο τρόπους: α) δυνητική ύπαρξη που μπορεί να μεταμορφωθεί σε πραγματωμένη ύπαρξη και β) δυνητική ύπαρξη που ποτέ δεν μεταμορφώνεται σε ενεργητικά πραγματωμένη ύπαρξη. Το άπειρο για τον Αριστοτέλη υπάρχει δυνητικά μόνο με τον δεύτερο τρόπο. Η τροπικότητα του απείρου προκύπτει από την πρόσθεση και από την διαίρεση με τρόπο επαναλαμβανόμενο και για τις δύο πράξεις. Το άπειρο που προκύπτει από την πρόσθεση, υποστηρίζει ο φιλόσοφος ταυτίζεται τρόπον τινά με το άπειρο της διαίρεσης· διότι μέσα στα όρια του πεπερασμένου, προκύπτει κατά την πρόσθεση πάλι άπειρο, μόνο που η φορά της διαδικασίας είναι αντίστροφη· με τον τρόπο που στην μία περίπτωση το βλέπουμε να διαιρείται ώστε να φτάσει στο άπειρο, με τον ίδιο τρόπο στην άλλη περίπτωση θα το δούμε να προστίθεται ώστε να ολοκληρώσει κάτι με πεπερασμένα όρια (206b, 4-11). Ο Δ. Α. Αναπολιτάνος (σελ. 64) [12], συμπληρώνει στα προηγούμενα ότι η δεύτερη διαδικασία που, κατά τον Αριστοτέλη, είναι υπεύθυνη για την εξοικείωσή μας με την έννοια του απείρου είναι η διαιρετική διαδικασία. Τρία διαφορετικά φαινόμενα μας οδηγούν στην άποψη πως το άπειρο μπορεί να γίνει αντιληπτό ως εσωτερική ιδιότητα μη – εξάντλησης ενός συστήματος. Η άποψη αυτή συνηγορεί οπωσδήποτε υπέρ μια δυνητικής αντίληψης για το άπειρο. Αυτά είναι: α) το ατελείωτο του χρόνου όπως το βιώνει κανείς «στην πορεία», β) η αδυναμία ολοκλήρωσης μιας προς τα πάνω αρίθμησης και γ) η δυνατότητα άπειρης διαίρεσης πεπερασμένων μεγεθών, αφού κάθε διαίρεση ενός πεπερασμένου μεγέθους μπορεί να ακολουθήσει μία νέα διαίρεση. Τα δύο πρώτα σχετίζονται με την προσθετική διαδικασία του απείρου ενώ το τρίτο με τη διαδικασία της διαίρεσης.

Επιστρέφοντας στις έριδες μεταξύ του Αριστοτέλη και των φιλοσόφων πριν από αυτόν παρατηρεί κανείς μέσα από το έργο του τα εξής:

1) Κάνει μια νύξη προς τον Αναξίμανδρο αναφέροντας στο 204b 24-28 που αποκλείεται και η εκδοχή να υπάρχει σώμα άπειρο, ένα και ενιαίο, με τον τρόπο που το θέλουν μερικοί (βλέπε Αναξίμανδρο) που ισχυρίζονται ότι το άπειρο βρίσκεται έξω από τα στοιχεία και άρα αυτά γεννιούνται από το άπειρο. Επίσης αποκλείει την ύπαρξη απλού και μόνο απείρου σώματος.

2) Ισχυρίζεται ο Αριστοτέλης ότι αυτό που λέει ο Αναξαγόρας για την ακινησία του απείρου, είναι επίσης άτοπο (205b, 6-11). Εδώ ο Αριστοτέλης απορρίπτει το επιχείρημα

του Αναξαγόρα, αποδίδοντας την πιθανή ακινησία του απείρου όχι στη φύση του αλλά εξαναγκασμένη από άλλους παράγοντες (205b, 11-15).

3) Στο 206b, 26-37 αναφέρει σε μία τεχνητή αμφισβήτηση των δύο απείρων του Πλάτωνα πώς ο ίδιος ο Πλάτωνας έκανε δύο τα άπειρα, διότι αφενός μέσω της αύξησης σχηματίζεται η εντύπωση ότι το άπειρο θα απαρτίσει ένα μέγεθος που θα ξεπερνά όλα τα πεπερασμένα, δηλαδή θα απειρίζεται, αφετέρου μέσω του μη εξαντλητικού αφανισμού πάλι προκύπτει άπειρο. Αν και έφτιαξε όμως δύο άπειρα, δεν τα χρησιμοποιεί! Διότι ούτε το άπειρο του μη εξαντλητικού αφανισμού το εφαρμόζει στους αριθμούς (αφού ο ελάχιστος αριθμός που υπάρχει είναι η μονάδα), ούτε το άπειρο της αύξησης (αφού θέτει το αριθμητικό όριο μέχρι τη δεκάδα). Ο W.D. Ross (σελ. 357) [14], υποστηρίζει με χωρία μεταγενέστερων συγγραφέων που παραθέτει, ότι η σχετικά άγνωστη αυτή θεωρία στην οποία ο Αριστοτέλης ανατίθεται αποδίδεται στους Πυθαγόρειους. Ο H.Wagner (σελ. 525) [9], πιστεύει ότι μέσω της αντίθεσής τους στην πλατωνική θέση, ο Αριστοτέλης στρέφεται κατά του Εύδοξου, συμμαθητή του στην ακαδημία του Πλάτωνα.

4) Στο 207a και σε μήκος περίπου 20 στίχων συναντά κανείς μία στοχευμένη, επιτηδευμένη και με επιχειρήματα χτισμένη επίθεση του Αριστοτέλη στην Ελεατική σχολή, με αποδέκτες τους Παρμενίδη και Μέλισσο: άπειρο δεν είναι αυτό που δεν έχει τίποτα απ' έξω του, αλλά αυτό κάθε φορά έχει κάτι απ' έξω του. Άπειρο συνεπώς είναι αυτό που αποτελεί ποσότητα και ενέχει τη δυνατότητα να παίρνει κάθε φορά έξω από αυτό ένα νέο ποσό· αντίθετα, αυτό που τίποτα δεν έχει απ' έξω του, είναι ακριβώς ένα συντελεσμένο όλον· και αυτός είναι ο ορισμός του όλου: αυτό που δεν του λείπει τίποτα. Ο Λ. Σιάσος (σελ. 266) [13], αναφέρει για το συγκεκριμένο εδάφιο, ότι αποτελεί στροφή 180 μοιρών από τις θέσεις των Προσωκρατικών φιλοσόφων. Οι παλαιότεροι προσέγγιζαν το άπειρο στατικά, ενώ ο Αριστοτέλης το βλέπει δυναμικά.

Τα συμπεράσματα από τις Αριστοτελικές θέσεις για το άπειρο και τις οντολογικού ενδιαφέροντος διαφωνίες που έχουν προκύψει από το Γ' Βιβλίο των Φυσικών είναι εξαιρετικά: α) Το άπειρο αποτελεί ύλη του σωματικού μεγέθους, είναι αποδεκτό δυναμικά, όχι όμως ενεργητικά πραγματωμένο. β) Το άπειρο μπορεί να διαιρεθεί ως προς την κατεύθυνση του εξαντλητικού αφανισμού. γ) Το άπειρο υπάρχει ως ένα πεπερασμένο όλον, όχι βέβαια ως αυτοδύναμη οντότητα, αλλά ως σύμπτωμα άλλης οντότητας. δ) Το

άπειρο δεν περιέχει, αλλά περιέχεται· παραμένει δε άγνωστο διότι η ύλη δεν έχει μορφή· άρα μιλώντας για το άπειρο, μάλλον για μέρος μιλάμε παρά για όλον.

Κλείνοντας το συγκεκριμένο κεφάλαιο, ο Φιλόσοφος κάνει δύο επισημάνσεις. Πρώτον (207b, 16-20) διαχωρίζει τα άπειρα του χωρικού μεγέθους από τα άπειρα της κίνησης και του χρόνου. Είναι μια πρώτη νύξη για το κεφάλαιο Θ' των Φυσικών που ακολουθεί και επικεντρώνεται στην κίνηση. Δεύτερον, οι απόψεις του δεν πρέπει να ανησυχήσουν του μαθηματικούς (207b, 30-36), οι οποίοι έχουν ανάγκη το άπειρο για τις κατασκευές τους, και τούτο διότι στην πραγματικότητα δεν το χρησιμοποιούν ποτέ, μιας και οποιαδήποτε αύξηση αριθμών ή προέκταση γραμμής θέλησαν να κάνουν, θα είναι τελικά πεπερασμένη. Εξ' άλλου και τα μεγάλα μεγέθη διαιρούνται στην ίδια αναλογία σε μικρότερα, εννοώντας ότι τα μεγέθη του πραγματικού κόσμου μπορούν σαν αναλογία να μεταφερθούν σε ένα πολύ μικρότερο σχήμα ώστε να δουλέψουν οι Μαθηματικοί, όποτε το άπειρο δεν έχει να της προσφέρει τίποτα στις αποδείξεις τους.

2.3. Το βιβλίο Z των Φυσικών του Αριστοτέλη: περί συνέχειας, άπειρης διαιρετότητας και τα παράδοξα του Ζήνωνα

Στο Z βιβλίο του μεγάλου Σταγειρίτη Φιλόσοφου κεντρική θέση έχει η έννοια της συνέχειας. Ο ορισμός που δίνει στο συνεχές είναι ότι αυτό μπορεί να διαιρείται σε τμήματα επ' άπειρου διαιρετά. Μεγέθη που είναι συνεχή είναι ο χώρος, η κίνηση και ο χρόνος και μάλιστα τα παραδείγματα που παραθέτει στα προηγούμενα κεφάλαια των Φυσικών αποδεικνύουν ότι η δομή της συνέχειας αποκτά σημασία στην περίπτωση που τα συστατικά χώρος, χρόνος και κίνηση αντιμετωπίζονται ως μία ολότητα (Wieland W., σελ. 282-283) [11]. Κυρίαρχη θέση στο παρόν σύγγραμμα να αναδειχθούν οι έριδες που προκάλεσε το έργο του Αριστοτέλη σε σχέση με το σύνολο των προκατόχων του φιλοσόφου πάνω στο άπειρο και στα συνακόλουθά του όπως η κίνηση, ο χώρος, ο χρόνος αλλά και οι κοσμολογικές του προεκτάσεις. Στο Z' βιβλίο κεντρικότερη έριδα έναντι όλων αυτή μεταξύ Αριστοτέλη και Ζήνωνα, δηλαδή η έντονη κριτική που ασκήθηκε πάνω στην Ελεατική σχολή των φιλοσόφων που αποτελείτο από τον ιδρυτή Ξενοφάνη, τον Παρμενίδη (πολλοί πιστεύουν ότι αυτός ήταν ο ιδρυτής τους), τον Ζήνωνα και τον

Μέλισσο· όλοι τους ορμώμενοι από την περιοχή της Ελέας, πόλης της Μεγάλης Ελλάδας στην κάτω Ιταλία, λίγο νοτιότερα της σημερινής πόλης της Νάπολης.

2.3.1. Οι ενότητες Z1, Z2, Z3 των Φυσικών του Αριστοτέλη: η κίνηση, η άπειρη διαιρετότητα των συνεχών μεγεθών και η διάκριση του χρονικού διαστήματος από τη χρονική στιγμή

Ο Αριστοτέλης ξεκινά το Ζ' Βιβλίο με τι δεν είναι το συνεχές ή τι δεν μπορεί να είναι. Κρατά τον ορισμό του συνεχούς για αργότερα καταλήγοντας εκεί μετά από ενδελεχή έρευνα. Κι ενώ το συνεχές βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας αυτής, το απτόμενο και το εφεξής ελάχιστα μνημονεύονται (Wieland W., σελ. 283) [11]. «*Κάτι αποκλείεται να είναι συνεχές και να αποτελείται από μέρη αδιαίρετα*» είναι η βασική θέση. Μάλιστα καμία θεωρία μεταβολής δεν δέχεται χωρίς την έννοια της συνέχειας και καμία έννοια συνέχειας χωρίς αυτή της άπειρης διαιρετότητας, λόγια και θέση που ο υπομνηματιστής Σιμπλίκιος θεωρεί τη συνεκτικότητα που έχει το συνεχές ως άμεση διαφωνία με τις θέσεις των ατομιστών φιλοσόφων Λεύκιππου και Δημόκριτου (10.925, 5-17). Το πλέον τυπικό παράδειγμα για το αριστοτελικό συνεχές είναι η ευθεία γραμμή. Η γραμμή αποτελείται με τη σειρά της μόνο από γραμμές, που κι αυτές είναι επ' άπειρον διαιρετές. Τα άπειρα μεμονωμένα σημεία περιέχονται δυνητικά σε αυτή, όμως δεν απαρτίζουν την ευθεία γραμμή, αφού τα σημεία δεν είναι ενεργά στην πραγματικότητα, δεν υπάρχουν. Άρα η ύπαρξη αυτών των σημείων είναι μόνο εν δυνάμει και έρχονται στην πραγματικότητα μόνο αν η γραμμή κοπεί, διαιρεθεί, χάνοντας όμως έτσι τη συνοχή της, του συνεχούς. Ενισχυτική παρέμβαση στα προηγούμενα, η τοποθέτηση ότι ένα συνεχές δεν μπορεί να αποτελείται από τμήματα αδιαίρετα αφού τα συστατικά του συνεχούς υπάρχουν κατά Αριστοτέλη μόνο σε τρεις σχέσεις, δηλαδή το ένα να είναι συνεχές με το άλλο, να είναι εξακολουθητικά μεταξύ τους, ή τέλος να είναι διαδοχικά· και στις τρεις περιπτώσεις όμως τα τμήματα που είναι αδιαίρετα αποτυγχάνουν (Bostock D., σελ. 179-212) [15].

Ο Αριστοτέλης δέχεται και για τον χρόνο ότι είναι άπειρος δυνητικά με κάπως διαφορετικό τρόπο από το δυνητικά άπειρο του χώρου, με την έννοια ότι κυλά συνεχώς, δηλαδή της διαδικασίας (Lear J., σελ. 202) [16], αν και ένα τμήμα του χρόνου είναι συνεχές και άρα διαιρείται επ' άπειρον, όπως γίνεται και στη συνέχεια των μεγεθών (232 α, 23). Με τη βοήθεια της κατανόησης του χρόνου σε σχέση με τον χώρο, συναντά κανείς

την πρώτη επιθετική τοποθέτηση στο Ζ' βιβλίο κατά των θέσεων του Ζήνωνα (233 α, 16-45) ισχυριζόμενος ότι στο μισό χρόνο ένα κινητό διανύει το μισό διάστημα, άρα τοποθετεί ως επιχείρημα την αναλογία χώρου – χρόνου για να εξάγει το συμπέρασμα ότι και τα δύο μεγέθη είναι συνεχή. Οπότε, αν το ένα γίνει άπειρο, θα γίνει και το άλλο, ενώ αν διαιρεθεί επ' άπειρον ο χρόνος, αντίστοιχα θα διαιρεθεί και το διάστημα. Ο στόχος εδώ καταλήγει να είναι ο Ελεάτης Ζήνωνας, αφού ο Αριστοτέλης αναφωνεί ότι σε πεπερασμένο χρόνο αποκλείεται ένα κινητό να διέλθει άπειρα διαστήματα ή να κατορθώσει να έρθει σε επαφή με το καθένα από τα άπειρα, διευκρινίζοντας ότι ο χρόνος, το μήκος και γενικότερα κάθε συνεχές μέγεθος είναι άπειρο και κατά τη διαίρεση και ως προς τα έσχατα όριά του (Σιάσος Λ., σελ. 165) [13].

Η έννοια του απείρου όπως τη συνέλαβε ο Αριστοτέλης κυρίως απαντά στη θέση του Ζήνωνα ότι σε πεπερασμένο χρόνο ένα κινητό μπορεί να άπτεται σε άπειρα σημεία. Ο Wagner (σελ. 507-508) [9] και ο Θ. Κουρεμένος (σελ. 52-53) [17], συμφωνούν ότι το άπειρο για την πρόσθεση είναι οι αριθμοί, για τη διαίρεση τα άπειρα διχοτομούμενα μεγέθη, ενώ και για την πρόσθεση και για τη διαίρεση μαζί ο χρόνος. Ο M. Adler (σελ. 209) [18], το προχωράει παραπέρα λέγοντας ότι ο Αριστοτέλης δέχεται δύο δυνητικά άπειρα, της πρόσθεσης και της διαίρεσης, Στην πρόσθεση το πιο κατάλληλο παράδειγμα είναι οι αριθμοί, που ο ένας μετά τον άλλον δίνουν τη δυνατότητα του επόμενου χωρίς τέλος· όμως μόνο δυνητικά υπάρχει απειρία, αφού στην πραγματικότητα θα χρειαζόταν άπειρος χρόνος να μετρηθούν οι άπειροι αριθμοί, μια διαδικασία χωρίς τέλος.

Τώρα ο Αριστοτέλης ξεκινώντας από την θέση ότι το μέγεθος του κόσμου δεν είναι άπειρο, ούτε και ο χρόνος είναι άπειρος και η μεθοδολογία της απόδειξής του, στηρίζεται στην εις άτοπον απαγωγή της διέλευσης ενός πεπερασμένου μεγέθους μήκους c , σε άπειρο χρόνο t . (Παπαευστρατίου Ν., σελ. 178) [19]. Επιστρέφοντας στις έριδες, οι στίχοι 233b 20-22 θεωρούνται κριτικοί ως προς τις πλατωνικές αντιλήψεις λέγοντας ότι ούτε η γραμμή ούτε το επίπεδο ούτε κανένα συνεχές σώμα μπορεί να είναι αδιαίρετο. Επίσης, χρησιμοποίησε τη λέξη άτομο ως συνώνυμο του αδιαίρετου. Γνωστό δε πως η ατομική θεωρία (περί ατόμου) ανήκει στους ατομιστές φιλόσοφους. Μάλιστα, η ατομική θεωρία ενός από αυτούς, του Λεύκιππου, συνδέεται όπως ο ίδιος ο Αριστοτέλης πίστευε (περί γενέσεως και φθοράς, 325 α, 23-32) με την Ελεατική θέση περί ενότητας και ακινησίας του υπαρκτού. Η θέση είναι ότι δεν μπορεί να υπάρχει κίνηση χωρίς κενό, θεωρώντας

αυτό το κενό ως μη – ον. Μάλιστα αυτό δεν είναι μοναδικό, αντίθετα είναι άπειρα και αόρατα αφού ο όγκος τους είναι ελάχιστος. Κινούμενα στο κενό όταν συνευρίσκονται προκαλούν γέννηση, ενώ όταν διασκορπίζονται δίνουν φθορά.

Ο Αριστοτέλης για το αδιάστατο του χρόνου, χρησιμοποιεί τον όρο «νυν», **το τώρα ως χρονική στιγμή, όχι σαν χρονικό διάστημα συνεχές με την έννοια της άπειρης διαιρετότητας**. Ο L.N. Sandowsky (σελ. 5) [20], τονίζει ότι τα παράδοξα που έθεσε ο Ζήνωνας οδήγησαν στην αναγκαιότητα διάκρισης των χρονικών σημείων (των νυν) από τη χρονική διάρκεια. Τα εκάστοτε τώρα, τα νυν ως αδιάστατα, δεν αποτελούν μόνο δυνατικές καταστάσεις πραγματικότητας που θα διέκοπταν το συνεχές του χρόνου (Δ. Αναπολιτάνος, σελ. 73-74) [12]. Μια εκπληκτική ερμηνεία για το συνεχές του χρόνου και του νυν δίνει ο Β. Κάλφας (Φυσικά, σελ. 445) [7], αναφέροντας ότι το νυν του παρελθόντος από το νυν του μέλλοντος ως διαφορετικά δεν μπορεί να είναι διαδοχικά, δεν είναι εφεξής. Οπότε αφού ανάμεσά τους υπάρχει χρόνος που ανήκει και στα δύο νυν, τότε εξ' ορισμού το τώρα θα διακρίνει, θα οριοθετεί το μέλλον από το παρελθόν. Συνεπώς το τώρα έχει διάρκεια, άρα γίνεται χρόνος συνεχής και είναι διαιρετός! Μια πολύ σημαντική παρατήρηση εδώ είναι η αντίθεση της αριστοτελικής αντίληψης της συνέχειας που δίνει στον χρόνο με την έννοια της στιγμιαίας κίνησης όπως αυτή αποτυπώνεται ως στιγμιαία ταχύτητα, στιγμιαία επιτάχυνση κ.λπ., που θεωρείται ο θεμέλιος λίθος του λογισμού. Δηλαδή αυτός που στήριζε τη θεωρία του στη διαφωνία με την αριστοτελική θέση ήταν ο Νεύτωνας, που ανακάλυψε τον λογισμό.

2.3.2. Οι ενότητες Z4, Z5, Z6, Z7 των Φυσικών του Αριστοτέλη: η είσοδος του απείρου στο χωροχρονικό επιστητό. Η ασυμβατότητα πεπερασμένων και άπειρων μεγεθών

Κατόπιν ο Φιλόσοφος με δύο αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο στρέφεται ξανά κατά των παραδόξων του Ζήωνα αποδεικνύοντας ότι δεν μπορεί να υπάρχει ούτε κίνηση, ούτε ακινησία σε ένα χρονικό σημείο. Για τον Αριστοτέλη η άπειρη διαιρετότητα του χώρου και του χρόνου στηρίζεται στη θεμέλια ιδιότητά τους, στη συνέχεια. Η συνέχεια όμως, ως ουσιώδης ιδιότητα κάθε κινούμενου όντος και των παραμέτρων της κίνησης όπως ο χώρος, ο χρόνος, η ίδια η κίνηση, το έργο που θα παράξει η κίνηση διατηρεί τη βασική αριστοτελική ιδιότητα της άπειρης διαιρετότητας δυνατικά, εν δυνάμει και όχι

πραγματοποιήσιμη. Αυτό ακριβώς το σημεία αποτελεί την λύση που προτείνει ο Αριστοτέλης στη φύση των παραδόξων του Ζήνωνα. Άρα στο σημείο αυτό του Ζ βιβλίου και ο υπομνηματιστής Σιμπλίκιος και ο Wagner H. (σελ. 60) [9], συμφωνούν ότι όλη η επιχειρηματολογία του Αριστοτέλη στρέφεται εναντίον του Ζήνωνα, ενώ μεγάλο τμήμα της συγκεκριμένης επιχειρηματολογίας καταλαμβάνει η θεωρία του περί μεταβολών. (Η περιπλοκότητα των εννοιών των μεταβολών είναι τέτοια που η μελέτη τους ξεφεύγει από τον σκοπό της παρούσας έρευνας).

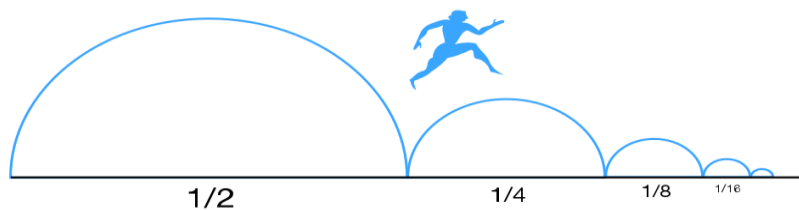
Τα συμπεράσματα που απορρέουν από το Z7 τμήμα είναι καταλυτικά ως προς το άπειρο: α) Δεν νοείται πεπερασμένη κίνηση ενός κινητού μέσα σε άπειρο χρόνο, β) δεν μπορεί κάποιο άπειρο σώμα να ηρεμεί ή να κινείται σε πεπερασμένο χρόνο, γ) ούτε μπορεί να διέλθει ένα πεπερασμένο μέγεθος μέσα από ένα άπειρο μέγεθος σε πεπερασμένο χρόνο, δ) ούτε το άπειρο μέσα από ένα πεπερασμένο μέγεθος σε χρόνο πεπερασμένο, ε) και βέβαια άπειρο μέσα από άπειρο μέγεθος άλλα σε πεπερασμένο χρόνο, στ) τελικά ο Φιλόσοφος καταλήγει στο εμβληματικό συμπέρασμα πως δεν μπορεί να υπάρχει άπειρη κίνηση σε πεπερασμένο χρόνο (Σιάσος Λ., σελ 346-347) [13]. Σε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα **βεβαιώνεται μια αδυναμία σύμπλευσης πεπερασμένων και άπειρων συνδυασμών μεγεθών.**

2.3.3. Οι ενότητες Z8, Z9 και Z10 των Φυσικών του Αριστοτέλη, τα παράδοξα του Ζήνωνα και η αριστοτελική λύση στην έριδα μεταξύ Αριστοτέλη - Ελεατών

Το τελευταίο τμήμα του Ζ' Βιβλίου των Φυσικών είναι αφιερωμένο στα παράδοξα του Ζήνωνα και στην προσεκτική αντιμετώπισή τους, που ο Αριστοτέλης αριστοτεχνικά έχει μεριμνήσει να κατασκευάσει μια θεωρία ανατροπής τους.

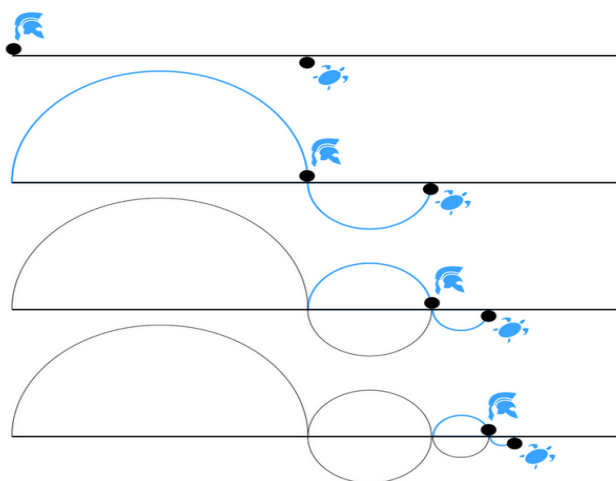
Επιγραμματικά αυτά τα παράδοξα αναφέρονται ως:

1) Το παράδοξο της διχοτομίας, όπου ένας δρομέας στην προσπάθειά του να τερματίσει, καλύπτει κάθε φορά το μισό της απόστασης έως το τέρμα. Το παράδοξο βρίσκεται στο γεγονός ότι τα μισά των αποστάσεων είναι άπειρα και έως εκ τούτου θα χρειαστεί άπειρο χρόνο να τα διανύσει και δεν θα τερματίσει ποτέ.



Σχήμα 13 Το παράδοξο της διχοτομίας

2) Παρόμοιο και **το παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα** που τρέχουν σε αγώνα δρόμου για το ποιος θα τερματίσει πρώτος. Στη χελώνα έχει χαριστεί ένα διάστημα να προπορεύεται και το παράδοξο είναι ότι κάθε φορά ο Αχιλλέας θα χρειαστεί να καλύπτει το μισό της απόστασης μέχρι τη χελώνα. Απόρροια αυτού, αφού τα μισά των αποστάσεων είναι άπειρα, η χελώνα στον αντίστοιχο άπειρο χρόνο θα έχει προλάβει να τερματίσει πρώτη!



Σχήμα 14 Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας

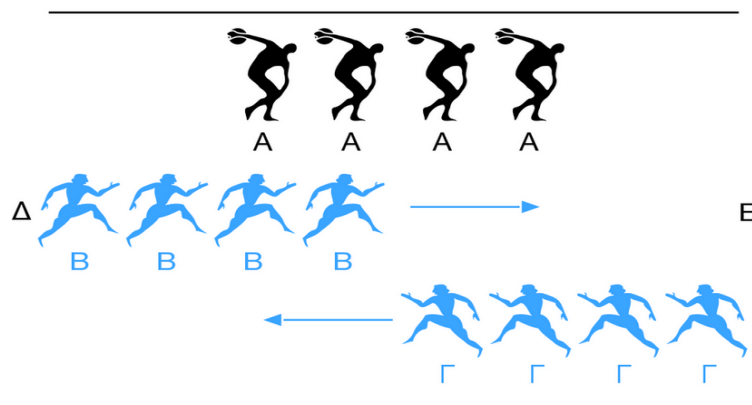
3) Το **παράδοξο του κινούμενου βέλους** είναι ότι κάθε χρονική στιγμή το βέλος καταλαμβάνει χώρο ίσο με τις διαστάσεις του και άρα το βέλος αν και κινείται παραμένει ακίνητο!



Σχήμα 15 Το παράδοξο του κινούμενου βέλους

4) Σύμφωνα με το παράδοξο των κινούμενων αθλητών σε ένα στάδιο, τρεις ομάδες αθλητών έχουν στοιχηθεί ως εξής:

Η ομάδα Α είναι ακίνητη ενώ οι ομάδες των Β και των Γ κινούνται με την ίδια ταχύτητα αντίθετα όπως δείχνουν τα βέλη. Στον ίδιο χρόνο t η ταχύτητα του πρώτου Β ως προς το ακίνητο Α είναι ίδια με του πρώτου Γ ως προς το Α αλλά η ταχύτητα του πρώτου Β ως προς το πρώτο Γ είναι διπλάσια!



Σχήμα 16 Το παράδοξο των κινούμενων αθλητών σε ένα στάδιο

Ο Αριστοτέλης στηρίζεται σε δύο άξονες: α) Την πλήρη ασυμβατότητα του απείρου και του πεπερασμένου σε όποιο συνδυασμό και αν εφαρμοστεί και β) τα χρονικά σημεία, τα νυν, δεν αποτελούν διαιρέσεις του χρόνου και άρα δεν νοείται σε αυτά κίνηση αφού είναι αδιάστατα. Αναφορές στον Ζήνωνα έχουν γίνει και στο Δ' βιβλίο και γενικά στα Φυσικά κοινή είναι η εντύπωση του συνόλου των μελετητών ότι κυρίως ο Σταγειρίτης φιλόσοφος στρέφεται κατά των αντιλήψεων της Ελεατικής σχολής. Σε κάθε παράδοξο του Ζήνωνα εφαρμόζοντας κατάλληλα τις δύο παραπάνω αρχές και με την εξαιρετική αποδεικτική άνεση εξηγεί και καταρρίπτει την ισχύ του παραδόξου. Η κύρια αστοχία των παραδόξων του Ζήνωνα κατά Αριστοτέλη βρίσκεται στη λανθασμένη θέση της προϋπόθεσης ως δεδομένα ότι ο χρόνος αποτελείται από τα εκάστοτε νυν: ο Φιλόσοφος όμως δεν δέχεται ως αληθές κάτι τέτοιο, αντίθετα δέχεται μόνο την κίνηση στο συνεχές του χρόνου μέσα στον οποίο το εκάστοτε νυν είναι δυνητικό, όχι πραγματικότητα. Στο 233 α 21-24 διακρίνει κανείς καθαρά ότι μόνο η διάρκεια είναι πραγματικός χρόνος και μόνο εκεί μπορεί να δεχτεί κανείς κίνηση, όχι στο μεμονωμένο χρονικό σημείο.

Μια αρκετά εκλαϊκευμένη αλλά εξαιρετικά εύστοχη εκδοχή μερικών από τα τέσσερα παράδοξα του Ζήνωνα παραθέτει ο G.Andrew (σελ. 69-70) [21], προσπαθώντας να εξηγήσει πώς αναιρείται η ίδια η κίνηση από το ίδιο το παράδοξο: κατ' αρχήν για

οποιαδήποτε κίνηση χρειάζεται κάποιο εύλογο χρονικό διάστημα. Αν ένας άνδρας κινηθεί προς έναν τοίχο θα πρέπει πρώτα να διανύσει την μισή απόσταση, κατόπιν τη μισή της υπόλοιπης απόστασης και μετά ξανά τη μισή της μισής της υπόλοιπης και ούτω καθ' εξής. Σε κάθε κίνηση προς τη μισή διαδρομή απαιτείται κάποιο αντίστοιχο χρονικό διάστημα και αφού ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων είναι άπειρος, μια και τα αντίστοιχα μισά των αποστάσεων είναι άπειρα, τότε για την ολοκλήρωση της κίνησης μέχρι τον τοίχο ο απαιτούμενος χρόνος θα είναι άπειρος. Συνεπώς ποτέ ο άνδρας δε φθάνει στον τοίχο! Το χειρότερο εδώ είναι ότι δεν μπορεί ακόμα – ακόμα να ξεκινήσει την κίνηση, αφού το πρώτο τμήμα του ταξιδιού του είναι κατά τον ίδιο τρόπο επίσης διαιρετό σε άπειρα τμήματα. Γίνεται άμεσα αντιληπτή η ένσταση της αριστοτελικής θέσης πως σε πεπερασμένο χώρο (απόσταση άνδρα – τοίχου) η κίνηση δεν μπορεί να διαρκέσει άπειρο χρόνο. Με παρόμοια απλότητα, αλλά φιλοσοφική μαεστρία καταρρίπτει ο Σταγειρίτης και τα υπόλοιπα παράδοξα του Ζήνωνα. Στο παράδοξο Αχιλλέα – χελώνας, το λάθος του Ζήνωνα είναι η παραδοχή του άπειρου διαστήματος, φυσικά ανύπαρκτου. Στο παράδοξο του βέλους ο χρόνος και το διάστημα της κίνησης διαιρούνται κατά λανθασμένη σκέψη σε άπειρα σημεία. Αυτά όμως τα χωροχρονικά άπειρα είναι μόνο εν δυνάμει, δηλαδή στην πραγματική κίνηση του βέλους δεν συμβαίνουν πραγματικά: ο Ζήνωνας εδώ μπλέκει τις δυνητικές οντότητες με τις πραγματικές. Σκοπός του Ζήνωνα μέσω των αντινομιών που τα προβλήματα που έθεσε έφεραν, ήταν να απορρίψει την κίνηση ή τη μεταβολή και τον χρόνο (Σφενδόνη Δ., σελ.198) [22]. Η Σφενδόνη παραλληλίζει το κινούμενο – ακίνητο βέλος με μια στιγμή από τον σύγχρονο κόσμο της κινηματογραφικής ταινίας, όπου κάποιος άλλος, πέραν του σκηνοθέτη, τραβά φωτογραφίες από την ταινία. Στο τέλος της ταινίας οι φωτογραφίες φαντάζουν σαν οι πρωταγωνιστές να ήταν ακίνητοι, αν όμως τις βάλουμε όλες στη σειρά, είναι χρονικές στιγμές (νυν) που πραγματοποιήθηκαν διακόπτοντας το συνεχόμενο φιλμ της ταινίας. Αυτές όμως οι φωτογραφίες που διέκοπταν το συνεχές του χρόνου είναι άπειρες μόνο δυνητικά και οριοθετούν το εν δυνάμει άπειρο που ξετυλίγεται μέσα στον χρόνο και δεν είναι ποτέ παρόν ως σύνολο. Τέλος, όσον αφορά το παράδοξο του σταδίου με τους διασταυρούμενους δρομείς, ουσιαστικά ο Ζήνωνας συγκρίνει τη σχετική ταχύτητα των αντίθετα κινούμενων ομάδων με την απόλυτη ταχύτητα μιας εξ' αυτών ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή. Το σφάλμα είναι προφανές, όμως ακόμα και έτσι θαυμάζει κανείς την ευρηματικότητα του Ζήνωνα για πολυπληθείς ομάδες ώστε να μπορέσει να μετρήσει τις ταχύτητες των αθλητών χρησιμοποιώντας

σώματα συναθλητών ελλείπει χρονομέτρου! Γενικότερα, παρά την αριστοτελικής φύσης επίλυσής τους, τα παράδοξα του Ζήνωνα προκάλεσαν καίρια την προαγωγή της αρχαίας Ελληνικής φυσικής φιλοσοφίας. Η κίνηση δεν είναι μόνο μία ποσοτικής μελέτης συμπεριφορά φυσικών σωμάτων, αλλά με τις εννοιολογικές διαιρέσεις του χώρου και του χρόνου γίνεται μια θεωρητική έννοια ικανή να θέτει προβλήματα, να αναμιγνύει άπειρες έννοιες και να εξυψώνει τον πήχη της Ελληνικής διανόησης (C.Osborne, σελ. 72-73) [23].

2.4. Το βιβλίο Θ' των Φυσικών του Αριστοτέλη: η αιωνιότητα της κίνησης και το πρώτο κινούν ακίνητο

Στο Θ' βιβλίο των Φυσικών του Αριστοτέλη η κατεύθυνση είναι κυρίως κοσμολογική. Κλείνει την ενότητα της φυσικής αρμονίας που δεσπόζει στο σύμπαν και καταθέτει την άποψή του ως προς την αιωνιότητα, την κίνηση, τι προκαλεί την αιώνια κίνηση, ποιο είδος κίνησης είναι αιώνιο και ποιο όχι. Συνεχίζεται και η προσπάθεια του παρόντος συγγραμματος στη διπλή κατεύθυνση που έχει εστιαστεί από την αρχή: 1) είναι το άπειρο πραγματικό και πώς το αντιλαμβάνεται ο Φιλόσοφος ; και 2) ποια είναι η σχέση με του προγενέστερους του φιλοσόφους, τα σημεία διαφωνίας του δηλαδή με τη μέχρι τότε γνωστή ως Πρώτη Φιλοσοφία.

2.4.1. Ενότητες Θ1, Θ2, Θ3 : αιωνιότητα της κίνησης

Η είσοδος στο Θ (τελευταίο) βιβλίο των Φυσικών ξεκινάει με επαναδιαπραγμάτευση παλαιότερων αντιλήψεων σχετικά με την κίνηση. Διαφωνεί με τον Εμπεδοκλή ως ανεπαρκή κινητική αιτία τη φιλία και το νείκος (διαμάχη) στο περί γενέσεως και φθοράς 334 α 7-9. Επίσης με ισχυρά αντεπιχειρήματα διαφωνεί σαφώς με τις θέσεις της Πλουραλιστικής σχολής του Εμπεδοκλή και Αναξαγόρα σύμφωνα με τις οποίες η αιώνια και άφθαρτη κίνηση εναλλάσσεται με διαστήματα ηρεμίας (Σιάσος Λ., σελ. 363) [13]. Ούτε δέχεται την ύπαρξη άπειρων κόσμων όπως ο Αναξίμανδρος, ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος. Και τούτα τα αντεπιχειρήματα στηρίζονται στην πάγια αριστοτελική αρχή ότι στη φύση τα πάντα βρίσκονται σε τάξη, για την ακρίβεια **η φύση είναι η αιτία τάξεως**. Εκεί που θέλει να καταλήξει ο Φιλόσοφος σε αυτό το τελευταίο του βιβλίο είναι

ότι αφού η κίνηση πάντα υπήρχε, άρα πάντα υπήρχαν κινούμενα και αυτά που προκαλούσαν την κίνηση (Κάλφας Β., σελ. 552-553) [7]. Όσες φορές όμως του δίνεται η ευκαιρία συμφωνεί με θέσεις άλλων φιλοσόφων όπως με τον Δημόκριτο, τον Εμπεδοκλή και τον Αναξαγόρα σχετικά με την αποδοχή της θέσης περί αιωνιότητας του χρόνου και επομένως και υπέρ της αιωνιότητας της κίνησης. Ή όταν υποστηρίζει ότι το αγέννητο είναι και άφθαρτο, μια πάγια Αρχαία Ελληνική σκέψη. Μάλιστα σε ένα άλλο σημείο ο Graham D.W. (σελ 53) [24], εντοπίζει ότι η λέξη αρχή συμπίπτει εκτός της έννοιας της έναρξης της κίνησης και με την προσωκρατική έννοια του πρωταρχικού σημείου από το οποίο σημείο αποτελούνται όλα τα εγκόσμια. Με τη βοήθεια της απροσδιοριστίας του λόγου, της αναλογίας άπειρο προς άπειρο, ο Αριστοτέλης θέλει να επιβάλει την άποψη ότι **η νομοτέλεια αποτελεί εσωτερικό κανόνα της φύσης** (During I., σελ. 68) [25], μια ευθεία σύγκρουση με τους Εμπεδοκλή και Αναξαγόρα· μεταξύ των θεωριών τους όμως, ο Σταγειρίτης πιστεύει πως η θέση του Εμπεδοκλή για ύπαρξη μίας μόνο αρχής του κόσμου, προκρίνεται σε σχέση με τη διδασκαλία του Αναξαγόρα.

Στην παράγραφο Θ2 ο Αριστοτέλης μιλά για την αιωνιότητα της κίνησης και οι έριδές του έναντι των Αναξαμένη και Αναξαγόρα εστιάζονται ότι αυτοί πιστεύουν στην ύπαρξη του απείρου, ενώ αυτός δέχεται μόνο την εν δυνάμει παρουσία του, όπως αναλυτικά έχει αναφερθεί παραπάνω. Τώρα σε μια απολαυστική παράγραφο στους στίχους 252 b 9-30 κάνει μία γενική αναφορά και τα βάζει κατά πάντων των φιλοσόφων αντιτείνοντας τις προσωπικές του αρχές της κίνησης. Έτσι, ότι τα πάντα ηρεμούν εκφράζει τη θέση των Ελεατών με πρώτο τον Παρμενίδη, ενώ ότι τα πάντα κινούνται είναι η θέση του Ηράκλειτου. Κατόπιν αυτός που διακρίνει τα όντα σε αυτά που ηρεμούν πάντα και σε εκείνα που κινούνται πάντα είναι ο Πλάτων. Μετά, η αντίληψη ότι η φύση επιβάλλει τα πάντα να κινούνται και να ηρεμούν αδιακρίτως ανήκει στον Εμπεδοκλή, ενώ η τοποθέτηση περί όντων που είναι αιώνια ακίνητα, άλλα να βρίσκονται αιωνίως σε κίνηση και κάποια άλλα να μετέχουν πότε σε κίνηση και πότε σε ακινησία, αριστοτεχνικά αποτελεί τη θέση του ίδιου του Αριστοτέλη, που την αφήνει επίτηδες τελευταία! Ακόμη όμως και μεταξύ αυτών που διαφωνεί ο τελειομανής στην απόδειξη Αριστοτέλης, προκρίνει με βάση τις ιδέες του ποια σχολή είναι προτιμότερη (δηλαδή λιγότερο λάθος) σε σχέση με μια άλλη που διαφωνεί πλήρως. Έτσι, προτιμά την Ηρακλείτεια θέση περί κίνησης των πάντων σε σχέση με την Ελεατική άποψη περί ακινησίας των πάντων· γενικότερα στο κάδρο της στόχευσής του βρίσκονται οι Ελεάτες και κυρίως ο Ζήνωνας!

Φθάνει μάλιστα στο απόγειο της διαφωνίας του περί ακινησίας των όντων όταν λέει πως ακόμα και η φαντασία ή η εντύπωση πως όλα είναι ακίνητα, είναι ως έκφραση ή ως εικόνα, μια μορφή κίνησης!

Ο Graham D.W. (σελ.71-72) [24], αναφέρει για τη συγκεκριμένη έριδα πως ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι το ίδιο το φαίνεσθαι, μέσω της εντύπωσης και της φαντασίας είναι κίνηση επιχειρηματολογώντας με το ύφος των ίδιων των Ελεατών. Κι αυτό γιατί φανερά δυσανασχετεί με την ελεατική θέση περί αμφισβήτησης της κίνησης που για αυτόν αποτελεί προφανές δεδομένο.

2.4.2. Θ4 έως Θ10: Το πρώτο κινούν ακίνητο, η αέναη κυκλική κίνηση και οι φιλοσοφικές έριδες πάνω στην κοσμολογία

Φαινομενικά μια διατριβή που έχει να κάνει με το άπειρο και τις θεωρήσεις του καθώς και με τις διαμάχες που οι σχετικές με αυτό θεωρίες προκάλεσαν μπορεί να μην ενδιαφέρεται για την κοσμολογική προοπτική που ο Αριστοτέλης δίνει σε αυτό το τελευταίο τμήμα των Φυσικών του. Όμως, εξ αιτίας ακριβώς των φιλοσοφικών διαφορών που συναντά κανείς στο Κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια τελευταία προσπάθεια επεξήγησης των διάφορων θέσεων με κυρίαρχη βέβαια του μεγάλου Σταγειρίτη Φιλοσόφου.

Η δήλωση στους στίχους 255 α 16-17 «εξάλλου, πώς μπορεί κάτι από τη φύση του συνεχές και ομογενές να κινεί τον ίδιο τον εαυτό του;» αποτελεί απόρριψη της πλατωνικής διδασκαλίας πως πρωταρχική κίνηση αποτελεί η αυτοκίνηση. Γενικότερα ο Αριστοτέλης επεκτείνει το άτοπο της αυτοκίνησης εκτός των τεσσάρων στοιχείων της φύσης (φωτιά, αέρας, νερό και γη) και σε άλλα όντα που είναι συνεχή όπως οι ουράνιες σφαίρες (M. L. Gill, σελ. 253) [26].

Στην «κοσμολογία» του Αριστοτέλη που αποτελεί το Θ' βιβλίο σύμφωνα με πλειάδα μελετητών γίνεται λόγος για το πρώτο κινούν ακίνητο, που είναι εκείνη η μη φυσική αρχή που ενεργεί στη φύση και εξασφαλίζει την αιωνιότητα της κίνησης. Στο βασικό ερώτημα «άραγε ήρθε κάποτε η κίνηση από την ανυπαρξία και το αντίστροφο;», ο Αριστοτέλης προκαταβάλλει έμμεσα την απάντηση με το ρητορικό ερώτημα «ή μήπως ούτε ήρθε στην ύπαρξη ούτε περνά στην ανυπαρξία, αλλά μήπως υπήρχε πάντα και θα υπάρχει κίνηση;».

Την αιωνιότητα της κίνησης εξασφαλίζει το **πρώτο κινούν ακίνητο** που είναι αιώνιο και αμετάβλητο συγκροτώντας έναν κόσμο **κανονικότητας στη φύση**, κεντρική Αριστοτελική νομοτελειακή λογική. Η ύπαρξη της μοναδικότητας του πρώτου κινούντος ακινήτου είναι επίσης αποτέλεσμα αρμονίας της φύσης, αλλά και η αιώνια κίνηση του ουρανού οφείλεται στην αιώνια κίνηση του πρώτου κινούντος ακινήτου, που είναι κυκλική κι όχι ευθύγραμμη, μια ακόμη ευθεία απάντηση στο Ζήνωνα. Το έσχατο λοιπόν ον, το πρώτο κινούν ακίνητο, δεν έχει μέρη, ούτε αποτελεί σώμα με κάποιο μέγεθος και τοποθετείται στην περιφέρεια της έσχατης κοσμικής σφαίρας (στο άπειρο;) και από εκεί προκαλεί τη μέγιστη περιστροφική ταχύτητα. Για την κατανόηση της θέσης του Αριστοτέλη πρέπει να λάβει κανείς υπ' όψιν του α) τη δεδομένη αιώνια κοσμική μεταβολή στην οποία πιστεύει, β) την πάγια αρχή της αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας πως τίποτα δεν δημιουργήθηκε εκ του μηδενός, γ) τη βασικά αριστοτελική θέση πως η φύση τείνει να δίνει τις αρτιότερες απαντήσεις στις οντολογικές αναζητήσεις κάθε ανθρώπου και κάνει πάντα το καλύτερο και δ) στις βασικές αντιλήψεις του περί του άπειρου, της κίνησης και της άπειρης διαιρετότητας των συνεχών μεγεθών. Τώρα φαίνεται πως η κίνηση στο χώρο προηγείται της ποιοτικής μεταβολής και αυτή με τη σειρά της προηγείται της αύξησης ή της μείωσης. Στο ερώτημα δε αν υπάρχει συνεχής κίνηση, ο Αριστοτέλης πιστεύει σε όλο το Θ' βιβλίο ότι τέτοια είναι μόνο η κυκλική κίνηση (κυκλοφορία). Η κυκλοφορία ή κυκλικότητα απηχεί πάγια θέση της αρχαίας Ελληνικής σκέψης και οφείλεται στην παρατήρηση της κίνησης ουρανίων σωμάτων και στην περιοδική επανάληψη των φυσικών φαινομένων (Μπετσάκος Β., σελ. 799) [6]. Στο Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας, τόμος Α', των Windelband και Heimsoeth γίνεται σύνδεση μεταξύ της κυκλικής αυτής κίνησης και του πρώτου κινούντος ακινήτου του Αριστοτέλη, λέγοντας μάλιστα ότι εδώ έχει επηρεαστεί από τη διδασκαλία του Πλάτωνα απηχώντας τις αστρονομικές αντιλήψεις του τελευταίου (σελ. 169). Σημαντική πληροφορία περί της συνέχειας μόνο της κυκλικής κίνησης και όχι της κίνησης σε ευθεία γραμμή είναι η αριστοτελική αντίληψη της ευθείας γραμμής που δεν επεκτείνεται επ' άπειρον όπως πιστεύεται σήμερα, αλλά έχει αρχή και τέλος· δηλαδή αντιστοιχεί σε αυτό που σήμερα είναι το ευθύγραμμο τμήμα. Οπότε η ευθύγραμμη κίνηση δεν είναι αέναη, αλλά κάποια στιγμή σταματάει και αλλάζει φορά προς τα πίσω, δηλαδή ανακάμπει (Σιμπλίκιος, 10.1278, σελ. 13-16).

Επανέρχεται ο Αριστοτέλης στη σύγκρουσή του με τον Ζήνωνα, στους στίχους 263 α 15-24 στο Θ' βιβλίο και απορρίπτει τη ζηνώνεια λογική υπό το πρίσμα όχι της άπειρης διαιρετότητας του συνεχούς, όπως στο Ζ' βιβλίο, αλλά με τη νέα οπτική της μη άπειρης ευθύγραμμης κίνησης. Κεντρικό επιχείρημα και στις δύο θέσεις η εν δυνάμει ύπαρξη του απείρου και όχι η πραγμάτωσή του στον αληθινό κόσμο. Το παραπάνω χωρίο έχει υπάρξει θέμα προσεκτικής μελέτης από μεγάλα ονόματα μαθηματικών όλων των αιώνων μέχρι και σύγχρονων, αρχής γενομένης από τον μεγάλο G.Cantor, ο οποίος θα απασχολήσει τη διατριβή αυτή στο επόμενο κεφάλαιο. Ενδεικτικά ο Β. Μπετσάκος αναφέρει τους M. White, A.G.J. Newshead, D.M.Johnson κ.α., οι οποίοι προσεγγίζουν το χωρίο κυρίως με βάση τη θεωρία των διαστημάτων (intervals). Δεύτερο σημείο τριβής με τους υποστηρικτές της διδασκαλίας του Ζήνωνα βρίσκει κανείς στην αριστοτελική θέση για το συνεχές του χρόνου, που με μία ακόμη απόδειξη με την άτοπο απαγωγή δεν δέχεται τη διαίρεση του χρόνου σε περαιτέρω άτμητα διαστήματα. Άρα ο χρόνος (όπως και ο χώρος και η κίνηση) είναι συνεχής και η σύγκρουση αναπόφευκτη (Θ' 264 α, 6-10), αφού τα χρονικά σημεία (νυν = τώρα) δεν αποτελούν χρόνο, όπως ο Ζήνων υποστηρίζει για τα παράδοξά του.

Φτάνοντας προς το τέλος όλο και πιο έντονα στοιχεία κοσμολογίας συναντά κανείς. Η κυκλική κίνηση προηγείται κάθε άλλης μορφής κίνησης λογικά, χρονικά και οντολογικά. Οι αντιλήψεις της εποχής με την περιστροφή του Ήλιου γύρω από τη Γη δεσπόζουν σε αυτή τη θέση. Δεν συμφωνεί όμως με τη γενική θέση του Ηράκλειτου ότι τα πάντα ρέουν αιωνίως και αφανίζονται, αντιτείνοντας ότι μόνο η κυκλική κίνηση είναι μια άπειρη συνεχής μεταβολή (Θ' 265 α 12-16). Τώρα ενώ εκφράζει την αντίθεσή του στην ύπαρξη κίνησης που συνδέεται με το κενό, θέση του Ελεάτη Μέλισσου, ο Αριστοτέλης συμφωνεί με το σύνολο των Φιλοσόφων για την προτεραιότητα της κίνησης στον χώρο έναντι όλων των άλλων κινηστών: α) Με τον Εμπεδοκλή η συμφωνία βρίσκεται στο ότι η συνένωση (φιλία) και διάκριση (νείκος) είναι κινήσεις στον χώρο. β) Με τον Αναξαγόρα όταν ο τελευταίος λέει ότι ο Νους προκαλεί την αρχική κίνηση, γ) Με τον Μέλισσο στο ότι το κενό (διαφωνεί στην αιτία) είναι αυτό που προκαλεί την κίνηση. δ) Με τον Αναξιμένη που ισχυρίζεται ότι η γένεση και η φθορά κατασκευάζονται από την πυκνότητα και την αραιότητα, κάποιοι συνδέουν την ίδια θέση με το Θαλή και τον Πλάτωνα. ε) Με τον Πλάτωνα η συνάντηση βρίσκεται στη θέση του τελευταίου πως η αιτία της κίνησης είναι η ψυχή. Φυσικά πάγια αντίθεση του μαθητή (Αριστοτέλη) από τον δάσκαλο (Πλάτωνα) η

προέλευση της κίνησης στη φύση: ο δάσκαλος δίδαξε περί αεικίνητης πλατωνικής ψυχής και ο μαθητής μίλησε για το πρώτο κινούν ακίνητο που είναι εντελώς ακίνητο.

Το ταξίδι στον αριστοτελικό κόσμο τελειώνει κάπου εδώ. Η πρώτη ενασχόληση κάθε μελετητή με το έργο του μεγάλου Φιλοσόφου αφήνει στον μελετητή την υπόσχεση ότι θα ξαναγυρίσει στο ίδιο ή σε κάποιο άλλο κείμενό του πολύ σύντομα. Το πρώτο κινούν ακίνητο του Αριστοτέλη είναι η πρώτη κοσμολογική συγγραφή σε παγκόσμιο επίπεδο από τη φυσική σκοπιά, μακριά από θεϊστική επιρροή (Μπετσάκος Β., σελ. 78) [6] και με επιχειρηματολογία που υποστηρίζει σε όλο το έργο των Φυσικών. Η σύγκρουση με τις άλλες φιλοσοφικές τάσεις ήταν το ζητούμενο. Όμως η φιλοσοφική δυναμική των Φυσικών του Αριστοτέλη είναι μέχρι και σήμερα ανεξάντλητη.

3. GEORG CANTOR (KANTOP)

3.1. Ο προβληματισμός για το άπειρο στα τέλη του 19^{ου} αιώνα

Από την άνοδο των αφηρημένων μαθηματικών της αρχαίας Ελληνικής εποχής οι άνθρωποι έπρεπε να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα του απείρου σε πολλές μορφές. Η «εποχή του απείρου» που ουσιαστικά ξεκινάει με τις εκτενείς αναφορές του Αριστοτέλη, έχει διαφορετικές εφαρμογές στην γεωμετρία από ότι στην ανάλυση ή στη θεωρία συνόλων. Στη γεωμετρία το άπειρο γίνεται αντιληπτό κυρίως μέσα από την πίστη που ασκεί η ανθρώπινη φαντασία στη λογική αφού μια ευθεία γραμμή δεν έχει άκρα, αν και στο σχήμα μόνο ένα μικρό πεπερασμένων άκρων τμήμα της σχεδιάζει κανείς. Στην ανάλυση το άπειρο αναζητείται στα όρια των συναρτήσεων και στη θεωρία συνόλων η μεγάλη αλλαγή συνοδεύτηκε από τις δημοσιεύσεις του Cantor προς το τέλος του 19^{ου} αιώνα. Η διαφοροποίηση γίνεται σε **πραγματικό** και **δυνητικό** άπειρο (**actual and potential infinity**). Σύμφωνα με την ιδέα του πραγματικού απείρου, πεπερασμένες και άπειρες ποσότητες υπάγονται κάτω από την ίδια θεωρία, η άπειρη ποσότητα απλά είναι λίγο μεγαλύτερη από την πεπερασμένη. Σύμφωνα με την ιδέα του δυνητικού απείρου, το άπειρο είναι σχήμα λόγου, η άπειρη ποσότητα είναι αυθαίρετα μεγάλη και ουσιαστικά απροσδιόριστη, άγνωστη. Για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών με όρους δυνητικού απείρου εκφράζει την ατέρμονη διαδικασία $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$ που δεν θα τελειώσει ποτέ, ενώ το ίδιο σύνολο στο πραγματικό άπειρο είναι το σαφές, ευκρινές σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, τόσο ευκρινές, σχεδόν χειροπιαστό.

«Στη διάρκεια της ανθρώπινης ιστορίας το άπειρο σχεδόν παμψηφεί είναι αποδεκτό ως δυνητικό» (W. Mückenheim, κεφάλαιο 8) [27]. Η θέση αυτή φαίνεται να δεσπόζει από την εποχή του Αριστοτέλη μέχρι και τις αρχές του 21^{ου} αιώνα. Ο Carl Friedrich Gauss, όπως και ο Augustin Louis Cauchy είχαν αντιταχθεί στο πραγματικό άπειρο. Σε ένα γράμμα του ο Gauss προς τον H.C. Schumacher της 12^{ης} Ιουλίου του 1831 αναφέρει: «Διαμαρτύρομαι κατά της χρήσης μιας άπειρης ποσότητας σαν μια ολότητα, πράγμα που δεν θα έπρεπε να ισχύει στα μαθηματικά. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος ομιλίας όταν μιλάμε για όρια που προσεγγίζονται με συγκεκριμένους λόγους όσο κοντά επιθυμούμε». Ένας επιπλέον λόγος που το δυνητικό άπειρο είχε επικρατήσει έναντι του πραγματικού απείρου ήταν η μεγάλη

ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Η αυστηρή αναλυτική θεωρία των ορίων, των απείρων αθροισμάτων, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού που αναπτύχθηκαν το 19^ο αιώνα εξοστράκισαν τα απειροστά και τα άπειρα ποσά για χάρη των αυθαίρετα μικρών θετικών αριθμών ε και δ και των αυθαίρετα μεγάλων αριθμών n . Η χρήση των $\varepsilon - \delta$ ορισμών καθώς και των n ορισμών με $n > m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έφεραν στο προσκήνιο το δυνητικό άπειρο, το οποίο υπερασπίστηκαν οι Cauchy και Gauss ωρρίτερα. Ο Thomas Hobbs πιστεύει τα λόγια του P. Mancosu ότι «μια κύρια πηγή σφαλμάτων είναι η μη αντίληψη του απείρου στη γεωμετρία και την αριθμητική, συνεπώς όταν οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν τη λέξη άπειρο θα έπρεπε να σημαίνει οσοδήποτε μεγάλο τους ευχαριστεί» [28]. Και ο Ιρανός S.S. Mirahmani ρητά θεωρεί ότι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ δεν υπάρχει [29].

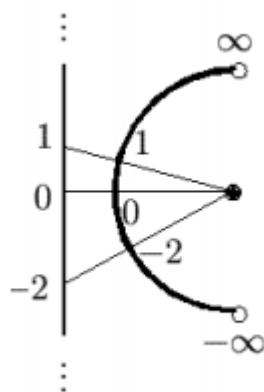
3.2. Το δυνητικό και το πραγματικό άπειρο με παραδείγματα. Η εμφάνιση του Cantor

Η κυρίαρχη θέση του πραγματικού απείρου αποκαταστάθηκε με την ανάδειξη της υπερπεπερασμένης θεωρίας συνόλων. Πολλοί μαθηματικοί δεν αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ πραγματικού και δυνητικού απείρου, ενώ αρκετοί μελετητές της θεωρίας συνόλων δεν δέχονται καν τον όρο «πραγματικό άπειρο» ως ορολογία της θεωρίας συνόλων. Ο P.L. Clark στις 2 Ιουλίου 2010 αναφέρει: «Χρησιμοποιούνται όροι όπως ολοκληρωμένο άπειρο αντί για δυνητικό άπειρο, που όμως δεν είναι μέρος της μαθηματικής καθομιλουμένης» [30]. Ας γίνει εδώ μια προσπάθεια κατανόησης της διαφοράς μεταξύ των δύο ειδών του απείρου, δυνητικού και πραγματικού, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και στη συνέχεια θα γίνει αναφορά στη νέα αντίληψη που η θεωρία συνόλων που εισήγαγε ο Georg Cantor γύρω στα τέλη του 1880 επέφερε.

Το δυνητικό άπειρο (potential infinity) αναφέρεται σε μία διαδικασία που προσεγγίζει όλο και πιο κοντά, αλλά ποτέ δεν φτάνει στο τέλος του απείρου. Για παράδειγμα, η ακολουθία αριθμών 1,2,3,4, ... γίνεται όλο και μεγαλύτερη, αλλά δεν έχει τέλος, ποτέ δεν φτάνει το άπειρο. Το άπειρο είναι μια ένδειξη κατεύθυνσης· είναι κάτι έξω από την απόσταση. Κυνηγώντας αυτό το είδος του απείρου είναι σαν να κυνηγάει κανείς το ουράνιο τόξο στην άκρη του κόσμου: νομίζει κανείς ότι το βλέπει, αλλά όταν πηγαίνει εκεί που νόμιζε

ότι ήταν το τέλος, καταλαβαίνει ότι είναι ακόμη πολύ μακριά (W. Mückenheim, σελ. 11) [31]. Γεωμετρικά, το άπειρο είναι αυτό που λείπει από το τέλος μιας άπειρης εκτεινόμενης ευθείας γραμμής. Ανάλογες προσεγγίσεις δίνουν τα όρια στον απειροστικό λογισμό είτε χρησιμοποιείται το άπειρο είτε όχι. Για παράδειγμα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, σημαίνει ότι επιλέγοντας τιμές ολοένα και πιο κοντά στο 0 για το x , αλλά ποτέ ίσες με μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\eta\mu x}{x}$ πηγαίνει ολοένα και πιο κοντά στο 1. Εύστοχα ο Edward Nelson τοποθετεί το δυνητικό άπειρο, του οποίου είναι υπέρμαχος ως εξής: «Οι αριθμοί συνιστούν ένα δυνητικό άπειρο. Φανταστείτε τώρα αυτό το δυνητικό άπειρο ολοκληρωμένο. Φανταστείτε την ατέρμονη διαδικασία της κατασκευής των αριθμών κατά κάποιον τρόπο τελειωμένη και έστω το σύνολο όλων των αριθμών, ας το συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$. Τότε το $\mathbb{N}$ πρέπει να είναι το πραγματικό ή ολοκληρωμένο άπειρο. Αυτή είναι μια περίεργη ορολογία, αφού η ετυμολογία της λέξης άπειρο είναι "όχι ολοκληρωμένο"» (Edward Nelson, σελ.3) [32].

Το πραγματικό ή ολοκληρωμένο άπειρο (actual ή completed infinity) είναι ένα άπειρο που μπορεί κανείς να φτάσει, μια διαδικασία περατωμένη. Για παράδειγμα, αν τοποθετήσει κανείς άγκιστρα στην προηγούμενη ακολουθία αριθμών: $\{1,2,3,4, \dots\}$ τότε έχει ορίσει το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων κι αυτό είναι ένα μόνο αντικείμενο με απείρως πολλά στοιχεία. Με αυτό δεν εννοούμε ένα μεγάλο πεπερασμένο σύνολο που ολοένα προσθέτει νέα μέλη, αλλά έχει ήδη άπειρα μέλη. Γεωμετρικά το παραπάνω άπειρο φαίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 17 1-1 αντιστοίχιση σημείων ημικυκλίου στο $\mathbb{R}$

Το διάγραμμα δείχνει μια 1 – 1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων ενός ημικυκλίου και μιας άπειρης ευθείας γραμμής. Δεν υπάρχουν σημεία για το $-\infty$ και το $+\infty$, όμως αγγίζει κανείς τους «αριθμούς» αυτούς στα άκρα του ημικυκλίου. Ο ίδιος ο Cantor σε ένα γράμμα του στον A. Eulenburg το Φεβρουάριο του 1886 λέει: «Με τον όρο πραγματικό άπειρο πρέπει να αντιληφθούμε μία ποσότητα που δεν είναι μεταβλητή αλλά ολοκληρωμένη και καθορισμένη, σαν μια σταθερά, αλλά επίσης εκτεινόμενης κάθε πεπερασμένης ποσότητας κάποιου μεγέθους, από το ίδιο είδος μεγέθους». Ο ίδιος ο Cantor δεν κουραζόταν να υπερασπίζεται το πραγματικό άπειρο σε οποιονδήποτε, οπουδήποτε και οποτεδήποτε μπορούσε: «Εξ' αιτίας της σημαντικής διαφοράς μεταξύ των εννοιών του δυνητικού και πραγματικού απείρου, όπου το πρώτο είναι ένα μεταβλητό πεπερασμένο μέγεθος, που αυξάνεται πέρα κάθε ορίου, ενώ το δεύτερο είναι μια σταθερή ποσότητα ολοκληρωμένη στον εαυτό της αλλά μεγαλύτερο από όλα τα πεπερασμένα μεγέθη, συμβαίνει πολύ συχνά κανείς να μπερδεύει το ένα με το άλλο» (G. Cantor, σελ. 374) [33].

Πώς όμως ο σύγχρονος άνθρωπος, ο μαθηματικός του σήμερα δηλαδή, εκλαμβάνει αυτήν τη διάσταση στην «ποιότητα» του απείρου; Ή μήπως το ερώτημα είναι ποσοτικό; Η αναζήτηση της αλήθειας, αν και βρίσκεται στους στόχους του παρόντος συγγράμματος, δεν είναι πρόδηλη. Κι αυτό αφού εκατό και πλέον χρόνια μετά, δεν υπάρχει μια σαφής επικράτηση μεταξύ δυνητικού και πραγματικού απείρου. Υπάρχουν όμως κάποια συμπεράσματα, όχι μόνο φιλοσοφικής, αλλά και πρακτικής σκοπιάς που θα τεθούν σε διάλογο στο τέλος. Τώρα, αξίζει σε πρώτη φάση να μελετηθεί το καρποφόρο έργο ενός ανθρώπου που άλλαξε την ιστορία της θεωρίας των συνόλων και κατ' επέκταση τη θεώρησή μας για τους αριθμούς, του Georg Cantor, γύρω στα 1880. Με όρους σημερινούς πάντως, και μετά τη συμβολή του Cantor, ο W. Mückenheim (σελ. 19) [31] αναφέρεται ότι κάποιος διακρίνει τα δύο άπειρα στο σύνολο των αριθμήσιμων πληθικών αριθμών ως εξής:

1. Δυνητικό άπειρο: $\forall n \exists m: n < m$, δηλαδή για κάθε αριθμήσιμο πληθικό αριθμό n , υπάρχει ένας μεγαλύτερος.
2. Πραγματικό άπειρο: $\exists m \forall n: n \leq m$, δηλαδή υπάρχει ένας αριθμήσιμος πληθικός αριθμός m που δεν είναι μικρότερος από κάθε άλλο αριθμήσιμο πληθικό αριθμό n (ή που είναι μεγαλύτερος από κάθε άλλο διαφορετικό αριθμήσιμο πληθικό αριθμό).

Σε όρους του Cantor, ο αριθμός m είναι ο $\aleph_0$ που θα αναφέρουμε παρακάτω παρουσιάζοντας το έργο του Cantor. Επίσης ο όρος αριθμήσιμος πληθικός αριθμός (countable cardinal number), αναφέρει ο W. Mückenheim, δεν υπονοεί απλά την έννοια του αριθμού, αλλά την ιδιότητα της τριχοτομίας που δύο τέτοιοι αριθμοί αληθεύουν: αν α, β είναι δύο αριθμήσιμοι πληθικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$.

Η σημαντική παρατήρηση εδώ είναι η φορμαλιστική επιβεβαίωση, μέσω τύπων δηλαδή, των όσων υποστήριζε ο Cantor στα γράμματά του και στα συγγράμματά του. Λέγοντας ότι το δυνητικό άπειρο είναι συνεχώς μεταβαλλόμενο, εννοεί ότι $\forall n$ μπορεί να βρεθεί m που συνεχώς θα αυξάνει το μέγεθος του αριθμού n . Ενώ το πραγματικό άπειρο είναι για τον Cantor ένα σταθερό αντικείμενο με m πλήθος στοιχείων ($m = \aleph_0$), ώστε $\forall n$ να έχουμε πάντα ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων μικρότερο από m , άρα το πραγματικό άπειρο είναι πάντα μεγαλύτερο κάθε πεπερασμένου πλήθους στοιχείων.

Εδώ έχει αναπτυχθεί τον τελευταίο αιώνα μια πανσπερμία απόψεων σχετικά με το πραγματικό άπειρο. Ο κονστρακτιβιστής C. S. Hansen αναφέρει: «Οι αιτίες που δημιουργούν σκεπτικισμό κατά του πραγματικού απείρου είναι τόσο δυνατές· και τα μαθηματικά δεν πρέπει να βασίζονται σε αυτό. Δεν είναι ξεκάθαρο τι φέρνει ο «καντοριανός παράδεισος» και οι παράλογες συνέπειες που φέρνει το πραγματικό άπειρο» (C.S. Hansen, σελ. V) [35]. «Όταν δύο γραμμές είναι άπειρες, δεν έχουμε σημείο να μετρήσουμε και καμία σύγκριση δεν είναι δυνατή [...]. Οι όροι μακρύτερο, κοντύτερο, ίσα δεν έχουν κανένα νόημα σε άπειρες γραμμές. Μόνο για τα πεπερασμένα χρησιμοποιούμε τέτοιους όρους. Κι αν κανείς πει ότι ένα άπειρο είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο, αυτό είναι πιθανό στα λόγια, όχι όμως στη σκέψη...» (G. S. Fullerton, σελ. 22) [36]. Ο Harvey Lubin υποστηρίζει ότι η έννοια του απείρου είναι «αντι-επιστημονική» ενώ το παράδειγμα του D. Stockbauer είναι εξαιρετικό: «Η απάντηση στον Cantor είναι από τον κυβερνοχώρο, ότι υπάρχει μόνο εν δυνάμει άπειρο, αυτό που υπάρχει στο φυσικό κόσμο. Για παράδειγμα, όταν προγραμματίζεται ένα διαστημικό όχημα να στέλνει αναφορά μία φορά την ημέρα «για πάντα», γνωρίζουμε ότι αυτή η διαδικασία κάποτε θα τελειώσει και τότε το πραγματικό άπειρο, ένα μαθηματικό παιχνίδι για μωρά (“playtoy”) δεν θα μπορεί να εφαρμοστεί στον πραγματικό κόσμο» (D. Stockbauer, sci.math) [37].

3.3. Georg Cantor: γέννηση, καταγωγή και σπουδές του

Ο Georg Cantor γεννήθηκε στις 3 Μαρτίου 1845 στην Αγ. Πετρούπολη της Ρωσίας.* Σε ηλικία 17 ετών, το 1862 εισάγεται στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης και το 1863 λόγω μιας μεγάλης κληρονομιάς που λαμβάνει από το θάνατο του πατέρα του σπουδάζει στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Παρακολουθεί διαλέξεις εξάιρετων καθηγητών, όπως ο Leopold Kronecker, ο Karl Weierstrass και ο Ernst Kummer. Το 1872 (27 ετών) τοποθετείται επίκουρος καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Halle στη Γερμανία και τελικά το 1879 σε ηλικία 34 ετών γίνεται τακτικός καθηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο, θέση που κρατάει έως το τέλος της ζωής του.**

*Οι πρόγονοί του ήταν μέλη της εβραϊκής κοινότητας των Σεφαραδιτών της Κοπεγχάγης, πρωτεύουσας της Δανίας. Συγκεκριμένα ο πατέρας του γεννήθηκε στην Κοπεγχάγη από Εβραίους γονείς από την τοπική πορτογαλική-εβραϊκή κοινότητα, κατέφυγε στη Ρωσία λόγω της διαταραχής της Λουθηρανικής Εκκλησίας της Αγίας Πετρούπολης. Η μητέρα του καταγόταν από την Αυστρία και την Ουγγαρία, γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη και βαπτίστηκε Ρωμαιοκαθολική! Ο ίδιος ο Cantor σε επιστολή του στον Bertrand Russell περιέγραψε την καταγωγή του ως εξής: «Ούτε ο πατέρας μου, ούτε η μητέρα μου ήταν γερμανικής καταγωγής, ο πατέρας μου είναι Δανός, γεννημένος στην Κοπεγχάγη, η μητέρα μου από Αυστρία και Ουγγαρία. Πρέπει να ξέρετε, κύριε, ότι δεν είμαι ένας συνηθισμένος ακριβώς Γερμανός, γιατί έχω γεννηθεί 3 Μαρτίου 1845 στην Αγία Πετρούπολη, πρωτεύουσα της Ρωσίας, αλλά πήγα με τον πατέρα μου, την μητέρα μου και τα αδέρφια μου, έντεκα ετών, το 1856, στη Γερμανία.» Το 1856 λοιπόν, λόγω μιας έντονης καταπόνησης της υγείας του πατέρα του, σε ηλικία 11 ετών ο Cantor μετακομίζει με όλη την οικογένειά του στη Γερμανία, πρώτα στο Βισμπάντεν, έπειτα στη Φρανκφούρτη, προς αναζήτηση ηπιότερους κλίματος από αυτό της Αγίας Πετρούπολης.

**Το καλοκαίρι του 1866 (21 ετών) το πέρασε στο πανεπιστήμιο του Γκέτιγκεν που μαζί με αυτό του Βερολίνου βρισκόταν στην κορυφή του μαθηματικού ενδιαφέροντος της εποχής. Το 1867 (22 ετών) ο Cantor ολοκλήρωσε τη διατριβή του στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου με τίτλο: «Σχετικά με τις απροσδιόριστες εξισώσεις δευτέρου βαθμού». Ταυτόχρονα όμως τον απασχόλησε η θέση: «Να θέτει κανείς ερωτήματα στα Μαθηματικά είναι ίσως πολυτιμότερο από την επίλυση προβλημάτων» και ως παράδειγμα χρησιμοποίησε ένα ερώτημα που ο Carl Freidrich Gauss είχε αφήσει ανοικτό από το 1801 στο έργο του *Disquisitiones Arithmeticae*.

Το 1872 και σε ηλικία 27 ετών έγινε επίκουρος καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Χάλε (Halle) και τελικά το 1879 έγινε τακτικός καθηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο, θέση που κράτησε έως το τέλος της ζωής του. Ο ίδιος αισθανόταν ότι βρισκόταν σε ένα δευτεροκλασσάτο πανεπιστήμιο, μακριά από την έμπνευση και την αλληλεπίδραση με άτομα υψηλού διαμετρήματος άλλων πανεπιστημίων όπως του Γκέτιγκεν ή, ακόμα καλύτερα, του Βερολίνου. Προς το τέλος της καριέρας του, κατηγορήσε τον Κρόνεκερ ως υπεύθυνο για αυτήν την επιστημονική απομόνωση.

Ο νέος καθηγητής του πανεπιστημίου του Χάλε, Cantor, άρχισε άμεσα να δημοσιεύει εργασίες και ξεκίνησε το δημιουργικό του έργο. Ένας από τους πρυτάνεις στο Χάλε, ο Έντουαρντ Χάινε, είχε κάνει μια δημοσίευση, αν μια συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί κατά μοναδικό τρόπο από μια τριγωνομετρική σειρά. Η απόδειξη δεν ήταν καθόλου απλή και ολοκληρώθηκε ύστερα από αρκετά βήματα που το καθένα συνοδευόταν με την αντίστοιχη επέκταση του θεωρήματος της μοναδικότητας. Τα άρθρα δημοσιεύτηκαν στο σουηδικό περιοδικό *Acta Mathematica*, που εξέδιδε ο Σουηδός Γκέστα Μίταγκ-Λέφνερ, ένας από τους πρώτους μαθηματικούς που αναγνώρισαν την ιδιοφυία του Cantor. Τότε ο Cantor, σε ένα άρθρο του 1872, έδωσε τον ορισμό των άρρητων αριθμών μέσω συγκλινουσών ακολουθιών ρητών αριθμών. Είχε αρχίσει να κινείται σε μια περιοχή, που ούτε ο Κρόνεκερ, ο πρώην καθηγητής του και μετέπειτα βασικός θεωρητικός του αντίπαλος, ούτε κανένας άλλος μαθηματικός της εποχής του τόλμησαν να θίξουν ποτέ τόσο καιρία.

Ο D. Seaman αναρωτιέται: «Το γεγονός ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο μέσα στο σύνολο των φυσικών κι αυτό σημαίνει ότι κάθε φυσικός αριθμός υπάρχει είναι σαν να λέμε ότι αφού κάθε αγελάδα έχει τέσσερα πόδια, τότε οι αγελάδες υπάρχουν» (D. Seaman, sci.math) [38]. Σχετικά με την αποδοχή ή μη των θέσεων του Cantor ο Y. I. Manin τονίζει την υπερβολή: «Η υποδοχή των ιδεών του Cantor, ήταν κάτι σαν νέα τάση στην τέχνη παρά την επιστήμη, όπως ο ιμπρεσιονισμός. Ήταν συναισθηματικά εξαιρετικά φορτισμένη και κυμαινόταν από την απόλυτη απόρριψη («διαφθορέας της νεολαίας» του Kronecker) μέχρι τον υψηλότερο έπαινο (υπεράσπισή του από τον Hilbert ως ο «παράδεισος του Cantor»)» (Y. I. Manin, σελ. 10) [39]

3.4. Η έννοια της δύναμης ή πληθικού αριθμού συνόλου (cardinal number)

Ο Cantor ξεκινάει με τον ορισμό του **συνόλου** M (aggregate/Menge) που τα διακεκριμένα στοιχεία του m τα αντιλαμβάνεται κανείς με τη διαίσθηση ή τη σκέψη του. Συμβολίζει $M = \{m\}$. Η ένωση πολλών συνόλων μαζί $M, N, P, \dots$ χωρίς κοινά στοιχεία συμβολίζεται με $(M, N, P, \dots)$. Οι ορισμοί, οι συμβολισμοί, οι σχέσεις, οι τύποι, οι αντιστοιχίες και όλα τα σύμβολα είναι από το πρωτότυπο έργο του Georg Cantor: “Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers” που κυκλοφόρησε στο Halle το 1895 [40] και που στο εξής θα αναφέρεται στο κείμενο ως G. Cantor απλά. **Μέρος συνόλου**, δηλαδή **υποσύνολο** ενός συνόλου M καλεί κάθε σύνολο M_1 του οποίου τα στοιχεία είναι επίσης στοιχεία του M . Αν M_2 είναι μέρος του M_1 και M_1 μέρος του M , τότε το M_2 είναι μέρος του M . (Με σημερινούς όρους $M_2 \subseteq M_1$ και $M_1 \subseteq M$ τότε $M_2 \subseteq M$.) Κάθε σύνολο M έχει μία συγκεκριμένη «**δύναμη**» (**power**), που επίσης θα καλείται **πληθικός αριθμός** (“**cardinal number**”). Ο Cantor εδώ διευκρινίζει πως με τον όρο «δύναμη» εννοεί την έννοια των στοιχείων m του M με την αφαιρετική έννοια της σκέψης, απαλλαγμένων από οποιαδήποτε ιδιότητα ή διάταξή τους (G. Cantor, σελ. 85) [34]. Ο πληθικός αριθμός (cardinal number) δηλώνεται με το σύμβολο $\bar{M}$.

Δύο σύνολα M και N θα είναι ισοδύναμα και θα συμβολίζεται αυτό με $M \sim N$ αν μπορούν να τεθούν σε μία τέτοια σχέση, ώστε σε κάθε στοιχείο του καθενός αντιστοιχεί ένα και

μόνο ένα στοιχείο του άλλου. Επίσης σε κάθε μέρος M_1 του M αντιστοιχεί ένα ισοδύναμο μέρος N_1 του N και αντίστροφα. Ισχύουν:

$$M \sim M \quad (1)$$

$$M \sim P \text{ και } N \sim P \text{ τότε } M \sim N \quad (2)$$

Θεώρημα 1: $M \sim N \Leftrightarrow \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}} \quad (3)$

Απόδειξη: Ο Cantor κάνει στο πρωτότυπό του μια απόδειξη με λόγια, υποστηρίζοντας ότι ο πληθικός αριθμός $\bar{\bar{M}}$ μένει αναλλοίωτος αν αλλάξει κανείς κάποιο στοιχείο του M με ένα καινούριο ή και όλα τα στοιχεία του M με καινούρια στοιχεία, επιμένοντας στην ιδέα των στοιχείων συνόλου απαλλαγμένων από κάθε ιδιότητα πλην της αφηρημένης ιδιότητας της συμμετοχής τους στο σύνολο M .

Προχωρώντας μάλιστα γλωσσικά υποστηρίζει ότι έτσι όπως όρισε τη δύναμη του συνόλου M υπάρχει μια αμοιβαία μονοσήμαντη σχέση ανάμεσα στο M και τη δύναμη $\bar{\bar{M}}$, αφού ο πληθικός αριθμός $\bar{\bar{M}}$ αυξάνει κάθε φορά που προστίθεται ένα νέο στοιχείο m στο ήδη υπάρχον σύνολο M . Ως εκ τούτου προκύπτει:

$$M \sim \bar{\bar{M}} \quad (4)$$

(G. Cantor, σελ. 88) [40].

Άρα $M \sim \bar{\bar{M}}$ και ομοίως $N \sim \bar{\bar{N}}$. Τότε αν $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$ ισχύει $M \sim N$. ■

Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ο σημαντικός ρόλος που παίζει η γλώσσα κυρίως και όχι η μαθηματική πρακτική. Οι μαθηματικοί της εποχής του Cantor που η παραπάνω απόδειξη κάλυψε τη μαθηματική αποδεικτική ικανότητα του θεωρήματος τάχθηκαν υπέρ της νέας θεωρίας. Αντίπαλοί του όμως, όπως ο Kronecker, δεν πείστηκαν από αποδείξεις αυτής της μορφής. Ακριβώς μετά τον Cantor ξεκινάει μια εποχή έντονης δραστηριότητας πάνω στη λογική και τη χρήση της γλώσσας στη θεωρία συνόλων όπως το “Principia Mathematica” των Bertrand Russell και Alfred N. Whitehead, το “Grundlagen der Mathematik” του David Hilbert και αργότερα το έργο του Kurt Gödel και άλλων. Εκτός όμως από τους σύγχρονούς του, οι αντιδράσεις πολλές και σήμερα. «... Η μέτρηση

συνόλων και η σύγκριση, όπως σε όλα τα μαθηματικά, γίνεται για τις ανάγκες του πεδίου ορισμού μιας εφαρμογής. Για τα πεδία ορισμού όλων των εφαρμογών από ότι ξέρω, η μέθοδος του Cantor δεν είναι και η πιο κατάλληλη» (E. C. R. Hehner, άρθρο) [41]. Σε άλλο άρθρο ο A. Bauer επιχειρηματολογεί λέγοντας: «Η επιτυχία της θεωρίας συνόλων έχει οδηγήσει πολλούς να πιστεύουν ότι παρέχει ένα ακλόνητο θεμέλιο των μαθηματικών. Δεν είναι έτσι, απλά περιέχει μια μοναδικότητα της γλώσσας και στο στενό πλαίσιό της (η θεωρία συνόλων) είναι ένα μικρό θαύμα. Άλλωστε σκεφτείτε ότι πρακτικά όλα τα κλασσικά μαθηματικά εφευρέθηκαν πριν τη λογική και τη θεωρία συνόλων» (A. Bauer, άρθρο) [42]. Τώρα αν $M, N, P, \dots$ σύνολα χωρίς κοινά στοιχεία και ομοίως τα $M', N', P', \dots$ και ισχύουν $M \sim M', N \sim N', P \sim P', \dots$ τότε για τις ενώσεις τους: $(M, N, P, \dots) \sim (M', N', P', \dots)$ (5).

3.5. Σχέσεις με πληθικούς αριθμούς

Θεώρημα 2: Έστω 2 σύνολα M και N με τις ιδιότητες:

α) Δεν υπάρχει μέρος του M ισοδύναμο με το N

β) Υπάρχει μέρος N_1 του N με $N_1 \sim M$

Τότε δεν μπορεί να ισχύει $M \sim N$.

Απόδειξη: Αν ίσχυε $M \sim N$ και επειδή $N_1 \sim M$ τότε θα ήταν $N_1 \sim N$. Επειδή $M \sim N$ θα έπρεπε να υπάρχει, από προηγούμενη ιδιότητα, κάποιο μέρος του M , έστω M_1 , με $M_1 \sim N_1$ κι επειδή $N_1 \sim N$ θα ήταν και $M_1 \sim N$, που έρχονται σε αντίθεση με την ιδιότητα (α). ■

Ο Cantor με οδηγό το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνει ότι μεταξύ των πληθικών αριθμών $\alpha = \bar{M}$ και $\beta = \bar{N}$ θα ισχύει

$$\alpha = \beta \text{ ή } \alpha < \beta \text{ ή } \alpha > \beta \quad (6)$$

Επίσης για 3 πληθικούς αριθμούς συνόλων ισχύει ότι:

$$\text{αν } \alpha < \beta \text{ και } \beta < \gamma \text{ τότε } \alpha < \gamma \quad (7)$$

Από την ιδιότητα (6) απορρέουν τα εξής πορίσματα (G. Cantor, σελ. 91) [40]:

Πόρισμα 3: Αν το σύνολο M είναι ισοδύναμο με ένα μέρος N_1 του N και το N με ένα μέρος M_1 του M , τότε M και N ισοδύναμα.

Πόρισμα 4: Αν M_1 μέρος του συνόλου M , M_2 μέρος του συνόλου M_1 και τα σύνολα M και M_2 είναι ισοδύναμα, τότε M_1 είναι ισοδύναμο και στο M και στο M_2 .

Πόρισμα 5: Αν ένα σύνολο N δεν είναι ισοδύναμο τόσο προς το M όσο και σε κανένα άλλο μέρος του M , τότε υπάρχει μέρος N_1 του N που είναι ισοδύναμο στο M .

Πόρισμα 6: Αν M και N όχι ισοδύναμα σύνολα, και υπάρχει μέρος N_1 του N που είναι ισοδύναμο του M , τότε κανένα μέρος του M δεν είναι ισοδύναμο με το N .

Η παρατήρηση εδώ είναι διπλή: (α) Γίνεται πραγματική προσπάθεια από τον Cantor για τη θεμελίωση της νέας θεωρίας, που παρουσιάζεται ελκτική στα μάτια των μαθηματικών με υψηλά στάνταρ αυστηροποίησης της θεωρίας συνόλων και (β) Η αναμφισβήτητη εφαρμογή της θεωρίας στο πέρασμα του εικοστού αιώνα έφερε την παγίωση των κανόνων αυτών με τη σημερινή τους φορμαλιστική μορφή υπό μορφή υποσυνόλων ($\subset$).

Είδαμε στον τύπο (5) ότι αν $M \sim M'$ και $N \sim N'$, τότε $(M, N) \sim (M', N')$ όπως (M, N) το σύνολο της ένωσης συνόλων χωρίς κοινά στοιχεία (union aggregate/Vereinigungsmenge).

Αν $\bar{M} = \alpha$ και $\bar{N} = \beta$, ο παραπάνω τύπος οδηγεί στον:

$$\alpha + \beta = (\overline{M, N}) \quad (8)$$

Σε ελεύθερη μετάφραση, ο τύπος (8) δεν είναι τίποτα άλλο από τον προσθετικό νόμο για ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, αφού για τους πληθικούς αριθμούς των συνόλων αυτών γνωρίζουμε ότι $Num(M \cup N) = Num(M) + Num(N)$ με $M \cap N = \emptyset$. Αν συμβολίσει κανείς $\alpha = \bar{M} = Num(M)$, $\beta = \bar{N} = Num(N)$ και $\alpha + \beta = (\overline{M, N}) = Num(M \cup N)$ τότε η ταύτιση είναι προφανής. Αργότερα, διαιρώντας με $Num(\Omega)$, όπου Ω το υπερσύνολο του οποίου M και N είναι υποσύνολα, παίρνουμε τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων $P(M \cup N) = P(M) + P(N)$ για M, N ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Τώρα για $\alpha = \bar{M}$ και $\beta = \bar{N}$ ισχύουν:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad (9)$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \quad (10)$$

Ας έρθουμε τώρα στον πολλαπλασιασμό. Ο Cantor στη σελίδα 92 [40] αναφέρει ότι κάθε στοιχείο ενός συνόλου M μπορεί να θεωρηθεί δεσμευμένο με κάθε στοιχείο n ενός άλλου συνόλου N ώστε να οριστεί ένα νέο στοιχείο (m, n) . Συμβολίζουμε με $(M \cdot N)$ το σύνολο όλων των στοιχείων (m, n) , δηλαδή $(M \cdot N) = \{(m, n)\}$. Ορίζει τότε ως γινόμενο:

$$\alpha \cdot \beta = (\overline{M \cdot N}) \quad (11)$$

Αν τώρα $M \sim M'$ και $N \sim N'$ τότε $(M \cdot N) \sim (M' \cdot N')$.

Ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad (12)$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \quad (13)$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (14)$$

διότι:

$$(M \cdot N) \sim (N \cdot M) \quad (12')$$

$$(M \cdot (N \cdot P)) \sim ((M \cdot N) \cdot P) \quad (13')$$

$$(M \cdot (N, P)) \sim ((M \cdot N), (M \cdot P)) \quad (14')$$

Το σημείο της θεωρίας του Cantor που αποτελεί καίρια τομή της θεωρίας συνόλων είναι ο ορισμός της εκθετικής σχέσης των πληθικών αριθμών δύο συνόλων. Γι' αυτό ο Cantor ορίζει πρώτα το σύνολο των **καλύψεων** ενός συνόλου N με στοιχεία του συνόλου M και το συμβολίζει με $(N|M)$. Αυτό ορίζεται ως: $(N|M) = \{f(N)\}$, όπου f εκφράζει τις διαφορετικές καλύψεις του N από το M , δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων των στοιχείων n του N με εικόνες στοιχεία m του συνόλου M . Το $(N|M)$ λέγεται σύνολο κάλυψης (covering aggregate / Belengungsmerge).

Μάλιστα αν $M \sim M'$ και $N \sim N'$ τότε

$$(N|M) \sim (N'|M') \quad (15).$$

Αν $\bar{M} = \alpha$ και $\bar{N} = \beta$ τότε

$$\alpha^\beta = \overline{(N|M)} \quad (16).$$

Ο ορισμός της δύναμης α^β που αναφέρεται σε πληθικούς αριθμούς συνόλων έχει έντονες, λόγω του ορισμού του Cantor, τοπολογικές καταβολές. Η κάλυψη με ανοικτές σφαίρες ή ανοικτά σύνολα και οι πεπερασμένες υποκαλύψεις αποτελούν τη βάση της τοπολογίας που είναι σήμερα γνωστή. Δύο παρατηρήσεις στον τύπο (16) μπορούν να τεθούν εδώ:

(α) Η τοπολογική εξήγηση της δομής της εκθετικής μορφής α^β που επιχειρεί ο Cantor και
 (β) Ο έντονος προβληματισμός των μαθηματικών της εποχής αυτής (περίπου 1895) για την αποδοχή ή όχι των θέσεων του Cantor για τη θεμελίωση της νέας θεωρίας. Όπως ο A. Boucher σε ένα άρθρο του που αμφισβητεί την καντοριανή λογική: «Ο Cantor και οι σύγχρονοι λογικιστές θα έπρεπε να μας έκαναν να σκεφτούμε ότι οι θεωρίες τους μιλάνε για άπειρους αριθμούς και ότι ο αριθμός των πραγματικών είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των φυσικών. Αλλά η αιτιολόγησή τους είναι μια πλάνη» (A. Boucher, sci.math) [43]. Η ελκυστικότητα των τύπων αντισταθμίζεται από τη δυσκολία των αποδείξεων όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Αν τώρα $\bar{M} = \alpha$, $\bar{N} = \beta$ και $\bar{P} = \gamma$ ισχύουν:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma} \quad (17)$$

$$\alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma = (\alpha \cdot \beta)^\gamma \quad (18)$$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma} \quad (19)$$

διότι

$$((N|M) \cdot (P|M)) \sim ((N, P)|M) \quad (17')$$

$$((P|M) \cdot (P|N)) \sim (P|(M \cdot N)) \quad (18')$$

$$(P|(N|M)) \sim ((P \cdot N)|M) \quad (19')$$

3.6. Οι πεπερασμένοι πληθικοί αριθμοί

Για την κατανόηση αργότερα του πραγματικού άπειρου και των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών ο Cantor προχωράει στην αυστηρή θεμελίωση των πληθικών αριθμών συνόλων πεπερασμένου πλήθους στοιχείων.

$$\text{Αν } E_0 = (e_0) \text{ τότε } \bar{\bar{E}}_0 = 1 \quad (20)$$

$$\text{Αν } E_1 = \{e_0, e_1\} \text{ τότε } \bar{\bar{E}}_1 = 2 \quad (21)$$

$$\text{και γενικά } \bar{\bar{E}}_{v-1} = v \quad (22)$$

$$\text{Αν } E_v = (E_{v-1}, e_v) = (e_1, e_2, \dots, e_v) \text{ ισχύει}$$

$$\bar{\bar{E}}_v = \bar{\bar{E}}_{v-1} + 1 \quad (23)$$

$$\text{αφού } \bar{\bar{E}}_v = v + 1 \text{ και } \bar{\bar{E}}_{v-1} = v \text{ από την (22).}$$

Ακολουθούν τα εξής βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα 7: Οι πληθικοί αριθμοί των πεπερασμένων αριθμών $1, 2, \dots, n$ είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή δεν υπάρχουν ισοδύναμα σύνολα με αντίστοιχους δύο άνισους τέτοιους πληθικούς αριθμούς.

Θεώρημα 8: Κάθε τέτοιος αριθμός n είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο και μικρότερος από τον επόμενο του.

Θεώρημα 9: Δεν υπάρχουν πληθικοί αριθμοί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς αριθμούς n και $n + 1$.

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων 7, 8, 9 είναι απλές εφαρμογές των θεωρημάτων 10 και 11 που ακολουθούν (G. Cantor, σελίδα 99) [40].

Θεώρημα 10: Αν M είναι ένα σύνολο που δεν έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με κανένα μέρος του, τότε το σύνολο (M, e) που προκύπτει με προσθήκη στο M ενός νέου στοιχείου e , δεν έχει ούτε αυτό τον ίδιο πληθικό αριθμό με κανένα μέρος του.

Απόδειξη: Έστω το σύνολο (M, e) να είναι ισοδύναμο με ένα μέρος του, έστω N . Τότε δύο περιπτώσεις υπάρχουν (που θα οδηγήσουν και οι δύο σε άτοπο). α' περίπτωση: Το σύνολο N περιέχει το στοιχείο e , δηλαδή $N = (M_1, e)$ και άρα M_1 μέρος του M επειδή N μέρος του (M, e) . Αφού τώρα $(M_1, e) \sim (M, e)$ ας θεωρήσουμε σύμφωνα με το νόμο της τροποποίησης (modified law) ότι στο e του συνόλου (M_1, e) αντιστοιχίζεται το e του συνόλου (M, e) και άρα απομένει το σύνολο M_1 να αντιστοιχίζεται κατά αμοιβαία μοναδικό τρόπο με το M , δηλαδή $M_1 \sim M$ άρα $\overline{M_1} = \overline{M}$. Άτοπο. β' περίπτωση: Το μέρος N του (M, e) να μην περιέχει το στοιχείο e . Τότε το N είναι είτε το M είτε ένα μέρος του M . Έστω f το στοιχείο του N που αντιστοιχεί στο e και άρα $N = (M_1, f)$. Τότε το σύνολο M είναι ισοδύναμο με το M_1 . Αλλά το M_1 είναι μέρος του N , άρα και το M , δηλαδή $M_1 \sim M$, άρα $\overline{M} = \overline{M_1}$. Άτοπο. ■

Θεώρημα 11: Αν N ένα σύνολο με πεπερασμένο πληθικό αριθμό n , και N_1 κάποιο μέρος του N , τότε ο πληθικός αριθμός του N_1 ισούται με έναν από τους προηγούμενους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Απόδειξη: Άμεσα με μαθηματική επαγωγή. ■

Θεώρημα 12: Αν K είναι ένα σύνολο διαφορετικών πληθικών αριθμών, υπάρχει ένας κ_1 μεταξύ τους που είναι ο μικρότερος όλων των άλλων.

Απόδειξη: Αν το σύνολο K περιλαμβάνει το 1, τότε $\kappa_1 = 1$. Αν όχι, τότε J ας είναι το σύνολο όλων εκείνων των πληθικών αριθμών 1,2,3, ... που είναι μικρότεροι από αυτούς που βρίσκονται στο K . Τότε το J έχει έναν αριθμό ν_1 με $\nu_1 + 1$ να βρίσκεται στο K και αναγκαστικά $\nu_1 + 1$ το ελάχιστο στοιχείο του K . ■

Πόρισμα 13: Κάθε σύνολο $K = \{\kappa\}$ με διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς μπορεί να τεθεί στη μορφή $K = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots)$ με $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \dots$.

Οι ενστάσεις πολλές, πολύπλευρες και από κάθε χρονική εποχή εκφρασμένες! Ο Α. S. Banyal αναρτά: «Το απεριόριστο οποιουδήποτε συνόλου, χώρου ή αντικειμένου ονομάζεται άπειρο. Αν κάποιος καταφέρει να βρει τα άκρα του, τότε δεν είναι άπειρο αλλά πεπερασμένο. Έτσι το άπειρο σημαίνει πέρα από αυτό που φθάνουμε υποθετικά, το οποίο θα μπορούσε να επιχειρηθεί να επιτευχθεί, χωρίς επιτυχία και σίγουρα είναι μια ατελείωτη διαδικασία» (Α. S. Banyal, Research Gate) [44]. Ενώ ο J. Peregrin συμπληρώνει την αντίθεσή του στο πραγματικό άπειρο: «Η άποψή μας για τον κόσμο έχει φιλτραριστεί από τη θεωρία συνόλων του Cantor να μετράμε τα άπειρα σύνολα ... μέσα στον πραγματικό κόσμο. Η μόνη πτυχή της πραγματικότητας που μπορεί να γίνει αισθητή ως μετρήσιμη στο άπειρο είναι το ατελείωτο, η πιθανότητα να συνεχίσουμε τις διάφορες διαδικασίες ξανά και ξανά χωρίς όριο. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει πραγματικό άπειρο, μόνο το δυνητικό άπειρο» (J. Peregrin, σελ. 83) [45].

3.7. Ο μικρότερος υπερπεπερασμένος πληθικός αριθμός άλεφ-μηδέν.

Ο Cantor ονομάζει τα μη πεπερασμένα σύνολα, **υπερπεπερασμένα (transfinite)** και ομοίως τους αντίστοιχους πληθικούς αριθμούς. Ο πρώτος τέτοιος αριθμός είναι ο άλεφ-μηδέν και δίνεται από τη σχέση:

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{v\}}} \quad (24)$$

Το επόμενο επιχείρημα είναι θεμελιώδες στη θεωρία του Cantor: Αν στο σύνολο $\{n\}$ προσθέσουμε ένα νέο στοιχείο e_0 και πάρουμε το σύνολο $(\{n\}, e_0)$, τότε $(\{n\}, e_0) \sim \{n\}$ λόγω της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας ότι στο στοιχείο e_0 του πρώτου συνόλου αντιστοιχίζεται το στοιχείο 1 του δεύτερου και στο στοιχείο n του πρώτου αντιστοιχίζεται το στοιχείο $n + 1$ του δεύτερου. Έτσι τα ισοδύναμα αυτά σύνολα θα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, που όμως για το σύνολο $\{n\}$ έχει ορισθεί ως $\aleph_0$. Οπότε έχουμε

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (25)$$

Η αντίδραση εδώ άμεση από κάθε καλόβουλο ή όχι μαθηματικό. Πώς η λογική των ισοδυνάμων συνόλων που ισχύει για τα πεπερασμένα σύνολα επεκτείνεται και για τα απειροσύνολα. Είναι ακριβώς το σημείο που εγέρθηκαν οι περισσότερες αντιρρήσεις σχετικά με τη θεωρία του Cantor. Ο Émile Borel, Γάλλος μαθηματικός, μεγάλος πολέμιος της καντοριανής θεωρίας και μετέπειτα βασικός αντίπαλος του E. Zermelo (ίσως του μεγαλύτερου μαθηματικού υποστηρικτή του G. Cantor) γράφει: «*Προτιμώ να μη γράψω άλεφ [...]. Αναρωτιέται κανείς ποια είναι η αξία αυτών των επιχειρημάτων που εγώ δεν θεωρώ έγκυρα αλλά οδηγούν σε κάποια αποτελέσματα. Βέβαια αν δεν είχαν αξία, θα ήταν χωρίς νόημα συλλογές λέξεων. Αυτό θα ήταν πολύ σκληρό. [...] Θα απαιτούσε σημαντική έρευνα για να μάθει κανείς την ακριβή έννοια της θεωρίας αυτής. Μια τέτοια έρευνα θα ήταν άχρηστη ή θα απαιτούσε περισσότερη προσπάθεια από ότι αξίζει*» (E. Borel, γράμμα) [46]. Ο R. Easterly το 2006 δημοσιεύει ένα εκπληκτικό επιχείρημα: «*Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το άπειρο υπάρχει; Μπορώ να σκεφτώ μερικούς συμπαθητικούς παράλογους πεπερασμένους αριθμούς. Υπολόγισα κάποτε πως ένας υπολογιστής με ταχύτητα 10^{44} πράξεων το δευτερόλεπτο, σε 13 δισεκατομμύρια χρόνια (δηλαδή περίπου την ηλικία του σύμπαντος) θα έχει εκτελέσει 10^{60} πράξεις. Γιατί να μην υπάρχουν κάποιοι απίστευτα τεράστιοι φυσικοί αριθμοί τόσο μεγάλοι που να χωράνε όλα όσα μπορούμε να ξέρουμε για το σύμπαν;* » (R. Easterly, sci.math) [47].

Ο Cantor συνεχίζει να χρησιμοποιεί πεπερασμένη λογική: για κάθε πεπερασμένο πληθικό αριθμό μ , ο $\mu + 1$ είναι διαφορετικός από τον μ . Άρα τώρα που έδειξε ότι $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, ο $\aleph_0$ δεν είναι πεπερασμένος και ως εκ τούτου $\aleph_0 > \mu$ (26).

Μάλιστα $\aleph_0 < n$, για κάθε n υπερπεπερασμένο πληθικό αριθμό (27).

Ακολουθούν τα θεωρήματα:

Θεώρημα 14: Κάθε υπερπεπερασμένο σύνολο T έχει μέρη με πληθικό αριθμό $\aleph_0$.

Απόδειξη: Κάθε φορά που παίρνουμε ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ πάντα υπάρχει η πιθανότητα να πάρουμε ακόμη ένα παραπάνω στοιχείο t_n . Το σύνολο $\{t_n\}$ έχει πληθικό αριθμό $\aleph_0$, αφού $\{t_n\} \sim \{n\}$!. ■

Θεώρημα 15: Αν S είναι υπερπεπερασμένο σύνολο με πληθικό αριθμό $\aleph_0$, και S_1 υπερπεπερασμένο μέρος του S , τότε $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Απόδειξη: Άμεση, υποθέτοντας πια ότι $S \sim \{n\}$. ■

Τώρα ακολουθεί πανδαισία τύπων πάνω στο $\aleph_0$:

Από τη σχέση (25), $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ προσθέτοντας 1 και στα δύο μέρη έχουμε:

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (28)$$

και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 \quad (29)$$

Επίσης:

Θεώρημα 16: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (30).

Απόδειξη: Από τον τύπο $(\{\overline{\alpha_n}, \{\overline{\beta_n}\}\}) = \{\overline{\alpha_n}\} + \{\overline{\beta_n}\}$ για $\{\overline{\alpha_n}\} = \{\overline{\beta_n}\} = \aleph_0$ παίρνουμε $(\{\overline{\alpha_n}, \{\overline{\beta_n}\}\}) = \aleph_0 + \aleph_0$. Θα δείξουμε ότι $(\{\overline{\alpha_n}, \{\overline{\beta_n}\}\}) = \aleph_0$ οπότε θα έχουμε δείξει την (30). Είναι $\{n\} = (\{2n-1\}, \{2n\}) \sim (\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$ από την ιδιότητα των άρτιων και περιττών φυσικών άρα $(\{\overline{\alpha_n}, \{\overline{\beta_n}\}\}) = \overline{\{n\}} = \aleph_0$. ■

Ο τύπος (30) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ γράφεται και $\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$ (31) και προσθέτοντας $\aleph_0$ και στα δύο μέρη:

$$\aleph_0 \cdot 3 = \aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0 \quad (32)$$

και γενικότερα επαναλαμβάνοντας το ίδιο

$$\aleph_0 \cdot n = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad (33).$$

Με λεπτούς χειρισμούς ο Cantor (σελ. 107) [40] αποδεικνύει ότι

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad (34)$$

ή

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \quad (35).$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\aleph_0$ και τα δύο μέλη παίρνουμε

$$\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0 \quad (36).$$

ενώ επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία ο τύπος γενικεύεται

$$\aleph_0^\gamma = \aleph_0 \quad (37).$$

Τώρα, τα θεωρήματα των πεπερασμένων συνόλων της προηγούμενης παραγράφου καταλήγουν στο εξής:

Θεώρημα 17: Κάθε πεπερασμένο σύνολο E δεν είναι ισοδύναμο με κανένα από τα μέρη του.

Σε αντίθεση με το:

Θεώρημα 18: Κάθε υπερπεπερασμένο σύνολο T έχει μέρη T_1 που είναι ισοδύναμα με αυτό.

Απόδειξη: Από προηγούμενο θεώρημα της παραγράφου αυτής υπάρχει μέρος $S = \{t_\nu\}$ του T με πληθικό αριθμό $\aleph_0$. Έστω $T = (S, U)$ με U να αποτελείται από τα στοιχεία του T που είναι διαφορετικά από t_ν , δηλαδή U το συμπλήρωμα του S . Αν θέσουμε $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$ και $T_1 = (S_1, U)$ τότε T_1 μέρος του T και μάλιστα είναι το ίδιο με το T αν αφήσουμε έξω το στοιχείο t_1 . Αφού $S \sim S_1$ και $U \sim U$ τότε $T \sim T_1$. ■

Τα παραπάνω θεωρήματα δημοσιεύτηκαν το 1877 στο μαθηματικό περιοδικό του Crelle, ένα από τα καλύτερα μαθηματικά περιοδικά της εποχής, και ήταν από εκείνο το σημείο που ξεκίνησαν οι έριδες μεταξύ υποστηρικτών και αντιπάλων προς τη θεωρία του Cantor. Σήμερα οι αντίπαλοι του Cantor θα του έλεγαν: «Οι αριθμοί δεν είναι «εκεί έξω» περιμένοντας να μετρηθούν· δημιουργούνται από το μέτρημα. Σε αυτήν την περίπτωση το άπειρο είναι μόνο δυνητικό» (B. Vallicella, δημοσίευση) [48]. Σε ένα άλλο link βρίσκουμε: «Πόσο μεγάλο είναι ένα άπειρο σύνολο; Το μέγεθος ενός τέτοιου συνόλου είναι άπειρο, αλλά το άπειρο είναι μια έννοια που σημαίνει «συνεχίζει να πηγαίνει». Η έννοια ενός μεγαλύτερου αριθμού είναι χωρίς σημασία και το ίδιο είναι και η έννοια του μεγέθους ενός άπειρου συνόλου» (J. N. Sharon, link expired) [49].

3.8. Οι τακτικοί τύποι (τακτικοί αριθμοί) ενός απλά διατεταγμένου συνόλου

Ο Cantor ορίζει ως «**απλή διάταξη**» μια «τάξη εμφάνισης» (order of precedence/Rangordnung) των στοιχείων m ενός συνόλου M , τέτοια που για δύο διαφορετικά στοιχεία m_1 και m_2 του M να ισχύει πάντα $m_1 < m_2$ ή $m_1 > m_2$. Το πρώτο παράδειγμα που δίνει ο Cantor είναι για την τάξη των ρητών αριθμών $\frac{p}{q}$ με p, q μεταξύ τους πρώτοι ακέραιοι. Το διατεταγμένο σύνολο των ρητών που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 0 και 1 το συμβολίζει με R_0 και για δύο ρητούς $\frac{p_1}{q_1}$ και $\frac{p_2}{q_2}$ ανάμεσα στο 0 και 1 η τάξη της διάταξης έχει ως εξής:

- Αν $p_1 + q_1 \neq p_2 + q_2$ τότε ο αριθμός με το μικρότερο άθροισμα έχει την μικρότερη τάξη στο R_0 .
- Αν $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ τότε ο μικρότερος ρητός έχει και τη μικρότερη τάξη.

Έτσι

$$R_0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, \dots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \dots \right)$$

$$\text{με } r_n < r_{n+1}.$$

Κάθε διατεταγμένο σύνολο M έχει έναν «**τακτικό τύπο**» που συμβολίζεται με $\bar{M}$. Αυτό συμβολίζει τα στοιχεία του M αφηρημένα από τη φύση τους και το μόνο που ενδιαφέρει είναι η σειρά ή τάξη της διατεταγμένης εμφάνισής τους στο M . Μια πρώτη βασική παρατήρηση εδώ είναι η μεγάλη εξοικείωση του Cantor με την έννοια του ρητού αριθμού ως πηλίκο πρώτων μεταξύ τους ακεραίων. Παρατηρεί κανείς ότι η διάταξη στο R_0 είναι στην ουσία μια πρώτη ειδοποίηση προς το διαγώνιο επιχείρημα του μεγάλου μαθηματικού. Όχι μόνο σκέφτεται τον πίνακα των ρητών αριθμών, όχι μόνο έχει βρει έναν «διαγώνιο» δρόμο που περνά από όλους, αλλά ορίζει και μια τάξη μεγέθους, μια διατακτική αρχή, έναν κανόνα τακτικότητας μεταξύ των στοιχείων των ρητών. Αυτή η άνεση που έχει με τους ρητούς πιθανώς να τον ώθησε να σκεφτεί πως αυτή η διατακτική αρχή διαπερνά όλα τα σύνολα.

Δύο διατεταγμένα σύνολα M και N θα λέγονται **όμοια** (**similar/ähnlich**) αν μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τρόπο ώστε, αν m_1 και m_2 είναι στοιχεία του M και n_1 και n_2 είναι τα αντίστοιχα στοιχεία του N , τότε η σχέση της διάταξης των m_1 και m_2 στο M είναι ίδια με αυτή των n_1 και n_2 στο N . Η αντιστοιχία αυτή των όμοιων συνόλων θα λέγεται εικόνα (imaging/Abbildung) αυτών των συνόλων του ενός πάνω στο άλλο. Η ομοιότητα συμβολίζεται από τον Cantor: $M \simeq N$.

Τώρα:

$$\bullet \text{ αν } M \simeq N \text{ και } M_1 \text{ μέρος του } N \text{ τότε } M_1 \simeq N_1 \text{ για κάποιο } N_1 \text{ μέρος του } N \quad (38)$$

$$\bullet M \simeq M \quad (39)$$

$$\bullet \text{ αν } M \simeq N \text{ και } N \simeq P \text{ τότε } M \simeq P \quad (40)$$

Με απλή λογική (G. Cantor, σελ. 112) [40] συνάγεται ότι δύο διατεταγμένα σύνολα έχουν τον ίδιο τακτικό τύπο αν είναι όμοια, δηλαδή

$$\bar{M} = \bar{N} \Rightarrow \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}} \quad (41)$$

αλλά δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο:

$$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}} \not\Rightarrow \bar{M} = \bar{N} \quad (42).$$

Τώρα αν α είναι ο τακτικός τύπος ενός συνόλου, τότε $\bar{\alpha}$ θα συμβολίζεται ο αντίστοιχος πληθικός αριθμός του.

Ο Cantor προχωράει σε αυτό το στάδιο στη διάκριση τακτικών (ordinal) και πληθικών (cardinal) αριθμών συνόλων και διακρίνει τις περιπτώσεις πεπερασμένων και υπερπεπερασμένων συνόλων. Στα πεπερασμένα σύνολα οι τακτικοί και οι πληθικοί αριθμοί κάθε συνόλου συμπίπτουν, γι' αυτό και θα χρησιμοποιεί τα ίδια σύμβολα $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ και για τις δύο περιπτώσεις. Στα υπερπεπερασμένα (transfinite) σύνολα τα πράγματα είναι διαφορετικά: σε κάθε έναν πληθικό αριθμό ανήκουν αμέτρητα πολλοί διαφορετικοί τύποι διατεταγμένων συνόλων που απαρτίζουν μια «**κλάση τύπων**» (**class of types/Typenklasse**). Κάθε μία από αυτές τις κλάσεις προσδιορίζεται με τον υπερπεπερασμένο πληθικό αριθμό α , που είναι κοινός σε όλους τους τύπους που ανήκουν στην κλάση. Ο Cantor ονομάζει την κλάση αυτή $[\alpha]$. Η πρώτη κλάση που λογικά πρέπει

να απασχολήσει την ανθρώπινη λογική, υποστηρίζει ο μεγάλος μαθηματικός, είναι η κλάση των τύπων $[X_0]$ που περικλείει όλους τους τύπους με τον ελάχιστο πληθικό αριθμό ενός άπειρου συνόλου, τον X_0 .

Η εισαγωγή των τακτικών αριθμών των διατεταγμένων συνόλων έφερε νέες αντιδράσεις στο μαθηματικό κόσμο. Η θέση του Cantor φαίνεται ελκυστική για την εποχή της, νομίζουμε όμως ότι στο πέρασμα του χρόνου ελέγχεται ως ασταθής. Έτσι ο T. Forster τονίζει: «Η εξήγηση για τους ανθρώπους που θέλουν να σκέφτονται θεμελιώδη ζητήματα είναι ότι η θεωρία συνόλων παρέχει σε αυτούς μια δικαιολογία να μην σκέφτονται για θεμελιώδη ζητήματα πια. Είναι όπως ο ρόλος της Εκκλησίας στη Μεσαιωνική Ευρώπη: κρατάει ένα σκέπασμα εκεί που χρειάζονταν να σκεπάσουν κάτι [...]. Τα μαθηματικά δεν χρειάζονται τα θεμέλια που η θεωρία συνόλων τους παρείχε και η συγκεκριμένη θεωρία ενόχλησε πολύ» (T. Forster, από ανάρτηση στο διαδίκτυο) [50]. Επίσης παραθέτουμε και το εξής επιχείρημα: «Η βασική ερώτηση είναι: εάν υπάρχει ένας καθορισμένος αριθμός φυσικών αριθμών, τότε με ποια διαδικασία καθορίζεται; Αντικατάσταση του «αριθμού φυσικών αριθμών» με «Aleph zero = X_0 » δεν καθιστά την αναφορά καθορισμένη. Οι φυσικοί μπορούν να τεθούν σε 1 – 1 αντιστοιχία με τους άρτιους αριθμούς, αυτό είναι γνωστό, αλλά αυτό καθιστά ότι έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων; Για τον ίδιο λόγο μπορούμε να πούμε ότι έχουν διαφορετικό αριθμό, αφού οι φυσικοί είναι περισσότεροι των άρτιων.» (H. Slater, από άλλη ανάρτηση στο διαδίκτυο) [51].

3.9. Πράξεις με τακτικούς τύπους (τακτικούς αριθμούς)

Για το άθροισμα των τακτικών τύπων χρειάζεται πρώτα να οριστεί η ένωση (M, N) δύο συνόλων M και N ως εξής: οι διατάξεις στα M και N διατηρούνται όπως έχουν και επιπλέον όλα τα στοιχεία του M έχουν χαμηλότερη τάξη από όλα τα στοιχεία του N .

Έτσι αν $\bar{M} = \alpha$ και $\bar{N} = \beta$ ισχύουν:

$$\alpha + \beta = (\bar{M}, \bar{N}) \quad (43)$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \quad (39) \text{ (εδώ έστω } \gamma = \bar{P})$$

Αν τώρα $M \simeq M'$ και $N \simeq N'$ τότε

$$(M, N) \simeq (M', N') \quad (44).$$

Όμως το πρόβλημα με τους τακτικούς αριθμούς βρίσκεται στην αντιμεταθετική ιδιότητα που δεν ισχύει γενικά. Ο Cantor ορίζει ω τον τακτικό τύπο του **καλά διατεταγμένου**

σύνολο $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ με $e_n < e_{n+1}$, όπου n αντιπροσωπεύει όλους τους πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς στη σειρά.

Θεώρημα 19: $1 + \omega \neq \omega + 1$

Απόδειξη: Έστω $E = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ με $e_n < e_{n+1}$. Ισχύει $\bar{E} = \omega$ και έστω f ένα νέο στοιχείο με $f \neq e_n$. Είναι $(f, E) = (f, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ και επειδή $(f, E) \simeq E$ θα έχουν $(\bar{f}, \bar{E}) = \bar{E} \Rightarrow 1 + \omega = \omega$. Όμως $(E, f) = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots, f)$, αλλά (E, f) δεν είναι όμοιο με το E , αφού το σύνολο (E, f) έχει μέγιστο στοιχείο, ενώ το E δεν έχει, άρα $(\overline{E, f}) \neq \bar{E} \Rightarrow \omega + 1 \neq \omega$. ■

Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό τακτικών αριθμών ο Cantor ανεβάζει τον βαθμό δυσκολίας θέτοντας για κάθε στοιχείο n ενός συνόλου N ένα διατεταγμένο σύνολο M_n με τον ίδιο τακτικό αριθμό α ενός άλλου συνόλου M . Η μελέτη του πολλαπλασιασμού καταλήγει στους τύπους:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad (45)$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad (46)$$

Όμως ούτε στον πολλαπλασιασμό τακτικών αριθμών δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα (G. Cantor, σελ. 122) [40]: Αν ω είναι ο γνωστός τακτικός τύπος του συνόλου $E = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$, τότε

$$2 \cdot \omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \dots; e_n, f_n; \dots)} = \omega$$

ενώ

$$\omega \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots; f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)} \neq \omega$$

προφανώς.

Η κριτική που ασκήθηκε στον Cantor ήταν ενθουσιώδης από τους υποστηρικτές της νέας θεωρίας, απορριπτική για τους αντίθετους προς αυτή. Ο R. Arthur διαφωνεί για τη χρήση που επιλέγει ο Cantor για τους τακτικούς αριθμούς ω : «Σε κάθε περίπτωση που υπάρχει η απαίτηση μιας αναδρομικής σύνδεσης ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι που έχει αρίθμηση, η καντοριανή αντίληψη του απείρου δεν είναι έγκυρη. Κι αυτό γιατί το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών εφοδιασμένο με τη σχέση $>$ (μεγαλύτερο από) είναι αναδρομικά συνδεδεμένο αν και μόνο αν κάθε αριθμός είναι πεπερασμένος. Αν περιλαμβάνονται οριακοί τακτικοί αριθμοί του Cantor όπως ω , ω^2 , ... η αναδρομική σύνδεση αποτυγχάνει.» (R. Arthur, σελ. 4) [52].

Στα επόμενα σημεία η αντιπαράθεση θα κορυφωθεί αφού ο Cantor κάνει άλλο ένα βήμα προς το πραγματικό άπειρο.

3.10. Το διάστημα $(0, 1)$ από τη σκοπιά των ρητών και από τη σκοπιά των πραγματικών

Στο διάστημα $(0, 1)$ μέχρι στιγμής έχει οριστεί το διατεταγμένο σύνολο R_0 με ρητούς στο διάστημα $(0, 1)$ της παραγράφου 3.8. Ταυτόχρονα με R ο Cantor θεωρεί όλους τους ρητούς αριθμούς $\frac{p}{q}$, με p και q πρώτους μεταξύ τους ακεραίους στο διάστημα $(0, 1)$, που έχουν τη φυσική διάταξη που γνωρίζει κανείς στο δημοτικό. Έστω η ο τακτικός αριθμός του R , δηλαδή έστω $\bar{R} = \eta$ (47).

Όμως για το καλά διατεταγμένο σύνολο R_0 με R_0 ως γνωστόν

$R_0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ με $r_n < r_{n+1}$ έχουμε:

$$\overline{R_0} = \omega \quad (48)$$

και

$$\overline{\overline{R_0}} = \aleph_0 \quad (49).$$

Προφανώς και R, R_0 έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, αφού το μόνο που αλλάζει είναι η διάταξη των στοιχείων τους, έτσι:

$$\bar{R} = \overline{\overline{R_0}} \Rightarrow \bar{R} = \bar{\eta} = \aleph_0 \quad (50)$$

Ο τύπος (50) δηλώνει ότι η ανήκει στην κλάση των τύπων $[\aleph_0]$. Δεύτερη παρατήρηση είναι ότι το R δεν έχει ελάχιστο ή μέγιστο στοιχείο. Τρίτον, το R έχει την ιδιότητα ότι ανάμεσα σε δύο στοιχεία του υπάρχουν άλλα, δηλαδή **το R είναι πυκνό παντού** (everywhere dense/überalldicht). Αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν τον Cantor στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 20: Για ένα διατεταγμένο σύνολο M τέτοιο ώστε:

(α) $\bar{\bar{M}} = \aleph_0$

(β) M να μην έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο και

(γ) M είναι παντού πυκνό

Τότε $\bar{M} = \eta$.

Η απόδειξη ξεφεύγει από τους σκοπούς του συγγράμματος αυτού. Το συμπέρασμα όμως του θεωρήματος 20 είναι ότι τελικά M είναι όμοιο σύνολο προς το R , γι' αυτό έχουν τον ίδιο τακτικό αριθμό η . Συνάγονται τα εξής πορίσματα, δεδομένου ότι $\bar{R} = \eta$ και $\bar{\eta} = \aleph_0$:

Πόρισμα 21: Ο τακτικός τύπος του συνόλου όλων των αρνητικών και θετικών ρητών αριθμών, περιλαμβάνοντας και το 0 με τη φυσική τους διάταξη, είναι η .

Πόρισμα 22: Ο τακτικός τύπος των συνόλων όλων των ρητών αριθμών ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς α και β με τη φυσική τους διάταξη με $\alpha < \beta$, είναι η .

Πόρισμα 23: Ο τακτικός τύπος του συνόλου όλων των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς α και β με τη φυσική τους διάταξη με $\alpha < \beta$, είναι η .

Στη γλώσσα των τακτικών αριθμών με $\bar{R} = \eta$ και $\bar{\eta} = \aleph_0$ ισχύουν:

$$\eta + \eta = \eta \quad (51)$$

$$\eta \cdot \eta = \eta \quad (52)$$

$$(1 + \eta) \cdot \eta = \eta \quad (53)$$

$$(\eta + 1) \cdot \eta = \eta \quad (54)$$

$$(1 + \eta + 1) \cdot \eta = \eta \quad (55)$$

Με επανάληψη ο τύπος (51) δίνει:

$$\eta \cdot \nu = \eta \quad (56).$$

Με επανάληψη ο τύπος (52) δίνει:

$$\eta^\nu = \eta \quad (57).$$

Από την άλλη μεριά για $\nu > 1$ οι τύποι $1 + \eta, \eta + 1, \nu \cdot \eta, 1 + \eta + 1$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και από η .

Ισχύει

$$\eta + 1 + \eta = \eta \quad (58)$$

αλλά

$$\eta + \nu + \eta \neq \eta$$

$$\text{για } \nu > 1 \quad (59).$$

3.11. Καλώς – διατεταγμένα σύνολα

Ο Cantor μεταξύ των συνόλων με απλή διάταξη ορίζει τα **καλώς – διατεταγμένα σύνολα** θεωρώντας τα, όπως ο ίδιος υποστηρίζει πως τους αξίζει μια περίοπτη θέση στη θεωρία του (G. Cantor, σελ. 137) [40]. Ένα απλά διατεταγμένο σύνολο F θα λέγεται «καλώς – διατεταγμένο» αν τα στοιχεία του f αυξάνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

- (α) Να υπάρχει στο F ελάχιστο στοιχείο f_1 και
- (β) Αν F' μέρος του F και αν F έχει ένα ή πολλά στοιχεία μεγαλύτερης τάξης από όλα τα στοιχεία του F' , τότε υπάρχει ένα στοιχείο f' του F που έπεται αμέσως μετά το F' , έτσι ώστε ανάμεσα στο F' και το f' να μην υπάρχει κανένα στοιχείο του F . Κατόπιν ο Cantor δημιουργεί μια καλά θεμελιωμένη θεωρία που στηρίζεται στον ορισμό των καλώς διατεταγμένων συνόλων. Χρησιμοποιεί ορολογία όπως μέρη για να εκφράσει υποσύνολα, τεμάχια (segment / Abschnitt) για να εκφράσει υποσύνολα που διακόπτονται από συγκεκριμένα σημεία και τα υπόλοιπά τους τα ονομάζει απλά υπόλοιπα! (remainder / Rest). Ορίζει ομοιότητα ανάμεσα στα καλώς διατεταγμένα σύνολα μέσω των απεικονίσεων μεταξύ τεμαχίων τους, διατυπώνοντας μια σειρά από θεωρήματα που συσχετίζουν τακτικούς αριθμούς καλώς διατεταγμένων συνόλων.

Το επόμενο βήμα είναι η θέσπιση τακτικών αριθμών κλάσεων δεύτερης τάξης. Αυτοί οι τακτικοί αριθμοί αναφέρονται σε καλώς διατεταγμένα σύνολα πληθικού αριθμού $\aleph_0$ και η δεύτερη αυτή κλάση συμβολίζεται με $Z(\aleph_0)$. Μετά από αρκετό κόπο και αποδεικτικές τεχνικές, ο μεγάλος μαθηματικός καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η δύναμη των κλάσεων δεύτερης τάξης ισούται με τον δεύτερο μεγαλύτερο υπερπεπερασμένο πληθικό αριθμό, που συμβολίζει με άλεφ-ένα $\aleph_1$. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων του βρίσκονται στο μέγιστο επίπεδο δυσκολίας και εδώ αποφεύγονται για τεχνικούς λόγους.

3.12. Το περίφημο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor του 1890.

Η απόδειξη του αποκαλούμενου **διαγώνιου επιχειρήματος** από τον ίδιο τον Cantor πρωτοδημοσιεύτηκε στην εφημερίδα της γερμανικής μαθηματικής ένωσης το 1890 [53], την οποία ίδρυσε ο Cantor το 1890 και διετέλεσε τον πρώτο της πρόεδρο. Υπέθεσε m και w δύο διαφορετικούς χαρακτήρες, ίσως από τα αρχικά των λέξεων man και woman (άντρας και γυναίκα), και θεώρησε το σύνολο M από στοιχεία $E = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ με

άπειρες συντεταγμένες $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ η καθεμία από τις οποίες είναι m ή w . Έστω M το σύνολο όλων των στοιχείων E . Για παράδειγμα στο M ανήκουν τα στοιχεία

$$E_\alpha = (m, m, m, \dots) \text{ με όλες τις θέσεις } m$$

$$E_\beta = (w, w, w, \dots) \text{ με όλες τις θέσεις } w$$

$$E_\gamma = (m, w, m, w, \dots) \text{ με εναλλάξ τις θέσεις από } m \text{ και } w.$$

Τότε ο Cantor υποστηρίζει ότι ένα τέτοιο μέγεθος (manifold / Mannigfaltigkeit) δεν έχει τον πληθικό αριθμό του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Κι αυτό διότι αν $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ μια απλή άπειρη σειρά στοιχείων του M , τότε υπάρχει πάντα ένα στοιχείο E_0 του M που δεν συμπίπτει με κανένα στοιχείο E_n . Προς απόδειξη του ισχυρισμού ας είναι:

$$E_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}, \dots)$$

$$E_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}, \dots)$$

$$E_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n}, \dots)$$

.....

.....

με τους χαρακτήρες α_{uv} να είναι όλοι m ή w . Τότε υπάρχει μία ακολουθία $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ ορισμένη ώστε κάθε β_n να είναι επίσης ίσο με m ή w αλλά πάντα διαφορετικό από το α_{nn} .

Δηλαδή αν $\alpha_{nn} = m$ τότε $\beta_n = w$

ενώ αν $\alpha_{nn} = w$ τότε $\beta_n = m$.

Αν θεωρήσει κανείς τώρα το στοιχείο $E_0 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$ του M , τότε βλέπει αμέσως ότι η ισότητα $E_0 = E_u$ δεν ικανοποιείται για κανέναν θετικό ακέραιο u , αφού στην αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε $\beta_n = \alpha_{un}$ που για $n = u$ θα έπρεπε $\beta_n = \alpha_{nn}$ που αντιτίθεται στον ορισμό του β_n . Από τα παραπάνω «προκύπτει αμέσως ότι η ολότητα των στοιχείων του M δεν μπορεί να τεθεί σε ακολουθία $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, αλλιώς θα είχαμε το παράδοξο, ότι ένα αντικείμενο (thing / Ding) E_0 θα ήταν ταυτόχρονα στοιχείο του M , και επίσης όχι στοιχείο του M » (G. Cantor, ακριβώς με αυτά τα λόγια κλείνει τη δημοσίευση το 1890).

Η γνώμη μας εδώ προσεγγίζει τη δημοσίευση του Curt Welch σε επιστημονικό περιοδικό: «Όταν πρωτοείδα την απόδειξη του διαγωνίου θεωρήματος του Cantor ότι ο αριθμός των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμος στο λύκειο, σκέφτηκα: τι φανταστική απόδειξη! Μου φάνηκε πολύ λογική και αμέσως τη θεώρησα γεγονός. Αργότερα ωστόσο, άρχισα να βλέπω τα πράγματα πολύ διαφορετικά. Τώρα πιστεύω ότι η απόδειξη είναι εντελώς ψεύτικη! Και το τεράστιο σώμα της δουλειάς που στηρίχτηκε πάνω της είναι κι αυτό εντελώς ψεύτικο!» (C. Welch, sci.math) [55]. Δύο ακόμα σχεδόν ίδιες αναρτήσεις, των Pietro Dell' Aqua [56] και B. S. Anand [57] υποστηρίζουν πως το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor όπως έμεινε να ονομάζεται δεν εξασφαλίζει την μη αριθμησιμότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ο Nico Benschop δίνει μια έξυπνη απάντηση στον Cantor: «Η διαγώνια διαδικασία του Cantor δεν μπορεί να ξεκινήσει με μια πλήρη λίστα, αφού η λέξη «διαγώνιος» εννοεί έναν τετραγωνικό πίνακα [...]. Από όσα ξέρουμε μέχρι εδώ, όποιον πίνακα και να πάρουμε για να εφαρμόσουμε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, αυτό δεν θα είναι πλήρες, αφού κάθε πεπερασμένος τετραγωνικός πίνακας κ – στοιχείων δυαδικών συμβολοσειρών έχει απαραίτητα κ αριθμούς: ούτε λιγότερους, ούτε περισσότερους· ενώ γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $2^\kappa > \kappa$ τέτοιοι αριθμοί για κάθε $\kappa > 0$.» (N. Benschop, sci.math) [58].

Η κυρίως αντίδραση εδώ των μαθηματικών είναι ο Cantor ισορροπεί πάνω στα όρια του πεπερασμένου και του απείρου και άρα ενστάσεις εγείρονται κατά πόσον κάτι τέτοιο είναι αποδεκτό ή όχι. Ο R. Osborn το θίγει εύστοχα: «Τα επιχειρήματα του Cantor αμφισβητούνται από πολλούς όταν δηλώνει ότι θα μπορούσε να κάνει έναν νέο αριθμό από μια συλλογή άγνωστων αριθμών· αυτό είναι γελοίο. Αυτό που λέω να μου δείξετε, πού τα μαθηματικά δείχνουν, πώς ένα άπειρο δεν μπορεί να συμπεριλάβει οποιονδήποτε αριθμό που δεν υπάρχει ήδη μέσα στο σύνολο. Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor ελέγχει μόνο τους αριθμούς σε ένα πεπερασμένο κι όχι σε ένα άπειρο σύνολο όπως νομίζει» (R. Osborn, δημοσίευση) [59]. Και ο D. Palmer υποστηρίζει κάτι εντελώς παρόμοιο: «Ο Cantor δεν αποδεικνύει ότι η διαγώνια κατασκευαστική διαδικασία καταλήγει σε έναν μοναδικό άπειρο δεκαδικό αριθμό. Το στοιχείο που λείπει από την απόδειξη είναι ότι υποθέτει το όριο της διαδικασίας ότι παράγει έναν μοναδικό δεκαδικό αριθμό. Δεν το αποδεικνύει, αλλά το δηλώνει» (D. G. Palmer, sci.math) [54].

3.13. Εκλαϊκευμένες αποδείξεις των βασικών προτάσεων της θεωρίας συνόλων του Cantor

Πολλές φορές ο ίδιος ο Cantor έχει ισχυριστεί ότι για τη θεωρία του δεν χρειάζεται να έχει κανείς βασικές μαθηματικές γνώσεις. Επανειλημμένα τόνιζε με κάθε ευκαιρία ότι: «Θα έπρεπε να έχεις χρόνο να διαβάσεις τα κείμενά μου, θα μπορούσες τότε να βρεις ότι η απαιτούμενη μαθηματική γνώση για την κατανόηση αυτών των κειμένων είναι ελάχιστη» (γράμμα προς τον C. F. Hermann) [60]. Ένα χρόνο μετά ξαναγράφει προς τον ίδιο: «Με σεβασμό στην ερώτηση για το πραγματικό άπειρο σου επαναλαμβάνω αυτό που σου έγραψα πριν ένα χρόνο: δεν χρειάζεται καμία σχολαστική προετοιμασία πάνω στα μαθηματικά για την κατανόηση των σχετικών με το άπειρο κειμένων μου...» [61]. Όμως η καινοτομία των ιδεών του Cantor ξάφνιασε τη μαθηματική κοινότητα και οι αντιδράσεις, θετικές και αρνητικές, εξακολουθούν να τη συνοδεύουν μέχρι σήμερα. Σημαντικοί μαθηματικοί, καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πανεπιστημιακοί, έχουν ασχοληθεί με το έργο του Cantor και έχουν προσπαθήσει να φέρουν πιο κοντά τις αποδείξεις του στον μέσο μαθηματικό. Μερικές από τις εκλαϊκευμένες προσπάθειες, που όμως έχουν κι αυτές εξαιρετικό ενδιαφέρον παρατίθενται στην παράγραφο αυτή.

Ο Solomon Feferman αναφέρει :

Ορισμός: Ένας πραγματικός αριθμός καλείται **αλγεβρικός**, αν αποτελεί λύση x μιας μη-τετριμμένης πολωνυμικής εξίσωσης $p(x) = 0$, με ακέραιους συντελεστές. ($p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, με $a_i \in \mathbb{Z}$) Συνήθως χρησιμοποιείται το $\mathbb{A}$ για να δηλώσει το σύνολο όλων των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών. Ως εκ τούτου προκύπτει ότι $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ και $\mathbb{A}$ περιέχει όλους τους άρρητους αριθμούς που αναφέρθηκαν παραπάνω, εκτός ίσως του π , με π το γνωστό 3,14 Είναι εύλογο κανείς να σκεφτεί ότι $\pi \notin \mathbb{A}$, αφού δεν υπάρχει γνωστή πολωνυμική εξίσωση με λύση το π . Τον παραπάνω ισχυρισμό υπέθεσε ο Adrien-Marie Legendre, αλλά η απόδειξη ήρθε έναν αιώνα αργότερα. (S. Feferman, σελ.31) [62].

Ορισμός: Ένας αριθμός καλείται **υπερβατικός**, αν ανήκει στο σύνολο $T = \mathbb{R} - \mathbb{A}$, όπου $\mathbb{R}$ οι πραγματικοί και $\mathbb{A}$ οι αλγεβρικοί αριθμοί. Άλλος ένας ακόμα αριθμός που υποτέθηκε να είναι υπερβατικός, εκτός του π , είναι η βάση $e (= 2,718 \dots)$ των

φυσικών λογαρίθμων. Η πρώτη απόδειξη ότι υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί, δηλαδή ότι $T \neq \emptyset$, δόθηκε από τον Joseph Liouville, το 1844. Δεν απαντήθηκε όμως από τον Liouville αν οι αριθμοί π και e είναι ή όχι υπερβατικοί, κάτι που έκαναν αργότερα μέσα στον αιώνα οι Charles Hermite το 1873 για το e και ο Ferdinand von Lindemann το 1882 για το π . Εκείνη την εποχή ο Cantor, το 1874, δημοσίευσε μια νέα, εκπληκτικά απλή εκδοχή για να αποδείξει την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών.

Ορισμός: Δύο σύνολα A και B είναι **ισοδύναμα (equinumerous)** αν τα στοιχεία τους μπορούν αν τεθούν σε ένα-προς-ένα αντιστοίχιση μεταξύ τους. Τότε συμβολικά $A \sim B$.

Πόρισμα 24: Ένα σύνολο S είναι πεπερασμένο, αν είναι ισοδύναμο με ένα αρχικό τμήμα του συνόλου των φυσικών $\mathbb{N}$, δηλαδή αν $S \sim \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, όπου $n \geq 0$. Καλύπτεται και η περίπτωση το S να είναι κενό.

Ορισμός (Cantor): Ένα σύνολο S καλείται **αριθμήσιμο (denumerable)**, αν το S είναι πεπερασμένο ή αν $S \sim \mathbb{N}$. Έτσι, κάθε αριθμήσιμο μη κενό σύνολο S μπορεί να γραφεί ως εξής: $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ και αντιστρόφως. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν σημαντικές προτάσεις.

Πρόταση 25: Η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμη.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα σύνολα $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$, καθένα από τα οποία είναι αριθμήσιμο και ας υποθέσουμε διάφορα του κενού συνόλου.

Έτσι

$$S_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$



$$S_1 = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\}$$



$$S_2 = \{c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

Τα βέλη έχουν τοποθετηθεί έτσι ώστε η ένωση S να αναγράφεται ακολουθώντας τη σειρά των βελών:

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \cup \dots = \{a_0, a_1, b_0, a_2, b_1, c_0, a_3, b_2, c_1, d_0, \dots\}.$$

Παρατηρούμε στο σύνολο S ότι ξεκινώντας από το στοιχείο a_0 , μετά ακολουθούν δύο στοιχεία a_1, b_0 , μετά τρία a_2, b_1, c_0 , μετά τέσσερα a_3, b_2, c_1, d_0 και συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το απειροσύνολο S είναι αριθμήσιμο. ■ (S. Feferman, σελ. 32) [62]

Πρόταση 26: Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Υποθέτουμε τα σύνολα S_n τέτοια ώστε

$$S_n = \left\{ \frac{m}{n} \text{ με } m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0 \right\}.$$

$$\text{Έχουμε } S_1 = \left\{ \frac{m}{1} \text{ με } m \in \mathbb{Z} \right\}, S_2 = \left\{ \frac{m}{2} \text{ με } m \in \mathbb{Z} \right\}, \dots, S_n, \dots$$

Αναλυτικότερα,

$$\begin{array}{c} S_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots \right\} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ S_2 = \left\{ \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots \right\} \\ \swarrow \quad \searrow \\ S_3 = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \dots \right\} \\ \swarrow \\ \dots \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{Q} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n \cup \dots$, δηλαδή το $\mathbb{Q}$ είναι η αριθμήσιμη ένωση των συνόλων S_n κι επειδή κάθε ένα από τα S_n είναι αριθμήσιμο, όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς από την αναγραφή τους, τότε $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο από την προηγούμενη πρόταση 24. ■ (S. Feferman, σελ. 33) [62]

Πρόταση 27: Το σύνολο $\mathbb{A}$ των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι αλγεβρικός αριθμός είναι κάθε λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ (60), με $\alpha_n \neq 0$

και $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ ακέραιοι συντελεστές. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το πλήθος των πολωνυμικών εξισώσεων (60) μπορούν να απαριθμηθούν, οπότε αποτελούν ένα αριθμήσιμο σύνολο. Ο τρόπος που αυτό γίνεται είναι θεωρώντας τις εξισώσεις (60) ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων που κάθε ένα από αυτά αντιστοιχούν και σε έναν συντελεστή α_i του πολωνύμου κρατώντας όλους τους άλλους σταθερούς. Έστω λοιπόν οι αριθμήσιμες εξισώσεις (60) και συμβολίζουμε $p_k(x) = 0$ την k σε θέση εξίσωση (60) αντίστοιχα. Δηλαδή $p_1(x) = 0$ η πρώτη, $p_2(x) = 0$ η δεύτερη, ..., $p_k(x) = 0$ η k – θέσης εξίσωση (60) κάθε φορά. Τέλος θέτουμε S_k το σύνολο των λύσεων της k – θέσης εξίσωσης (60). Ακόμη και η περίπτωση S_k να είναι κενό, τότε είναι σίγουρα αριθμήσιμο. Αν S_k πεπερασμένο, ομοίως αριθμήσιμο. Τότε προφανώς $A = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k \cup \dots$ δηλαδή το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι η αριθμήσιμη ένωση των (κενών ή πεπερασμένων) συνόλων S_k που είναι αριθμήσιμα, άρα A αριθμήσιμο. ■ (S. Feferman, σελ.33) [62].

Τώρα σε αντίθεση με τα προηγούμενα, ο Cantor έδειξε ότι:

Πρόταση 28: Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε δηλαδή ότι δεν μπορούμε να αναγράψουμε το $\mathbb{R}$ σε μια ακολουθία της μορφής $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Θα δείξουμε ότι οι αριθμοί από το 0 έως το 1 δεν μπορούν να ικανοποιήσουν μια τέτοια ιδιότητα καταμέτρησής τους, οπότε το ίδιο θα ισχύει και για όλο το $\mathbb{R}$. Για αυτά, αν δοθεί μια καταμέτρηση όλων των αριθμών από το 0 έως το 1 υπό μορφή ακολουθίας $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, θα κατασκευάσουμε έναν αριθμό x που δεν θα περιλαμβάνεται στην ακολουθία αυτή, άρα το διάστημα $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο. Ας γράψουμε τα στοιχεία $x_0, x_1, x_2, \dots$ της ακολουθίας ως εξής:

$$x_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

$$x_1 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

$$x_2 = 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots$$

Τώρα σχηματίζουμε τον αριθμό x ως εξής:

$x = 0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$ που δεν βρίσκεται στο σύνολο $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ επιλέγοντας $k_1 \neq a_1$, $k_2 \neq b_2$, $k_3 \neq c_3$ κλπ. Για παράδειγμα παίρνουμε $k_1 = 0$ αν $a_1 \neq 0$ και $k_1 = 1$ αν $a_1 = 0$. Ομοίως επιλέγουμε τους αριθμούς $k_2, k_3, \dots$. Προφανώς ο νεοσχηματιζόμενος αριθμός $x \notin \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το $(0,1)$, άρα και το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμα σύνολα. ■ (S. Feferman, σελ. 33) [62].

Πόρισμα 29: Το σύνολο T των υπερβατικών αριθμών, με $T = \mathbb{R} - \mathbb{A}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Η προηγούμενη πρόταση 28, δηλαδή ότι το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο και η πρόταση 3, δηλαδή το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών $\mathbb{A}$ είναι αριθμήσιμο, τότε αυτόματα αποδεικνύεται ότι το σύνολο των υπερβατικών αριθμών T δεν είναι κενό, αφού $T = \mathbb{R} - \mathbb{A}$. Τώρα αν T ήταν αριθμήσιμο σύνολο, από την πρόταση 25 θα έπρεπε και το $\mathbb{R}$ να ήταν αριθμήσιμο ως ένωση των αριθμήσιμων συνόλων T και $\mathbb{A}$, που είναι άτοπο. Άρα T όχι αριθμήσιμο. ■ (S. Feferman, σελ. 33) [62].

Υπάρχουν ξεκάθαρα δύο έννοιες για μέτρηση του μεγέθους ενός συνόλου που υπεισέρχονται εδώ. Το σύνολο Γ είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Δ με την έννοια ότι το Γ περιέχει λιγότερα στοιχεία από το Δ . Αλλά μπορεί το Γ να είναι γνήσιο υποσύνολο του Δ και να έχουμε $\Gamma \sim \Delta$, όπως για παράδειγμα μεταξύ των συνόλων $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ των φυσικών και $E = \{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ των άρτιων (even) αριθμών, με $\mathbb{N} \sim E$, παρότι E γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Άρα κάθε άπειρο σύνολο S έχει το ίδιο μέγεθος με κάποιο κατάλληλο γνήσιο υποσύνολό του, ενώ τα πεπερασμένα σύνολα είναι ακριβώς αυτά που δεν είναι ισοδύναμα με κανένα γνήσιο υποσύνολό τους.

Το επιχείρημα του Cantor είναι καινοτόμο όχι μόνο για τις έννοιες που χρησιμοποιεί όπως σύνολο, ισοδυναμία, αριθμησιμότητα ή για τις προτάσεις 25 έως 28, αλλά επίσης και για το βασικό στοιχείο της μεθοδολογίας του: ο Cantor βρίσκει μια ιδιότητα P για τα σύνολα και δείχνει ότι δύο σύνολα Γ, Δ διακρίνονται μεταξύ τους αν το ένα ικανοποιεί την ιδιότητα P ενώ το άλλο όχι. Η ύπαρξη στοιχείων ειδικού τύπου έπεται από τον λογικό ισχυρισμό ότι αν $\Gamma \subseteq \Delta$ και $P(\Gamma)$ ισχύει ενώ $P(\Delta)$ όχι, τότε Γ πρέπει να είναι γνήσιο υποσύνολο του Δ , δηλαδή αυτό σημαίνει ότι υπάρχει στοιχείο x του συνόλου $\Delta - \Gamma$.

Ο Cantor, όπως έχει ήδη αναφερθεί, χρησιμοποίησε το εβραϊκό γράμμα άλεφ ($\aleph$) με δείκτες, για να ονομάσει τους διάφορους πληθικούς αριθμούς που έδωσε στα διάφορα άπειρα σύνολα, ξεκινώντας με το $\aleph_0$ για το πλήθος των φυσικών $\mathbb{N}$, δηλαδή $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Όμως αν T είναι το σύνολο των τετραγώνων των φυσικών αριθμών και E το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών, επειδή το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ βρίσκεται σε $1 - 1$ αντιστοιχία και με το σύνολο T των τετραγώνων των φυσικών και με το σύνολο E των άρτιων φυσικών ισχύει:

$$\text{card}(T) = \text{card}(E) = \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (61)$$

Αλλά τα σύνολα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, $\mathbb{Q}$ των ρητών και $\mathbb{A}$ των αλγεβρικών αριθμών, έχουν αποδειχθεί αριθμήσιμα, δηλαδή σε $1 - 1$ αντιστοίχιση με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών, οπότε

$$\text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{A}) = \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (62)$$

Όμως το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο. Άρα το $\mathbb{R}$ δεν έχει την ίδια τάξη μεγέθους με το $\mathbb{N}$ και ο Cantor όρισε το γράμμα c ως τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{R}$, δηλαδή εξ' ορισμού

$$c = \text{card}(\mathbb{R}) \quad (63)$$

Αμέσως – αμέσως ο Cantor οδηγήθηκε σε δύο πολύ σημαντικά ερωτήματα:

(α) Υπάρχουν άλλοι πληθικοί αριθμοί εκτός των $\aleph_0$ και c ;

(β) Ειδικά, υπάρχουν άλλοι πληθικοί αριθμοί ανάμεσα στους $\aleph_0$ και c ;

Πριν απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα αξίζει κανείς να δει την επέκταση των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της έκθεσης σε δύναμη στους άπειρους πληθικούς αριθμούς, ως εξής: Αν $n = \text{card}(A)$ και $m = \text{card}(B)$ και έστω A και B ξένα μεταξύ τους, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Τότε $n + m = \text{card}(A + B)$, όπου $A + B$ η ένωση των συνόλων A και B . Επίσης $n \cdot m = \text{card}(A \times B)$, όπου $A \times B$ το καρτεσιανό γινόμενο των A και B , δηλαδή $A \times B = \{(x, y) \text{ με } x \in A, y \in B\}$. Τέλος $n^m = \text{card}(A^B)$, όπου $A^B = A \times A \times \dots \times A \times \dots$ (B φορές), δηλαδή A^B περιέχει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς στοιχείων του A , μία για κάθε θέση του B .

Τώρα για A, B πεπερασμένα σύνολα, οι ορισμοί της πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και δύναμης συμφωνούν με τη συνηθισμένη χρήση τους, στην περίπτωση όμως των άπειρων συνόλων, υπάρχουν νέα αποτελέσματα. Έτσι:

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \quad (64)$$

για κάθε πεπερασμένο n . (S. Feferman, σελ. 34) [62]

Η παραπάνω σχέση αντανακλά το επόμενο παράδειγμα:

$$\{0, 1, \dots, n-1\} + \{n, n+1, \dots\} \sim \{0, 2, 4, \dots\} + \{1, 3, 5, \dots\} \sim \{0, 1, 2, \dots\}$$

Τώρα για n, m πεπερασμένα έχουμε $n + m > m$.

Αν όμως $m = \aleph_0$ τότε η σχέση γίνεται $n + \aleph_0 = \aleph_0 \Leftrightarrow n + m = m$!

Επίσης όταν $m = \aleph_0$ παίρνουμε $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \Leftrightarrow m \times m = m$!

που αποτελεί επακόλουθο της ήδη αποδεδειγμένης σχέσης ότι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Πρόταση 30: Ισχύει $c = 2^{\aleph_0}$.

Απόδειξη: Κάθε στοιχείο x του $\mathbb{R}$ μπορεί να προσεγγιστεί από ακολουθίες συνόλων ρητών αριθμών με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι να συνδεθεί το στοιχείο x με το υποσύνολο $\mathbb{Q}_x$ του $\mathbb{Q}$, που περιέχει όλους τους ρητούς r με $r < x$. Τότε το x είναι κατά μοναδικό τρόπο προσδιορισμένο από το σύνολο $\mathbb{Q}_x$, δηλαδή $P(\mathbb{Q}) = \{S : S \subseteq \mathbb{Q}\}$.

Τότε

$$\text{card}(\mathbb{R}) \leq \text{card}(P(\mathbb{Q})) \Leftrightarrow c \leq \text{card}(P(\mathbb{Q})) \quad (65).$$

Η (65) προέκυψε αφού ο κάθε πραγματικός αριθμός x προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από το υποσύνολο $\mathbb{Q}_x$ του $\mathbb{Q}$, οπότε ο πληθικός αριθμός του $\mathbb{R}$ είναι μικρότερος από τον πληθικό αριθμό όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$.

Τώρα για κάθε τυχαίο σύνολο S , το σύνολο $P(S)$ όλων των υποσυνόλων S' του S είναι αριθμητικά ισοδύναμο με το σύνολο $\{0,1\}^S$, το σύνολο όλων των δυνατών τρόπων αντιστοίχισης του 0 ή του 1 σε κάθε στοιχείο i του S . Κι αυτή η αντιστοίχιση επιτυγχάνεται τοποθετώντας τον αριθμό 1 αν το στοιχείο i του S ανήκει στα υποσύνολα S' και τον αριθμό 0 αν δεν ανήκει στα υποσύνολα S' . Άρα το σύνολο $P(S)$ έχει τόσα στοιχεία όσα δείχνει ο αριθμός $2^{card(S)}$ αφού $card(\{0,1\}) = 2$. Άρα με συμβολισμούς Cantor έχουμε

$$card(P(S)) = 2^{card(S)} \quad (66),$$

γι' αυτό και το σύνολο όλων των υποσυνόλων καλείται δυναμοσύνολο του S .

Για $S = Q$ τώρα η σχέση (66) γίνεται:

$$card(P(Q)) = 2^{card(Q)} \Leftrightarrow card(P(Q)) = 2^{\aleph_0} \quad (67).$$

Συνεπώς η (65) με βάση την (67) δίνει

$$c \leq 2^{\aleph_0} \quad (68).$$

Από την άλλη μεριά δεν είναι δύσκολο να εντοπίσουμε $2^{\aleph_0}$ διακεκριμένα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ως εξής: ας κατασκευάσουμε τον αριθμό $x = 0, \alpha\beta\gamma\delta\epsilon \dots$ με τα στοιχεία $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \dots$ να επιλεγούν μεταξύ των αριθμών 0 και 1 μόνο. Τότε προφανώς μπορούν να δημιουργηθούν $2^{\aleph_0}$ ξεχωριστά μεταξύ τους (διακεκριμένα) στοιχεία του $\mathbb{R}$. Άρα η (68) δίνει τώρα $c = 2^{\aleph_0}$. ■

Πρόταση 31: Ισχύει $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (69) (δηλαδή $\aleph_0 < c$)

Απόδειξη: Αφού $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ τότε για τους πληθικούς αριθμούς ισχύει $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$. Όμως το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο, ενώ το $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. ■ (S. Feferman, σελ.35) [62].

Εκτός όμως από τους πληθικούς αριθμούς $\aleph_0$ και $c = 2^{\aleph_0}$, υπάρχουν άραγε άλλοι; Ο Cantor, μετά τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων, έφτασε σε υπολογισμό πληθικών αριθμών συγγενικών δομών προς τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ με συμπεράσματα που εξέπλησαν και τον ίδιο.

Πρόταση 32: Αν $c = \text{card}(\mathbb{R})$ τότε $c \times c = c$ (70) και $(c \times c) \times c = c$ (71).

Απόδειξη: Ο τύπος $c \times c = c$ είναι ανάλογος του τύπου $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ που αναφέρθηκε παραπάνω. Ο Cantor αρχικά απέδειξε τον τύπο θεωρώντας αυθαίρετα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) με στοιχεία $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Επεκτείνοντας τα δεκαδικά μέρη του κάθε αριθμού ως εξής: $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ και $0, b_1 b_2 b_3 \dots$, παίρνει κανείς έναν καινούριο δεκαδικό αριθμό $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$, ο οποίος αντιστοιχεί στους δύο προηγούμενους εναλλάσσοντας τους δεκαδικούς όρους τους. Συνεπώς σε κάθε ζευγάρι (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένας αριθμός r από το $\mathbb{R}$. Άρα $c \times c = c$.

Ο τύπος $(c \times c) \times c = c$, προκύπτει τώρα αμέσως από τον τύπο $c \times c = c$. ■

Πρόταση 33: Ισχύει $c < 2^c$ (72).

Απόδειξη: Ο τύπος $c < 2^c$ αποτελεί ειδική περίπτωση του τύπου $n < 2^n$, αν θέσουμε $n = c$, όπου n είναι τυχαίος πληθικός αριθμός κάποιου συνόλου. Η απόδειξη κάνει πάλι χρήση του διαγώνιου επιχειρήματος του Cantor, μέσω της αναπαράστασης του 2^n ως $\text{card}(\{0,1\}^S)$ για $n = \text{card}(S)$. ■

Πρόταση 34: Ισχύει $n < 2^n < 2^{2^n} < \dots$ για $n = \aleph_0$.

Δηλαδή η πρόταση 3 για τον $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ είναι

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$$

Μάλιστα κανείς μπορεί να φθάσει και πιο μακριά τοποθετώντας δεξιά στην παραπάνω τάξη μεγέθους το άπειρο άθροισμα $n + 2^n + 2^{2^n} + \dots$ κατάλληλα ορισμένο, δηλαδή $n < 2^n < 2^{2^n} < \dots < (n + 2^n + 2^{2^n} + \dots)$ ή με $\aleph_0$:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots < (\aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \dots). \quad (73)$$

Η τάξη μεγέθους στη σχέση (73) επιδέχεται άπειρες προσανξήσεις παίρνοντας πληθικούς αριθμούς ως εκθέτες και ακόμα (άπειρα) αθροίσματά τους. (S. Feferman, σελ. 36) [62].

Ήταν τόση η αναστάτωση που έφερε αυτή η σχέση της ανισότητας ανάμεσα σε άπειρα σύνολα που ανάγκασε κάποιους να πουν: «Ο Cantor θεωρούσε την ακολουθία με τα άλεφ ως «κάτι θείο», όπως «τα σκαλοπάτια που οδηγούν στο θρόνο του Θεού» (G. Kowalewski, σελ. 201) [63], ενώ σήμερα κάποιοι αντιδρούν ακόμη και σε αυτή την παραδοχή περί

απειροσυνόλων: «Δεν υπάρχουν άπειρα σύνολα [...]. Ο Cantor ήταν λάθος και θα πρέπει να συμβεί μια επανάσταση διανοούμενων, να τεθούν τα μαθηματικά ξανά σε σταθερά θεμέλια» (S. Patterson, ανάρτηση) [64].

3.14. Η υπόθεση του συνεχούς του Cantor (Continuum Hypothesis ή CH)

Έχει κανείς λοιπόν, από τη σχέση

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots < (\aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \dots)$$

(σχέση 73) μια σκάλα αντιπροσώπευσης των άπειρων πληθικών αριθμών (cardinals). Αλλά για να αποκτηθεί μια πλήρης τέτοια σκάλα αντιπροσώπευσης όλων των πληθικών αριθμών των άπειρων συνόλων, κάθε τέτοιος αριθμός πρέπει να εμφανιστεί κάπου στη λίστα. Οδηγείται λοιπόν κανείς ξανά στο βασικό ερώτημα που έθεσε και ο Cantor: υπάρχει απειροσύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στο $\aleph_0$ και το $c = 2^{\aleph_0}$; Ο ίδιος ο Cantor υπέθεσε πως όχι, και ανάλωσε αξιοσημείωτη προσπάθεια πολλών ετών για να το αποδείξει. Η υπόθεση αυτή έμενε στην ιστορία ως «**Υπόθεση του συνεχούς**» (**Continuum Hypothesis ή CH συντομογραφικά**). Αν η CH είναι αληθής, τότε ο αριθμός $c = 2^{\aleph_0}$ είναι ο πρώτος πληθικός αριθμός άπειρου συνόλου που είναι μεγαλύτερος από τον $\aleph_0$ του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών. Ανεξάρτητα όμως από την ισχύ ή όχι της υπόθεσης του συνεχούς, εύλογα αναρωτιέται κανείς ποιος είναι ο πρώτος, δηλαδή ο μικρότερος πληθικός αριθμός κάποιου απειροσυνόλου, ένα ερώτημα που άνοιξε έναν άλλο μεγάλο κύκλο αντιπαράθεσης. Η υπόθεση του συνεχούς αποτέλεσε για περίπου τα τρία τέταρτα του αιώνα ένα θεώρημα προς απόδειξη και ο K. A. Lewis παρατηρεί ότι στη φύση δεν παρατηρείται κάτι παρόμοιο: «Κανένα συνεχές δεν έχει ανακαλυφθεί στη φυσική – όλα φαίνεται να αλλάζουν με πεπερασμένες μονάδες που ονομάζονται κβάντα» (K. A. Lewis, sci.math) [65].

Στο δεύτερο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών, που έγινε στο Παρίσι το 1900, ο David Hilbert έδωσε μια περίφημη διάλεξη με τίτλο «23 άλυτα Μαθηματικά Προβλήματα». Πρώτο στη λίστα του Hilbert, ήταν το πρόβλημα του Cantor σχετικά με την Υπόθεση του Συνεχούς, δηλαδή αν υπάρχει άπειρο σύνολο με πλήθος στοιχείων ανάμεσα στο $\aleph_0$ και το

c. Ο Hilbert βρήκε την υπόθεση του Cantor εύλογη, δηλαδή τοποθετήθηκε μάλλον θετικά ως προς τον ισχυρισμό του Cantor.

Η απάντηση στο ερώτημα που έθεσε ο Cantor δόθηκε αρκετά αργότερα στο βάθος του εικοστού αιώνα κατά τρόπο τέτοιο που δεν θα μπορούσε ούτε ο ίδιος να φανταστεί. Πριν δούμε τι έγινε με την υπόθεση του συνεχούς πρέπει να εξεταστεί η πορεία της αξιωματικοποίησης της θεωρίας του από μεταγενέστερους οπαδούς του.

3.15. Τα παράδοξα που έφερε η θεωρία συνόλων

Αν και η θεωρία συνόλων συνέβαλε να τοποθετηθεί το πραγματικό άπειρο στο κέντρο του μαθηματικού ενδιαφέροντος, σοβαρές αντιφάσεις ανακαλύφθηκαν στην καρδιά της θεωρίας οι οποίες οδήγησαν στη στροφή προς τον εικοστό αιώνα μια σημαντική «κρίση» στα θεμέλια των μαθηματικών. Οι θεωρητικοί των συνόλων της εποχής υπέθεταν ως σωστή την αρχή της κατανόησης ή αλλιώς το αξίωμα της αφαίρεσης (comprehension principle):

$$\exists S \forall x (x \in S \Leftrightarrow P(x)),$$

η οποία λέει ότι δοθείσης μιας καλά ορισμένης ιδιότητας ή πρότασης P η οποία εφαρμόζεται σε κάθε είδους στοιχεία, υπάρχει ένα σύνολο S που περιέχει όλα εκείνα τα στοιχεία x για τα οποία η $P(x)$ ισχύει. Το κίνητρο για την αποδοχή της αρχής της κατανόησης ήταν η κρατούσα άποψη εκείνης της εποχής, ότι η συνέπεια ενός συστήματος τύπων και αξιωμάτων που αφορούσαν ένα σύνολο, συνεπάγεται και την ύπαρξη του συνόλου κατ' ευθείαν. Η αρχή της κατανόησης διατυπώθηκε αρχικά από τον Gottlob Frege το 1893 στο έργο του "Grundgesetze der Arithmetik", ωστόσο το 1901 ήδη ο Bertrand Russell παρατήρησε ότι η συγκεκριμένη αρχή οδηγεί τη μαθηματική επιστήμη σε παράδοξα.

Μερικά από τα σημαντικότερα παράδοξα ήταν τα εξής:

α) **Το παράδοξο Burali-Forti** δημοσιεύτηκε το 1897 από τον Cesare Burali-Forti και σε τροποποιημένη μορφή αναφέρει: «Εστω P η ιδιότητα των διατακτικών αριθμών (ή τακτικών αριθμών: ordinal numbers). Τότε S το σύνολο όλων των τακτικών αριθμών και

προφανώς το S είναι καλά διατεταγμένο, με τη συνήθη διάταξη των τακτικών αριθμών. Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο έχει έναν τακτικό αριθμό που εκφράζει την κλάση της διάταξης, άρα ας είναι Ω η κλάση του S . Ο Ω πρέπει να είναι μεγαλύτερος από όλους τους τακτικούς αριθμούς του S , αλλά πώς γίνεται το S να είναι το σύνολο όλων των τακτικών αριθμών και να υπάρχει τακτικός αριθμός πιο μεγάλος από όλους του S ;» Αυτό αποτελεί παράδοξο.

β) **Το παράδοξο του Russell** ανακαλύφθηκε μεταξύ των ετών 1900 και 1902 από τους Ernst Zermelo και Bertrand Russell, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο: «Εστω S ιδιότητα του στοιχείου x αν και μόνο αν x είναι σύνολο με $x \notin x$. Τότε το S είναι το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Ο ορισμός αυτός αμέσως δίνει ότι $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$, προφανής αντίφαση.» Το παραπάνω παράδοξο του Russell προκάλεσε μια πολύ μεγάλη έριδα μεταξύ των μαθηματικών για το γεγονός αν μπορούν να γίνουν δεκτές σχέσεις με αυτοαναφορές πάνω στα σύνολα. Το παράδοξο αυτό είναι δεκτό ακόμη και στην ιντουισιονιστική λογική σχολή των μαθηματικών.

γ) **Το παράδοξο του Cantor**, ουσιαστικά ένα επιχείρημά του, που το 1899 ξεκίνησε «θεωρώντας το P ως ιδιότητα να είναι σύνολο. Αν είναι τώρα S το σύνολο όλων των συνόλων και $P(S)$ το δυναμοσύνολο του S , δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του S . Τότε $P(S)$ είναι μεγαλύτερο σε πληθικότητα από το S , σύμφωνα με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor το 1891. Αυτό αποτελεί προφανή αντίφαση, αφού με τον τρόπο που ορίστηκαν τα σύνολα, ισχύει $P(S) \subseteq S$ ».

δ) **Το παράδοξο του König** δημοσιεύτηκε το 1905 από τον Julius König: «Είναι ίσως εύκολο να δείξουμε ότι τα πεπερασμένα στοιχεία του συνεχούς ορίζουν ένα υποσύνολο του συνεχούς με πληθικό αριθμό $\aleph_0$ [...]. Επικαλούμαστε τέλος, τη λογική αντίθεση πως δοθέντος ενός αυθαίρετου στοιχείου του συνεχούς είτε θα είναι πεπερασμένα ορισμένο είτε όχι. Αν οι πραγματικοί αριθμοί είναι καλά διατεταγμένοι, τότε πρέπει να υπάρχει ένας πρώτος πραγματικός, σύμφωνα με τη διάταξη, που να μην είναι ορισμένος από ένα πεπερασμένο αριθμό λέξεων. Αλλά *ο πρώτος πραγματικός αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να οριστεί με ένα πεπερασμένο αριθμό λέξεων* μόλις έχει οριστεί με ένα πεπερασμένο αριθμό λέξεων, δηλαδή με αυτές με ***bold italics***! Η εικασία ότι το συνεχές είναι καλά διατεταγμένο οδήγησε σε μία αντίφαση» (J. König, σελ. 156-160) [66].

Επίσης αναφέρονται ακόμη τρία παράδοξα, αυτά του **Richard** (1905), του **Berry** (1907) και των **Grelling – Nelson** (1908) παρόμοια με το σκεπτικό του παραδόξου του Kōnig που εκμεταλλεύεται το πεπερασμένο της γλώσσας. Όλα τα παράδοξα (και τα επτά), υπάρχουν στο θεμελιώδες έργο των Russell και Whitehead “Principia Mathematica” που πρωτοδημοσιεύτηκε το 1910.

3.16. Η μειοψηφία της κοινότητας που είναι απέναντι στον Cantor. Ο ρόλος του Kronecker

Σήμερα, σε μεγαλύτερη κλίμακα από ότι την εποχή που εξέφρασε τις απόψεις του ο Cantor, υπάρχει έντονος προβληματισμός σχετικά με την ορθότητα της θεωρίας. Ο Nico de Bois αναρωτιέται γιατί το θεώρημα της διαγωνιοποίησης να εφαρμόζεται μόνο στο διάστημα $(0, 1)$. Ίσως επειδή δεν δημιουργεί αντιφάσεις. Αν όμως προσπαθήσει κανείς να το εφαρμόσει σε όλο το $\mathbb{R}$ υπάρχει πρόβλημα (N. De Bois, sci.math) [67]. Ο Edward Green τονίζει, ότι όλοι οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να προσδιοριστούν ή θα μπορούσαν αν ήταν μετρήσιμοι. Συνεπώς, όχι μόνο δεν έχουν μη επαναλαμβανόμενες δεκαδικές αναπαραστάσεις, αλλά ούτε μπορούν να πάρουν και ονόματα με κάποια έννοια· είναι απλά άγνωστοι (E.Green, sci.math) [68]. Άλλα θέματα που απασχολούν είναι τα παράδοξα τα οποία προκαλούν φόβο στους μαθηματικούς και χρειάζονται αμέσως επίλυση. Έτσι ο Edwin T.Janes προτείνει να στρατευθούμε με τους Gauss, Kronecker και Poincare αντί των Cantor, Hilbert και Bourbaki αφού οι τελευταίοι δεν έθεσαν αυστηρά πλαίσια θεμελίωσης των μαθηματικών μέσω της θεωρίας των άπειρων συνόλων. Θα ήταν πιο υπεύθυνο, συνεχίζει ο Jaynes, πρώτα να βάλουν το δικό τους σπίτι σε τάξη (order) και μετά να μεταδώσουν την ιδιότητα αυτή και σε άλλα πεδία, όπως τα άπειρα σύνολα. Τις ιδέες αυτές ασπάζονται πολλοί μαθηματικοί που αντιτίθενται στις ιδέες της ομάδας Bourbaki (E.T. Jaynes, σελ. XXII, XXVII, 672) [69]. Επιμένοντας στην κρίση και τις διαμάχες που προκάλεσαν τα παράδοξα, ο Morris Kline, ο μεγάλος μεταρρυθμιστής μαθηματικός της Αμερικής, λέει ότι η ελπίδα να βρεθούν αντικειμενικοί νόμοι στη θεμελίωση των μαθηματικών έχει ξεβάψει και ρωτάει αν θα έπρεπε κανείς να σχεδιάσει μια γέφυρα χρησιμοποιώντας θεωρία από τα άπειρα σύνολα ή το αξίωμα της επιλογής. Μήπως η γέφυρα καταρρεύσει; (M.Kline, σελ. 7, 285, 351) [70].

Συνήθως απέναντι στον Cantor, στέκονται στις μέρες μας όλοι όσοι ασχολούνται με τους υπολογιστές, αφού σύμφωνα με τον Robert Massey υψηλότερης τάξης άπειρο δεν μπορεί να αντιληφθεί η πεπερασμένη μνήμη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Οι πραγματικοί υπολογιστές μπορούν να παράγουν μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό ρητών αριθμών ή επαναλαμβανόμενων ακεραίων και αυτό αν τρέξουν αρκετά, γιατί σε αντίθετη περίπτωση κινδύνευαν από υπερφόρτωση (R.Massey, sci.math) [71]. Τέλος, ο Valentin Turchin ισχυρίζεται ότι για το πραγματικό άπειρο δεν υπάρχει χώρος στο σύστημα των εννοιών μας. Στο ιντουισιονιστικό επίπεδο που βρίσκεται, δεν μπορούν να σκεφτούν καμία ποσότητα από το πραγματικό άπειρο επειδή δεν έχουν τέτοιου είδους εμπειρία. Όταν σκέφτεται, λέει ο Turchin, κάτι άπειρο, όπως ο άπειρος χώρος για παράδειγμα, τότε σκέφτεται μια διαδικασία ενός μετακινούμενου σημείου χωρίς τέλος. Αυτό είναι δυνητικό, όχι πραγματικό άπειρο (V.E. Turchin, ανάρτηση στο διαδίκτυο) [72].

Τέλος, η πιο μεγάλη έριδα που δημιούργησε ο Cantor με τη θεωρία συνόλων του ήταν αυτή που δημιουργήθηκε μεταξύ αυτού και του **Leopold Kronecker**, πρώην καθηγητή του στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Όπως ο ίδιος ο Kronecker αναφέρει στις διαλέξεις του: «*Συχνά λέγεται ότι τα μαθηματικά έπρεπε να ξεκινάνε με ορισμούς. Τα μαθηματικά θεωρήματα πρέπει να διαχωρίζονται από τους ορισμούς και τα αξιώματα. Όμως οι ορισμοί από μόνοι τους είναι αδύνατοι, αφού κάθε ορισμός χρειάζεται έννοιες που πρέπει να οριστούν κι αυτές με κάποιο ορισμό και ούτω καθεξής. Δεν μπορούμε να αναπτύξουμε ύπαρξη από το τίποτα*». Τα λόγια αυτά αποτέλεσαν για τον Cantor μια ευθεία αμφισβήτηση της θεωρίας του και άρχισε να δημιουργείται η γνωστή αντιπαλότητα μεταξύ των δύο αντρών. Και ο Kronecker συνεχίζει: «*Τα μαθηματικά υπάρχουν για να εφαρμόζονται. Είναι μία φυσική επιστήμη· όχι καλύτερη, όχι πληρέστερη, και όχι απλούστερη από αυτό που μπορούν μέσω των μαθηματικών να εκφράσουν τα φυσικά φαινόμενα. Αν τίποτε άλλο εκτός από τα ψηφία σε μία συγκεκριμένη θέση είναι γνωστά των δεκαδικών αριθμών, τότε ούτε δύο από αυτούς τους αριθμούς δεν μπορούν να προστεθούν*» και λέγοντας αυτά ο στόχος είναι το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor. Ο Kronecker είχε την πίστη ότι θα μπορούσε κάποια μέρα η θεωρία που υποστήριξε ο Cantor να «αριθμητικοποιηθεί», δηλαδή να μπει η έννοια του αριθμού σε μια πιο αυστηρή βάση, και έτσι να αποτινάξει από πάνω του έννοιες και επεκτάσεις όπως οι άρρητοι και τα συνεχή μεγέθη, κάνοντας κριτική και την υπόθεσή του συνεχώς. Σε κάποιο σχόλιό του είναι ιδιαίτερα καυστικός όταν λέει ότι: «*Δεν ξέρω τι προϋπάρχει στην καντοριανή θεωρία: η*

φιλοσοφία ή η θεολογία, αλλά είμαι σίγουρος πως δεν υπάρχει τίποτα από μαθηματικά εκεί!». Τα παραπάνω αποτελούν αποσπάσματα από διαλέξεις του Kronecker το καλοκαίρι του 1891 στο Βερολίνο [73] καθώς και από το βιβλίο L.Kronecker in K.Hensel, σελ. 253 [74]. Η αντίδραση του Cantor φαίνεται οργισμένη από ένα γράμμα του στον φίλο και εκδότη των άρθρων του G.Mittag-Laffer αναφερόμενος στον Kronecker: «Με επισκέφτηκε στις αρχές Ιουλίου, δηλώνοντας με το φιλικότερο χαμόγελο ότι έδειξε μεγάλη αποδοχή στην τελευταία μεν εργασία με τον Hermite για να του διαμαρτυρηθεί όμως μετά ότι όλα αυτά (οι εργασίες του Cantor) δεν ήταν παρά μόνον «ανοησίες»» [40].

Η σύγκρουση των δύο αντρών που ξεκίνησε αμέσως μετά τις πρώτες δημοσιεύσεις του G.Cantor, έμελε να κρατήσει σχεδόν μέχρι τον θάνατο του L.Kronecker το 1891.

3.17. Τα αξιώματα της Zermelo – Fraenkel (ZF) θεωρίας.

Η θεωρία συνόλων των Ernst Zermelo και Abraham Fraenkel (ZF), συχνά περικλείοντας και το αξίωμα της επιλογής (ZFC) είναι μέχρι και σήμερα η μόνη ίσως αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία συνόλων που είναι ελκυστική ακόμα και για αυτούς που βρίσκονται έξω από τον στενό κύκλο των συνολοθεωρητικών επιστημόνων [W. Mückenheim, σελ. 43] [31]. Από ένα σύνολο συνόλων, άλλα σύνολα μπορούν να κατασκευαστούν, χωρίς να επηρεάζονται τα προηγούμενα. Αυτό δημιουργεί μια ιεραρχία από συσσωρευμένα σύνολα. Συνήθως τα σύνολα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά. Επειδή όμως στη ZFC θεωρία «τα πάντα είναι σύνολα» και ένα σύνολο μπορεί να είναι στοιχείο ενός άλλου συνόλου, οι προτάσεις θα περιέχουν ταυτόχρονα μικρά και κεφαλαία γράμματα μαζί με τα λογικά σύμβολα.

A0: Αξίωμα του κενού συνόλου (Axiom of empty set).

Υπάρχει ένα κενό σύνολο: $\exists x \forall y (y \notin x)$

Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\}$ ή με $\{x | x \neq x\}$.

A1: Αξίωμα της επέκτασης (Axiom of extensionality).

Αν τα σύνολα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$:

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B).$$

A2: Αξίωμα του διαχωρισμού (axiom of separation).

Το αξίωμα επίσης ονομάζεται αξίωμα των υποσυνόλων (subsets) ή αξίωμα της περιορισμένης κατανόησης (restricted comprehension): αν φ είναι μια ιδιότητα (με παράμετρο p), τότε για κάθε παράμετρο p υπάρχει ένα σύνολο $B = \{x \in A \mid \varphi(x, p)\}$ που περιλαμβάνει όλα τα $x \in A$ που έχουν την ιδιότητα φ . Δηλαδή:

$$\forall A \forall p \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x, p))).$$

Για παράδειγμα, έστω A το σύνολο όλων των αυτοκινήτων x και η ιδιότητα φ κάποιων αυτοκινήτων να έχουν χρώμα, παραδείγματος χάριν να είναι κόκκινα (p). Το σύνολο B των κόκκινων αυτοκινήτων υπάρχει και είναι υποσύνολο του A .

A3: Αξίωμα της αντιστοίχισης (axiom of pairing).

Για κάθε σύνολα A και B υπάρχει ένα σύνολο $S = \{A, B\}$ που περιέχει τα A και B σαν στοιχεία και τίποτα άλλο:

$$\forall A \forall B \exists S \forall x (x \in S \Leftrightarrow (x = A \vee x = B)).$$

A4: Αξίωμα της ένωσης (axiom of union).

ή αλλιώς αξίωμα του αθροίσματος συνόλων. Για κάθε σύνολο A υπάρχει η ένωση $B = \cup A$ όλων των στοιχείων του A :

$$\forall A \exists B \forall y (\exists x (y \in x \wedge x \in A) \Leftrightarrow y \in B).$$

A5: Αξίωμα του δυναμοσυνόλου (axiom of power set).

Για κάθε σύνολο A υπάρχει το σύνολο $B = P(A)$ όλων των υποσυνόλων του A :

$$\forall A \exists B \forall x (x \subseteq A \Leftrightarrow x \in B).$$

A6: Αξίωμα του απείρου (axiom of infinity).

Υπάρχει ένα άπειρο σύνολο S . Το S περιέχει το $\emptyset$ και με το X το διαδοχικό σύνολο του X , δηλαδή:

$$\exists S (\emptyset \in S \wedge (X \in S \Rightarrow \{x\} \in S)) \text{ (η άποψη του Zermelo)}$$

$$\exists S (\emptyset \in S \wedge (X \in S \Rightarrow (X \cup \{x\}) \in S)) \text{ (η άποψη του Von Neumann)}$$

Σύμφωνα με τον Zermelo το αξίωμα των απείρων αναφέρεται στον Dedekind. Σήμερα η εκδοχή του von Neumann εφαρμόζεται συνήθως, λόγω της εύκολης κατασκευής των φυσικών αριθμών ως αρχικά τμήματα $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \subset \mathbb{N}$. Και στις δύο περιπτώσεις το ελάχιστο σύνολο S μπορεί να ταυτιστεί με τους πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς $\mathbb{N}_0$, τους φυσικούς αριθμούς μαζί με το 0. (W. Mückenheim, σελ. 46) [31].

Η κατασκευή του Zermelo είναι:

$$0 = \{\} = \emptyset$$

$$1 = \{\{\}\} = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = \{\{\{\}\}\} = \{\{\emptyset\}\} = \{\{0\}\} = \{1\}$$

$$3 = \{\{\{\{\}\}\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}\} = \{\{1\}\} = \{2\}$$

...

Η κατασκευή των πληθικών αριθμών του von Neumann είναι:

$$0 = \{0\} = \emptyset$$

$$1 = \{\} \cup \{\{\}\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = \{\} \cup \{\{\}\} \cup \{\{\}\cup\{\{\}\}\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

...

A7: Αξίωμα της αντικατάστασης (axiom of replacement).

Αν F είναι μια συνάρτηση, τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο $B = F[A] = \{F(x) \mid x \in A\}$, δηλαδή:

$$\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \Rightarrow y = z) \rightarrow \forall A \forall B \forall y (\exists x ((x \in A) \wedge \varphi(x, y)) \Leftrightarrow y \in B)$$

Το πρώτο μέλος δείχνει ότι για κάθε x στην συνάρτηση φ αντιστοιχεί ένα μόνο y . Στο δεύτερο μέλος το B είναι η εικόνα του A μέσω της συνάρτησης φ .

Για παράδειγμα αν $\varphi(x, y)$ είναι $y = 2x$ και επίσης $z = 2x$ τότε $y = z$. Υπό αυτήν την προϋπόθεση η ύπαρξη του B έπεται, έτσι ώστε για κάθε στοιχείο y του B , υπάρχει στοιχείο x του A με την ιδιότητα $y = 2x$ και αντιστρόφως.

Το αξίωμα της αντικατάστασης διευκολύνει την κατασκευή συνόλων που δεν μπορούν να κατασκευαστούν αλλιώς, όπως για παράδειγμα τα: $\{\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), P(P(\mathbb{N})), P(P(P(\mathbb{N}))), \dots\}$

με συνάρτηση $F(n) = P^n(\mathbb{N})$. Τρίτο παράδειγμα $\omega + \omega = \omega - 2$, αφού το αξίωμα του απείρου εξασφαλίζει την ύπαρξη του τακτικού αριθμού ω . Το αξίωμα της αντικατάστασης εγγυάται ότι η συνάρτηση $F(n) = \omega + n$ θα παράγει ένα νέο σύνολο.

A8: Αξίωμα της θεμελίωσης (axiom of foundation) ή και αξίωμα κανονικότητας (of regularity).

Κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα ελάχιστο στοιχείο με την ιδιότητα του ανήκειν ($\in$):

$$\forall S (S \neq \emptyset \Rightarrow \exists X \in S: (S \cap X) = \emptyset).$$

Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι κανένα σύνολο δεν μπορεί να είναι στοιχείο του εαυτού του. Για παράδειγμα το σύνολο $\{X\}$ με μοναδικό στοιχείο το X , είναι $X \in \{X\}$, αλλά $X \notin X$. Αυτό σηματοδοτεί τη διαφορά μεταξύ «περιέχεται ως στοιχείο» και «περιέχεται ως υποσύνολο». Πάντα $X \subseteq X$ και $\emptyset \subseteq X$, αλλά ποτέ $X \in X$ και σπανίως $\emptyset \in X$. Επειδή η τομή δύο συνόλων περιέχει μόνο τα κοινά στοιχεία των A και B , η τομή $\{X\} \cap X$ είναι κενή, αφού δεν θα υπάρχουν στοιχεία του X που να βρίσκονταν επίσης και στο $\{X\}$ ως στοιχεία, καθώς το μοναδικό στοιχείο του $\{X\}$ είναι το X . Τώρα το αξίωμα της θεμελίωσης εγγυάται ότι κάθε μη κενό σύνολο S περιέχει ένα στοιχείο X που δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με το S . Αποκλείει το σχηματισμό συνόλων που να περιέχουν τον εαυτό τους, με σκοπό να αποφευχθούν παράδοξα και αντινομίες σαν αυτά της παραγράφου 3.15. Έτσι αποκλείει αυτοαναφορές και το παράδοξο του Russell ή και του Cantor ακόμα εξοστρακίζονται.

Στα αξιώματα που κυρίως ο E. Zermelo θεμελίωσε σηκώθηκε μια μεγάλη ομάδα ενστάσεων γύρω από τη θεωρία συνόλων. Ο E. Belaya σημειώνει: «Τελικά, όλη η σύγχρονη θεωρία των υπερπεπερασμένων συνόλων αντιπροσωπεύει μια καλοσχεδιασμένη φαντασίωση βασισμένη στην αξιωματική θεμελίωση του έργου του Zermelo. Όλες οι εφαρμογές αυτής της φαντασίωσης σε πολύ μέτριες πτυχές της πραγματικότητας του συνεχούς παραμένουν απόλυτα ανεπαρκείς» (E. Belaya, σελ. 24) [75]. Ο P. Fletcher αρνείται να δεχθεί τη θεωρία συνόλων με τα ZFC αξιώματα ως βασικά μαθηματικά: «Θέλω να εξηγήσω γιατί δεν αποδέχομαι την ορθόδοξη απάντηση στο ερώτημα τι σημαίνουν τα μαθηματικά, ότι είναι η μελέτη των συνόλων και η γνώση μας προέρχεται από τη συνολοθεωρητική μας συναίσθηση με χρήση κοινής λογικής. Υποστηρίζω ότι η συνολοθεωρητική διαίσθηση του συστήματος ZFC είναι εννοιολογικά ασυνάρτητο. Μάλιστα οι άπειροι ποσοδείκτες, το χαρακτηριστικό γνώρισμα της κλασικής λογικής, δεν έχουν

νόημα» (P. Fletcher, σελ. 13) [76]. Από την άλλη ο Pedro Mascarós, αναρωτιέται πώς μπορεί κανείς να λέει ότι σε ένα διάστημα υπάρχουν αριθμοί που ούτε να κατασκευασθούν μπορούν... «*Ας τους επιλέξουμε ή ας κάνουμε ένα σύνολο με αυτούς γιατί έχουμε καθαρά αποδεικτικά στοιχεία ότι υπάρχουν πραγματικά κάπου εκεί, εντάξει, αλλά... μπορούμε να τα επιλέξουμε εάν δεν ξέρουμε που είναι πραγματικά ή τα ονόματά τους; Δεν είναι σαν ένα σύνολο λέξεων που δεν μπορούμε να πούμε ή σαν ένα σύνολο με αόρατες πάπιες ας πούμε που ούτε να πιάσουμε μπορούμε;*» (P. Mascarós, σε ανάρτηση) [77]. Υποστηρίζεται λοιπόν από πολλούς μαθηματικούς, σε αντίθεση με τους Zermelo και Fraenkel, ότι η θεωρία τους δεν είναι μια καλή επιλογή για θεμελίωση των μαθηματικών. Όμως η παράθεση όλων αυτών των αντίθετων σχολίων έρχεται να ενισχύσει ότι ακριβώς η θεωρία ZFC είναι που έφερε τις αλλαγές που ο Cantor περίμενε ως ενίσχυση για τη θεωρία του και αυτή με τη σειρά της προκάλεσε σε άλλους θετική και σε άλλους αρνητική εντύπωση. Η θέση μας εδώ είναι πως η στήριξη της καντοριανής θεωρίας είναι η ίδια η δυναμική και η καινοτομία των αποδείξεών της. Η αλήθεια είναι ότι μέχρι τότε κανείς άλλος, πλην των αρχαίων Ελλήνων, δεν είχε ταρακουνήσει τα θεμέλια των μαθηματικών τόσο πολύ όσο η θεωρία συνόλων του Cantor.

A9: Αξίωμα της επιλογής (axiom of choice ή AC)

Κάθε σύνολο T από μη κενά σύνολα X έχει μια συνάρτηση επιλογής F

$$\forall T (\emptyset \notin T \Rightarrow (\exists F: T \rightarrow \cup T \wedge \forall X \in T: F(X) \in X)).$$

Το αξίωμα της επιλογής (ή AC) είναι το πιο **αμφιλεγόμενο** αξίωμα των μαθηματικών. Πρωτοπαρουσιάστηκε το 1904 από τον Zermelo και ο ίδιος επανήλθε το 1908 λέγοντας: «Έστω T το σύνολο των μη κενών συνόλων που δεν έχουν κοινά στοιχεία, τότε η ένωση $\cup T$ περιέχει τουλάχιστον ένα υποσύνολο S το οποίο έχει με κάθε στοιχείο του T μόνο ένα κοινό στοιχείο. Είναι πάντα πιθανό να επιλέξουμε από κάθε στοιχείο του T ένα στοιχείο και στην ένωση τα επιλεγόμενα στοιχεία σε ένα σύνολο S ». (E. Zermelo, σελ. 266) [93].

Το AC είναι ισοδύναμο με την πρόταση ότι για κάθε σύνολο μη κενών συνόλων, το καρτεσιανό γινόμενο είναι μη κενό. Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\{X_i \mid i \in I\}$ των μη κενών συνόλων X_i περιλαμβάνει όλες τις διατεταγμένες i – άδες στοιχείων των X_i .

Παράδειγμα 1^ο: Αν $I = \{1, 2\}$, $X_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $X_2 = \{3, 4\}$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2 = \{(\alpha, 3), (\beta, 3), (\gamma, 3), (\alpha, 4), (\beta, 4), (\gamma, 4)\}$ δεν είναι κενό.

Παράδειγμα 2^ο: Αν $I = \mathbb{N}$, $X_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών με άπειρα ψηφία.

Παράδειγμα 3^ο: Αν $I = \{1, 2, 3\}$ και $X_1 = X_2 = X_3 = \mathbb{R}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, είναι ίσως το πιο αμφιλεγόμενο αξίωμα της θεωρίας. Θα γίνει αναφορά σε κάποιες ενστάσεις που αυτό το αξίωμα επέφερε. Μια πρώτη αντίθεση είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις το συγκεκριμένο αξίωμα δεν απαιτείται, ακόμα και για την ύπαρξη ενός άπειρου συνόλου. Άρα μια πιο πεπερασμένη μορφή μαθηματικών είναι απόλυτα επαρκής (J. Kellner, σελ. 11) [78]. Ο Andrej Kolmogorov μάλιστα προχωράει ακόμα: «Αντικείμενα που η ύπαρξή τους θεμελιώνεται με το αξίωμα της επιλογής του Zermelo εμφανίζονται να είναι όχι μόνο χωρίς νόημα αλλά και μερικές φορές καταστροφικά προς την απλότητα και την αυστηρότητα κρίσιμων μαθηματικών θεωριών» (A. N. Kolmogorov, σελ. 41-54) [79]. Εδώ αξίζει να αναφερθεί η διεισδυτικότητα της θεωρίας συνόλων με τα ZFC αξιώματα στη μαθηματική κοινότητα της εποχής, που προκαλεί το θαυμασμό του αντίθετου προς τη θεωρία Thoralf Skolem: «Για να ορίσει κανείς κάτι μη αριθμήσιμο θα πρέπει να υπάρχει είτε ένα μη αριθμήσιμο πλήθος αξιωμάτων είτε ένα αξίωμα που θα μπορούσε να αποδώσει μη μετρήσιμο αριθμό προτάσεων πρώτης τάξης και το AC του Zermelo δεν αρκεί για κάτι τέτοιο και οι μαθηματικοί στο μεγαλύτερο μέρος δεν θα ασχολούνταν με αυτό. Αλλά τα τελευταία χρόνια έχω δει προς έκπληξή μου ότι τόσο πολλοί μαθηματικοί πιστεύουν ότι αυτά τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων παρέχουν την ιδανική βάση για τα μαθηματικά» (T. Skolem, σελ. 300) [80].

3.18. Το θεώρημα της καλής διάταξης (well-ordering theorem ή WO)

Η απάντηση στο ερώτημα, περί του μικρότερου πληθικού αριθμού σε άπειρα σύνολα, πρότεινε ο Cantor να δοθεί επικαλούμενος αυτό που έμεινε να καλείται «**Αρχή της καλής διάταξης**» (**Well Ordering Principle** ή **WO** συντομογραφικά). Ένα σύνολο S λέγεται ότι είναι καλά διατεταγμένο με μία σχέση διάταξης $<$ μεταξύ των στοιχείων του, αν κάθε μη κενό υποσύνολο του S έχει ένα πρώτο στοιχείο. Έτσι, για παράδειγμα, στις επόμενες τρεις αναδιατάξεις του $\mathbb{N}$, των φυσικών αριθμών:

$$\begin{aligned} A_1 &: 1, 2, 3, \dots, 0 \\ A_2 &: 0, 1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots \\ A_3 &: \dots, 6, 4, 2, 0, 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

υπάρχουν τρεις διαφορετικές διατάξεις φυσικών αριθμών $<_1$, $<_2$ και $<_3$ αντίστοιχα. Από αυτές, στις δύο πρώτες αναδιατάξεις του $\mathbb{N}$ είναι καλώς διατεταγμένο (WO), ενώ στην τρίτη δεν είναι, αφού δεν υπάρχει ένα πρώτο (ελάχιστο κατά την τρίτη αναδιάταξη) στοιχείο. Αρχικά ο Cantor ισχυρίστηκε ότι η Αρχή της καλής διάταξης (WO) ήταν ένας προφανής «νόμος της ανθρώπινης σκέψης» όταν την πρωτοδιατύπωσε το 1883. Το 1895 περίπου άρχισε να αναγνωρίζει την ανάγκη για ένα πιο πειστικό επιχείρημα και κάτι τέτοιο πιστοποιούν οι επιστολές του προς τον Hilbert και τον Dedekind ανάμεσα στα έτη 1896 και 1898. Το 1883 όμως ο ισχυρισμός του Cantor βασίστηκε στο εξής: «Αν S είναι ένα μη κενό σύνολο, επιλέγουμε ένα στοιχείο x_0 του S αυθαίρετα. Τότε $S = \{x_0\}$ ή το $S - \{x_0\}$ είναι μη κενό. Στη δεύτερη περίπτωση συνεχίζουμε επιλέγοντας ένα στοιχείο x_1 του $S - \{x_0\}$ αυθαίρετα. Τότε $S = \{x_0, x_1\}$ ή $S - \{x_0, x_1\}$ είναι μη κενό. Στη δεύτερη περίπτωση συνεχίζουμε επιλέγοντας ένα στοιχείο x_2 του $S - \{x_0, x_1\}$ αντίστοιχα. Αν τώρα το S είναι πεπερασμένο, τότε σε κάποιο βήμα n , $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Στην αντίθετη περίπτωση το $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του S . Αν $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ τότε έχουμε τελειώσει. Στην αντίθετη περίπτωση επιλέγουμε ένα στοιχείο x_ω του $S - \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ αυθαίρετα. Συνεχίζουμε αν είναι απαραίτητο, επιλέγοντας στοιχεία $x_{\omega+1}, x_{\omega+2}, \dots$ του S . Κάποτε θα εξαντληθούν όλα τα στοιχεία του S . Έτσι φθάνουμε στο $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_a, \dots\}$, όπου σε κάθε στάδιο αυτής της διαδικασίας γέννησης αυτής της υπερπεπερασμένης ακολουθίας, υπάρχει πάντα ένα πρώτο στοιχείο μεταξύ όλων αυτών που έχουν επιλεγεί. Έτσι εξασφαλίζεται η καλή διάταξη του S με τη σειρά εμφάνισης: $x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots < x_\omega < x_{\omega+1} < \dots < x_a < \dots$ ». Η υπόθεση πως υπάρχει μια τέτοια ακολουθία αυθαίρετων επιλογών σημείων προκάλεσε μεγάλα προβλήματα. Η περίπτωση των συνόλων των φυσικών αριθμών δεν ήταν πρόβλημα, αφού, όπως βλέπει κανείς παραπάνω, το $\mathbb{N}$ διαθέτει από μόνο του αναδιατάξεις που επιτρέπει να τοποθετηθούν τα στοιχεία του σε ένα μηχανισμό καλής διάταξης, όμως το ίδιο δεν είναι εφικτό με το $\mathbb{R}$, το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αν λοιπόν κανείς δεχτεί την Αρχή της καλής διάταξης, τότε μια πλήρης σκάλα των άπειρων πληθικών αριθμών προκύπτει ως εφαρμογή. Έτσι ο Cantor όρισε μια τέτοια διάταξη πληθικών αριθμών απειροσυνόλων χρησιμοποιώντας τα εβραϊκά άλεφ με δείκτες ως εξής:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_n < \dots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \dots < \aleph_a < \dots$$

όπου κάθε πληθάριθμος $\aleph_{a+1}$ θεωρείται ο πρώτος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος από τον $\aleph_a$. Εδώ η Υπόθεση του συνεχούς υποβόσκει ως σχέση του c με τον πληθάριθμο $\aleph_0$: αφού $\aleph_0 < c$ και $\aleph_1$ είναι ο πρώτος πληθάριθμος μεγαλύτερος από τον $\aleph_0$ θα ισχύει $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$. Αν υπάρχει πληθάριθμος μεταξύ $\aleph_0$ και c , τότε ασφαλώς αυτός θα ήταν ο $\aleph_1$. Ως εκ τούτου, το ερώτημα αν η υπόθεση του συνεχούς του Cantor είναι αληθής ισοδυναμεί με το ερώτημα αν $c = \aleph_1$, δηλαδή αν $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Η διάταξη $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \dots < \aleph_a < \dots$ έδωσε με όρους τακτικών αριθμών διατάξεις πληθάρθμων και ουσιαστικά αυτές οι ανακαλύψεις του Cantor έφεραν τεράστια απήχηση στους διαδόχους του. Τώρα πια κάθε άπειρο σύνολο έχει έναν πληθάριθμο (cardinal) και κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο έχει έναν τακτικό πληθάριθμο (ordinal). Ο απλός διαχωρισμός πεπερασμένων και άπειρων συνόλων ξεπεράστηκε, αφού η νέα θεωρία διαχωρίζει τα άπειρα σύνολα σε αριθμήσιμα με πληθάριθμο $\aleph_0$ και σε αυτά που έχουν κάποιο τακτικό πληθάριθμο μεγαλύτερο από $\aleph_0$. Είχε φτάσει η στιγμή του πραγματικού άπειρου, αφού αυτό έβγαινε από ένα μεσαιωνικό τέλμα και έπαιζε πια βασικό ρόλο στα μαθηματικά με πράξεις μεταξύ πληθάρθμων σαν να ήταν απλοί αριθμοί, όπως $14(\omega + 1)(\omega^2 3 + 4) = \omega^3 3 + \omega 4 + 14$ ή $\aleph_{25} \times \aleph_{19} = \aleph_{25}$, πείθοντας τους μαθηματικούς ότι οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί ήταν τόσο αληθινοί όσο οι πεπερασμένοι. Κι αυτό διότι ένιωθαν άνετα με οτιδήποτε μπορούσαν να υπολογίσουν και η θεωρία του Cantor τους το προσέφερε αυτό. Λίγοι μόνο μαθηματικοί αρνήθηκαν την παραδοχή του πραγματικού απείρου όπως ο μεγάλος εχθρός της θεωρίας Leopold Kronecker, ο Baire, ο Brouwer, ο Poincaré, ο Weyl και άλλοι. Η μεγάλη πλειοψηφία χειροκρότησε τη θεωρία. Βέβαια, αν ήξεραν την εποχή εκείνη πόσο ατίθαση θα ήταν η αποτίμηση των εκθετικών πληθάρθμων, όπως για παράδειγμα του $2^{\aleph_0}$, ίσως ήταν λιγότερο πρόθυμοι στον εναγκαλισμό της υπερπεπερασμένης αριθμητικής!

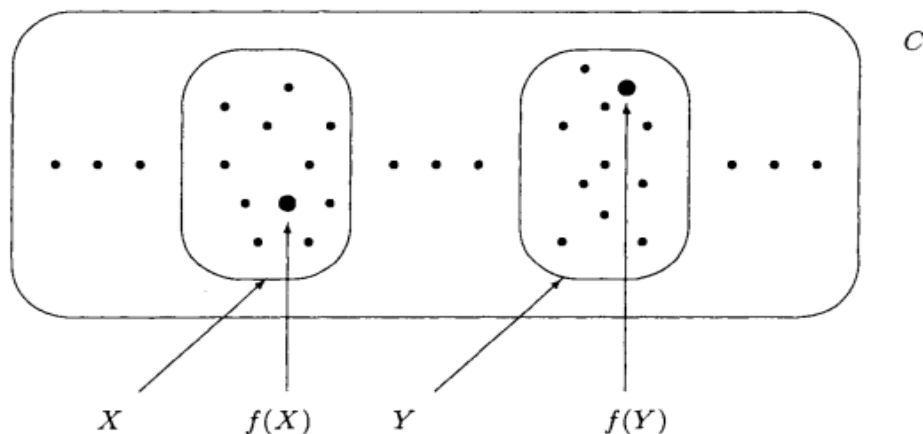
Ο Karl Friedrich Gauss, λίγο προγενέστερος του Cantor (ο Cantor ήταν δέκα ετών, όταν πέθανε ο Gauss), έγραψε προς ένα φίλο του μαθηματικό: «Είμαι αντίθετος στη χρήση μιας άπειρης ποσότητας σαν να ήταν μια πραγματική οντότητα· κάτι τέτοιο δεν επιτρέπεται στα μαθηματικά. Το άπειρο είναι απλώς τρόπος του λέγειν» (Kline M., σελ. 993) [81]. Είναι πρόδηλο ότι ο Gauss αν ζούσε μετά τον Cantor θα ήταν μάλλον αντίθετος με το έργο της θεωρίας συνόλων του τελευταίου, κατά πάσα πιθανότητα η άποψή του θα ευνοούσε την αρχαιοελληνική Αριστοτελική θέση. Επιστρέφοντας στον Kronecker, τον παλιό δάσκαλο του Cantor, διαπιστώνοντας ότι δεν θα μπορούσε να εμποδίσει τον Cantor να δημοσιεύσει

τη θεωρία του, επιτέθηκε σε αυτόν με αθέμιτα μέσα, αφού ποτέ δεν δημοσιοποιούσε εγγράφως τις επιστημονικές διαφωνίες του. Έτσι, με διάφορους υπαινιγμούς υποστήριζε ότι όχι απλώς οι εργασίες του Cantor αποτελούσαν αγυρτεία, αλλά ότι και ο ίδιος ο Cantor ήταν ένας **τσαρλατάνος**, ένας **διαφθορέας της νεολαίας**, όπου παρέσυρε τους νέους «σε έναν επικίνδυνο κόσμο μαθηματικού παραλογισμού» (E. T. Bell, 1937, σελ. 570) [82].

Βέβαια ο ίδιος ο Cantor ενώ αποκαλούσε το θεώρημα καλής – διάταξης «θεμελιώδη νόμο της σκέψης» δεν το απέδειξε, ούτε καν έδειξε μια μικρή έστω σκέψη προσέγγισης. Αυτό έσπευσε να το κάνει ο E. Zermelo το 1904 στο έργο του «Beweis dass jede Merge wohlgeordnet werden kann», δηλαδή ότι κάθε σύνολο μπορεί να έρθει σε καλή – διάταξη. Ο νεαρός τότε Γερμανός μαθηματικός Ernst Zermelo σήκωσε το γάντι εξ' ονόματος του Cantor. Έχοντας εργαστεί σε θέματα ανάλυσης και μαθηματικής φυσικής, εντάσσεται στην επιστημονική κοινότητα του πανεπιστημίου του Γκέτινγκεν ως νεαρός καθηγητής το 1899, όπου υπό την καθοδήγηση του Hilbert μελετά τη θεωρία συνόλων. Η πρώτη του επιτυχία καταγράφεται το 1904 με την απόδειξη του Θεωρήματος της Καλής Διάταξης πάνω στη βάση μιας νέας αρχής, που έμεινε να ονομάζεται Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice ή AC συντομογραφικά). Σύμφωνα με το AC: «αν S είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη στη συλλογή C όλων των μη κενών υποσυνόλων X του S , τέτοια ώστε για κάθε X στο C να ισχύει: $f(X)$ να βρίσκεται μέσα στο X . Δηλαδή η f εφοδιάζει για την ταυτόχρονη επιλογή από κάθε μη κενό υποσύνολο X του S με ένα διακεκριμένο στοιχείο του X (το $f(X)$).» Το αξίωμα της επιλογής του Zermelo, αν και βοήθησε στην εμπέδωση της θεωρίας συνόλων του Cantor μέσω της αποδοχής της ισχύος της αρχής της καλής διάταξης, εντούτοις προκάλεσε νέο γύρο αντιδράσεων από τους μαθηματικούς. Ενδεικτικά ο Émile Borel αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «... ένας τέτοιος συλλογισμός δεν ανήκει στα μαθηματικά» (Jervell H. R, σελ. 96) [83] αναφερόμενος στο AC του Zermelo. Ένας νέος γύρος αντιπαράθεσης έχει ανοίξει μεταξύ Zermelo – Borel διαδεχόμενος αυτήν μεταξύ Cantor – Kronecker. Η κόντρα που γεννήθηκε στο τελείωμα του προηγούμενου αιώνα και έχει φουντώσει για τα καλά στην αρχή του εικοστού, θυμίζει την αντιπαράθεση που προέκυψε με το αξίωμα του Ευκλείδη των παραλλήλων και με τα ερωτήματα που ανέκυψαν με την έλευση των μη ευκλείδειων γεωμετριών.

Για να στηρίξει τη θεωρία συνόλων σε πιο γερές βάσεις, ο Zermelo, το καλοκαίρι του 1907 ολοκλήρωσε μια αναθεωρημένη απόδειξη του θεωρήματος της καλής διάταξης χρησιμοποιώντας μια καλύτερη διατύπωση του αξιώματος της επιλογής, για

συντομογραφία έστω $\mathbf{AC}'$. Σύμφωνα με την $\mathbf{AC}'$: «Αν C είναι μια συλλογή μη κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων X, Y με $X \cap Y = \emptyset$, τότε υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη στο C , τέτοια ώστε για κάθε X στο C , το $f(X)$ ανήκει ξανά στο X (ομοίως και για ξένο προς το X σύνολο Y , το $f(Y)$ ανήκει στο Y). Το $\mathbf{AC}'$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 18 Το τελευταίο αξίωμα της επιλογής

Αργότερα το 1923 ο A. Fraenkel δήλωνε: «Μου φαίνεται ότι όχι μόνο θα καθιερωθεί η δυνατότητα της καλής διάταξης, αλλά θα δοθεί ένας πραγματικός τρόπος που αυτό μπορεί να γίνει, σε αντίθεση με το ότι μέχρι σήμερα κάτι τέτοιο θα έχει ακόμα ολοκληρωθεί σε απλά μη αριθμήσιμα σύνολα» (A. Fraenkel, σελ. 141) [84].

Τελικά το θεώρημα της καλής διάταξης είναι ισοδύναμο με το θεώρημα της επιλογής. Δύο σύνολα, κανένα εκ των οποίων δεν είναι ισοδύναμο με ένα αρχικό τμήμα του άλλου, δεν μπορούν να συγκριθούν σε μέγεθος. Η σύγκρισή τους επιτυγχάνεται με την αρχή της καλής διάταξης που είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος της επιλογής. Ή θα είναι ισοδύναμο ή το ένα θα είναι ισοδύναμο με κάποιο αρχικό τμήμα του άλλου (W. Mückenheim, σελ. 51) [31]. Χωρίς το αξίωμα της επιλογής δεν μπορεί να αποκλειστεί ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο αριθμήσιμων συνόλων (A. Fraenkel, σελ. 62) [85]. Αν ένα σύνολο είναι καλώς διατεταγμένο τότε δεν περιέχει καμία άπειρη φθίνουσα ακολουθία, διότι μια τέτοια ακολουθία δεν έχει ελάχιστο στοιχείο εξ' ορισμού. Ένα παράδειγμα είναι το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ που στη φυσική του διάταξη $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$ περιέχει την ακολουθία $(-n)$. Φυσικά το $\mathbb{Z}$ μπορεί να τεθεί σε καλή διάταξη, για παράδειγμα $(0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots)$ όπου επίσης η υπακολουθία των αρνητικών ακεραίων είναι σε αύξουσα σειρά.

Η αρχή της καλής διάταξης WO που αποδείχθηκε ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής, είχε ξεσηκώσει κι αυτή αρκετές αντιδράσεις. Ερωτήματα του τύπου, αν δοθεί ένας

αριθμός τότε υπάρχει κι ο επόμενος που είναι πολύ εύκολο για πεπερασμένα σύνολα, εγείρουν ενστάσεις όταν ο αριθμός n είναι αρκετά μεγάλος, ώστε τότε η αλυσίδα να σπάσει καθώς έναν τέτοιο αριθμό δεν μπορεί να τον κατανοήσει το ανθρώπινο μυαλό (J. P. Bendegen, σελ. 119) [86]. Ο μεγάλος Ολλανδός μαθηματικός L. E. J. Brouwer, ιδρυτής της σχολής του ιντουισιονισμού, επιμένει ότι ο άνθρωπος μπορεί να δημιουργήσει μόνο πεπερασμένες ακολουθίες, οπότε η αντίθεσή του στον τακτικό τύπο ω του Cantor είναι δεδομένη. Στις αρχές του εικοστού αιώνα εξελίχθηκε μια μεγάλη πολεμική γύρω από τα σωστά θεμέλια των μαθηματικών. Η συζήτηση ήταν πώς διάφοροι κλάδοι των συμβατικών μαθηματικών θα μπορούσαν να ελαχιστοποιηθούν σε συγκεκριμένα τυπικά συστήματα. Και η προσπάθεια των Russell και Whitehead με το “Principia Mathematica” και η θεωρία συνόλων των Cantor και Zermelo προσέφεραν ελάχιστα πράγματα σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Paul Cohen. Ο Cohen ήταν αυτός που απέδειξε τη συμβατότητα της άρνησης της υπόθεσης του συνεχούς με τα αξιώματα της ZFC θεωρίας το 1963. «Η μόνη πραγματικότητα», λέει ο Cohen, «είναι αυτή που καταλαβαίνουμε με τη δική μας εμπειρία» [87].

3.19. Η διπλή απάντηση στην υπόθεση του συνεχούς του Cantor.

Έχει ήδη αναφερθεί η πεποίθηση του Cantor ότι δεν υπάρχει πληθικός αριθμός συνόλου ανάμεσα στους πληθικούς αριθμούς $\aleph_0$ και c , όπου $c = 2^{\aleph_0}$. Δηλαδή δεν υπάρχει σύνολο S που να ικανοποιεί τη σχέση $\aleph_0 < |S| < 2^{\aleph_0}$ ή ισοδύναμα $|\mathbb{N}| < |S| < |\mathbb{R}|$ με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών και $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Ο ίδιος ο Cantor είχε προσπαθήσει να αποδείξει την πρόταση αυτή, που έμεινε να λέγεται ως **υπόθεση του συνεχούς (Continuum Hypothesis ή CH)** χωρίς όμως επιτυχία.

Το 1938 ο Kurt Gödel έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν ήταν δυνατόν να απορριφθεί με χρήση των αξιωμάτων της Zermelo – Fraenkel θεωρίας με το αξίωμα της επιλογής ZFC, δηλαδή τα αξιώματα της ZFC θεωρίας δεν οδηγούν σε αντίφαση προσθέτοντας την υπόθεση του συνεχούς (K. Gödel, 1940) [88].

Το 1963 ο Paul Cohen έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν ήταν δυνατόν ούτε να αποδειχθεί με χρήση των αξιωμάτων της ZFC θεωρίας. Για την ακρίβεια έδειξε ότι τα αξιώματα της ZFC θεωρίας δεν οδηγούν σε αντίφαση προσθέτοντας την άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς (P.J. Cohen, σελ. 1143 – 1148) [89].

«Ο Cantor ήταν σχεδόν σίγουρος ότι οι αριθμοί $\aleph_0$ και c αντιστοιχούσαν σε πραγματικές οντότητες του φυσικού κόσμου. Φοβάμαι, ότι δεν θα ήταν ευχαριστημένος με τη «λύση» που έδωσαν οι νέες μαθηματικές έρευνες στην υπόθεση του συνεχούς... Οι πεποιθήσεις του θα τίθονταν υπό αμφισβήτηση σε έναν κριτικό της σκέψης όπως ο Kronecker.» (Herbert Meschkowski, σελ. 213 και 229) [90].

Πιο αντίθετος με τα αποτελέσματα της υπόθεσης του συνεχούς είναι ο Andrej Mostowski, που υποστηρίζει ότι από τη στιγμή που η υπόθεση αυτή με τις δυνάμεις των πληθικών αριθμών είναι συμβατή με τα αξιώματα της ZFC θεωρίας, δείχνει ότι αυτή η αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας είναι απελπισμένα ατελής, θέση όχι μακρινή από αυτή του Paul Cohen που ήδη αναφέρθηκε. «Σίγουρα κανείς δεν περίμενε τα αξιώματα της θεωρίας ZFC να είναι πλήρη, αλλά αυτό είναι βέβαιο επίσης, ότι κανείς δεν περίμενε να είναι και τόσο ατελής.» [91]

Τέλος, σε δύο μόνο ερωτήσεις ο A. Costa – Leite περικλείει όλη την αντίθεσή του με τη μη αντιφατικότητα και της υπόθεσης του συνεχούς και της άρνησής της με τη ZFC θεωρία: «Απαντήστε σε αυτές τις δύο ερωτήσεις: Συμφωνείτε ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι μια σημαντική δήλωση με συγκεκριμένη τιμή αλήθειας, ακόμα και αν δεν ξέρουμε τι είναι; «Όχι». Συμφωνείτε ότι το αίτημα που δηλώνει την ύπαρξη ενός μη προσβάσιμου πληθικού αριθμού είναι μια σημαντική δήλωση με συγκεκριμένη τιμή αλήθειας, ακόμα και αν δεν ξέρουμε τι είναι; «Όχι»»». [92]

3.20. Ερωτηματολόγιο

Παρακάτω παραθέτουμε ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με το δυνητικό ή πραγματικό άπειρο που μοιράσαμε στους μαθητές. Η έρευνα στηρίχθηκε εφαρμόζοντας κυρίως ερωτηματολόγια Fischbein του 2001, Dubinski et al του 2005 και Makri του 2015. Επίσης έχουμε ενσωματώσει το γνωστό ως πρόβλημα Hilbert με τα άπειρα δωμάτια του ξενοδοχείου και το παράδοξο του Ζήνωνα. Η αναζήτηση γίνεται γύρω από τη διαίσθηση των μαθητών σχετικά με μία ρεαλιστική ή κατασκευαστική έννοια του απείρου.

Οι ερωτήσεις ήταν:

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ Ή ΔΥΝΗΤΙΚΟ ΑΠΕΙΡΟ

1. Το άπειρο είναι για εσάς συνώνυμο με:

Το κενό ☐ Τον αριθμό 99999... ☐ Το άγνωστο ☐ Το πολύ μακρινό ☐

2. Το άπειρο...

Υπάρχει και το βλέπουμε ☐ Δεν υπάρχει ☐

Υπάρχει και δεν το βλέπουμε ☐ Δεν ξέρω αν υπάρχει ☐

3. Υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 5 και του 7 από ότι μεταξύ του 0 και του 1;

Ναι ☐ Όχι ☐ Δεν ξέρουμε ☐ Είναι ίσοι στο πλήθος ☐

4. Οι αριθμοί από το 0 έως το 10...

Είναι αμέτρητοι ☐ Δεν είναι άπειροι ☐ Είναι πολλαπλάσιοι του απείρου ☐

Είναι λιγότεροι από όσους είναι πάνω από 10 ☐

5. Το άπειρο θα λέγατε ότι είναι...

Πραγματικό ☐ Φανταστικό και ίσως πραγματικό ☐

Φανταστικό και ποτέ πραγματικό ☐ Φανταστικό και πραγματικό ☐

6. Το άπειρο είναι...

Αριθμός ☐ Κενό ☐ Σύμβολο ☐ Σύνολο ☐

7. Γράψτε το μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει:

8. Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 0,8 και το 1,1;

9. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που είναι μικρότερος από 1;

10. Αν αφαιρέσουμε δύο άπειρες ποσότητες παίρνουμε...

0 ☐ Άπειρο ☐ Αριθμό ☐ Δεν ξέρουμε ☐

11. Ποιος αριθμός είναι πιο κοντά στο άπειρο;

$100 \cdot 100$ ☐ 100^{100} ☐ $(100 \cdot 100)^{100}$ ☐ Κανείς ☐

12. Προσθέτοντας ποιο υλικό πολλές φορές με τον εαυτό του, φτάνουμε στο ∞ ;

Χάρακες ☐ Κολώνες ΔΕΗ ☐ Με όλα ☐ Με τίποτα ☐

13. Ποιοι αριθμοί από τα πολλαπλάσια του 2 και του 5 είναι περισσότεροι;

Του 2 ☐ Του 5 ☐ Είναι ίσοι σε πλήθος ☐ Δεν ξέρουμε ☐

14. Σε ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια είναι όλα κατειλημμένα. Αν έρθει ένα ακόμη άτομο, θα μπορούσε να μείνει κι αυτό σε ξεχωριστό δωμάτιο από τους άλλους και με ποιον τρόπο;

- Όχι, διότι

- Ναι, διότι

15. Αν βρίσκομαι σε απόσταση ενός μέτρου από τον τοίχο του δωματίου μου και κάθε φορά κάνω κίνηση προς τον τοίχο καλύπτοντας τη μισή απόσταση μέχρι τον τοίχο, θα φτάσω στον τοίχο ποτέ και γιατί;

- Όχι, διότι

- Ναι, διότι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

1. Το άπειρο είναι για εσάς συνώνυμο με:

Το κενό : 6%
Τον αριθμό 99999... : 1%
Το άγνωστο : 43%
Το πολύ μακρινό : **50%**

2. Το άπειρο...

Υπάρχει και το βλέπουμε : 8%
Δεν υπάρχει : 8%
Υπάρχει και δεν το βλέπουμε : **70%**
Δεν ξέρω αν υπάρχει : 14%

3. Υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 5 και του 7 από ότι μεταξύ του 0 και του 1;

Ναι : **50%**
Όχι : 25%
Δεν ξέρουμε : 20%
Είναι ίσοι στο πλήθος : 5%

4. Οι αριθμοί από το 0 έως το 10...

Είναι αμέτρητοι : **55%**
Δεν είναι άπειροι : 15%
Είναι πολλαπλάσιοι του απείρου : 15%
Είναι λιγότεροι από όσους είναι πάνω από 10 : 15%

5. Το άπειρο θα λέγατε ότι είναι...

Πραγματικό : 8%
Φανταστικό και ίσως πραγματικό : 30%
Φανταστικό και ποτέ πραγματικό : 20%
Φανταστικό και πραγματικό : **42%**

6. Το άπειρο είναι...

Αριθμός	8%	Κενό	25%	Σύμβολο	20%	Σύνολο 47%
---------	----	------	-----	---------	-----	-------------------

7. Γράψτε το μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει:

Δεν υπάρχει : 23%
☐ : **35%**
9999.... : 20%
Δεν ξέρω : 22%

8. Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 0,8 και το 1,1;

3 : 30%

☐ : 57%

Δεν ξέρω :13%

9. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που είναι μικρότερος από 1;

Πεπερασμένος : 15%

0,99 : 15%

0,999.... : 45%

δεν υπάρχει : 10%

δεν ξέρω : 15%

10. Αν αφαιρέσουμε δύο άπειρες ποσότητες παίρνουμε...

Μηδέν :15%

Άπειρο :25%

Αριθμό :5%

Δεν ξέρουμε : 55%

11. Ποιος αριθμός είναι πιο κοντά στο άπειρο;

$100 \cdot 100$: 0%

100^{100} : 0%

$(100 \cdot 100)^{100}$: 30%

Κανείς :70%

12. Προσθέτοντας ποιο υλικό πολλές φορές με τον εαυτό του, φτάνουμε στο ∞ ;

Χάρακες: 0%

Κολώνες ΔΕΗ: 2%

Με όλα: 36%

Με τίποτα: 62%

13. Ποιοι αριθμοί από τα πολλαπλάσια του 2 και του 5 είναι περισσότεροι;

Του 2: 7%

Του 5: 8%

Είναι ίσοι σε πλήθος: 47%

Δεν ξέρουμε: 38%

14. Σε ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια είναι όλα κατειλημμένα. Αν έρθει ένα ακόμη άτομο, θα μπορούσε να μείνει κι αυτό σε ξεχωριστό δωμάτιο από τους άλλους και με ποιον τρόπο;

όχι: 29%

ναι: 61%

δεν ξέρω: 10%

15. Αν βρίσκομαι σε απόσταση ενός μέτρου από τον τοίχο του δωματίου μου και κάθε φορά κάνω κίνηση προς τον τοίχο καλύπτοντας τη μισή απόσταση μέχρι τον τοίχο, θα φτάσω στον τοίχο ποτέ και γιατί;

όχι: 40%

ναι: 41%

δεν ξέρω: 19%

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Οι παρατηρήσεις ενός ανθρώπου που μελετά το άπειρο είναι ποικίλες μετά τις απαντήσεις πάνω στο συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο. Σε γενικές γραμμές υπάρχει μια κανονικότητα στις απαντήσεις, χωρίς όμως να λείπουν και κάποια εντυπωσιακά αποτελέσματα που προκάλεσαν ιδιαίτερη αίσθηση. Σταχυολογώντας τα συμπεράσματα που βρέθηκαν, καταρτίστηκε ο παρακάτω πίνακας ποιοτικής και ποσοτικής μελέτης:

1. Το άπειρο για τους περισσότερους ανθρώπους με ποσοστό περίπου 95% αντιπροσωπεύει το άγνωστο ή το πολύ μακρινό.

2. Κατά ποσοστό 70% το άπειρο υπάρχει, αλλά δεν το βλέπουμε. Οι απαντήσεις εδώ έρχονται σε σύγκρουση με τα συμπεράσματα επόμενης ερώτησης ότι το άπειρο είναι πραγματικό (τότε γιατί δεν το βλέπουμε;), επιβεβαιώνοντας τη θέση ότι το άπειρο έχει αμφιλεγόμενη οντολογία.

3. Είναι εντυπωσιακό πως περίπου οι μισοί ερωτώμενοι θεωρούν το άπειρο σύνολο έναντι συμβόλου, κενό ή αριθμού.

4. Επίσης ένας στους τρεις πιστεύει ότι αν αφαιρέσουμε δύο άπειρες ποσότητες παίρνουμε άπειρο, ενώ ένα 10% θεωρεί ότι οι αριθμοί από το 1 έως το 10 είναι πολλαπλάσιοι του απείρου.

5. Μοιρασμένες είναι οι γνώμες σχετικά με τα πολλαπλάσια του 2 και του 5 μεταξύ του ίσου πλήθους και όλων των υπολοίπων απαντήσεων από την άλλη. Επίσης, μοιράζονται και οι απαντήσεις στο ερώτημα με ποιο υλικό φτάνει κανείς στο άπειρο μεταξύ όλων ή τίποτα.

6. Όσον αφορά τώρα στις ερωτήσεις ελεύθερης απάντησης το 40% περίπου απάντησε ως μεγαλύτερο αριθμό το $\square$, ενώ το 15% είπε ότι δεν υπάρχει. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με προηγούμενη ερώτηση, όταν μόνο το 7% δήλωσε πως το $\square$ είναι αριθμός!

7. Το 35% των ερωτηθέντων πιστεύει πως ανάμεσα στο 0,8 και το 1,1 υπάρχουν τρεις αριθμοί, ενώ ένα ποσοστό 15% απάντησε ως μεγαλύτερο αριθμό που είναι μικρότερος από 1, έναν πεπερασμένο αριθμό!

8. Το πρόβλημα στη θέση 14 του ερωτηματολογίου είναι γνωστό ως πρόβλημα του Hilbert, αφού το διατύπωσε ο μεγάλος μαθηματικός στις αρχές του εικοστού αιώνα. Το ένα τρίτο των ερωτηθέντων απάντησε (λανθασμένα κατά Hilbert) πως δεν θα έβρισκε δωμάτιο ο τελευταίος επισκέπτης. Η απάντηση που ο ίδιος ο Hilbert πρότεινε ήταν να

μεταφερθούν όλοι οι ήδη διαμένοντες στο ξενοδοχείο σε ένα δωμάτιο με ακριβώς ένα νούμερο μεγαλύτερο, οπότε να αδειάσει το δωμάτιο νούμερο ένα για τον τελευταίο επισκέπτη.

9. Το πρόβλημα στη θέση 15 είναι μια παραλλαγή του παράδοξου του Ζήγωνα και έτσι όπως επιλέχθηκε να διατυπωθεί, ο άνθρωπος δεν φθάνει ποτέ στον τοίχο, αφού πάντα θα υπολείπεται μία απόσταση που θα έχει επίσης πάντα ένα μέσον. Παρόλα αυτά το 75% των ερωτηθέντων απάντησε ή ότι ο άνθρωπος φθάνει στον τοίχο ή δεν γνωρίζει αν φθάνει στον τοίχο.

10. Τέλος, μια άξια λόγου αναφορά πρέπει να γίνει για τις απαντήσεις των μαθητών της Β' τάξης του Λυκείου. Στο ερωτηματολόγιο απάντησε ένα μέγεθος 60 μαθητών Γ' Λυκείου, 10 καθηγητών και 20 μαθητών Β' Λυκείου. Λόγω της ηλικίας τους, θα περίμενε κανείς η εμπλοκή των μαθητών της δευτέρας λυκείου με το άπειρο ως περιορισμένη, να μην προσθέσει ικανοποιητικά αποτελέσματα για στατιστική μελέτη της έρευνας. Κι όμως λάβαμε μερικές εκπληκτικές απαντήσεις ακριβώς από αυτήν την ομάδα των μαθητών. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εξής τρεις απαντήσεις:

α) στην ερώτηση 6 "το άπειρο είναι..." ένας μαθητής έγραψε με μολύβι μια δική του εκδοχή, πέραν των τεσσάρων που δόθηκαν: "έννοια".

β) στην 7η και 8η ερώτηση περί μεγαλύτερου αριθμού λάβαμε την απάντηση: "θα χρειαστούν πολλές κόλλες χαρτί"!

γ) Στην 9η ερώτηση για το ποιός είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που είναι μικρότερος του 1, μαθητής της Β' Λυκείου απαντάει: $1-1^{-\square}$.

Εντυπωσιακά ευρήματα για Β' Λυκείου, που αποδεικνύουν ότι κάποιοι μαθητές, ακόμη και σε αυτή την περιορισμένης ενασχόλησης με το άπειρο θέση εκφέρουν ώριμες σκέψεις για τον ρόλο του απείρου στην αντίληψή τους για τον κόσμο.

Κλείνοντας, διάχυτη είναι η αίσθηση της έρευνας ότι η ανεύρεση αν το άπειρο είναι δυνητικό ή πραγματικό μεταξύ των ερωτώμενων είναι πολύ δύσκολη. Κι αυτό κυρίως λόγω των αλληλοσυγκρουόμενων απαντήσεων στα προβλήματα που έθεσε το ερωτηματολόγιο. Η μόνο διαπίστωση είναι ίσως πως μέσω των μαθηματικών, η έννοια του απείρου έχει γίνει πιο οικεία ακόμα και μεταξύ των μαθητών αυτών που δεν θα ακολουθήσουν κατεύθυνση με κορμό τα μαθηματικά.

4. ΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4.1. Η προσωπική θέση μας για το άπειρο

Κάθε πνευματικό ον, προικισμένο από τη φύση του με τις αισθήσεις, αντιλαμβάνεται το άπειρο μέσα σε ένα πλαίσιο που η εμπειρία ή η φαντασία του έχει θέσει. Η επιλογή σε πραγματικό ή δυνητικό άπειρο είναι ούτως ή άλλως δύσκολη υπόθεση, πόσο μάλλον αν η προσωπική εμπλοκή του καθενός δεν περιλαμβάνει την έννοια του απείρου στην καθημερινότητά του. Τέλος, η δικαιολόγηση της θέσης αν το άπειρο είναι πραγματικό ή δυνητικό, αριθμεί τουλάχιστον 25 αιώνες προσπαθειών, αποτελώντας και σήμερα σημείο τριβής μεταξύ των επιστημόνων.

Ας προσπαθήσουμε στο πλαίσιο μιας προσωπικής τοποθέτησής μας να πιάσουμε το νήμα από την αρχή ξεκινώντας με το απόσπασμα του John Jones: *«Ένας αριθμός εμφανίζεται σε μια εφαρμογή στην οποία αυτός παράγεται. Οι αριθμοί δεν είναι μεταφερόμενοι μεταξύ των εφαρμογών. Ως εκ τούτου ο μεγαλύτερος αριθμός στη σειρά 1, 2, 3, 4, 5, 6 είναι το 6. Αν νομίζετε ότι αυτή η απάντηση είναι αστείο είναι γιατί δεν κολακεύει τη φουσκωμένη αντίληψή σας των φτωχοποιημένων μαθηματικών εννοιών! Δεν είστε σε θέση να απορρίψετε αυτή τη σκέψη. Αφήστε αυτούς που ασχολούνται με τη θεωρία των συνόλων. Δεν θα τα καταφέρουν»* (J.Jones, sci.math) [94]. Ο R.Mathlener υποστηρίζει ότι η αναπαράσταση του πραγματικού απείρου οδηγεί σε αντινομίες, όπως το παράδοξο του Ζήνωνα, λέγοντας πως είναι δύσκολο για ένα ανθρώπινο ον να καταλάβει το πραγματικό άπειρο. Τα λογικά σχήματα είναι προσαρμοσμένα σε πεπερασμένα αντικείμενα (R.Mathlener, παράδοση στο πανεπιστήμιο της Νότιας Αφρικής) [95]. Δηλαδή το ανθρώπινο μυαλό κινείται σύμφωνα και με τις θέσεις των δύο επιστημόνων μέσα στο πλαίσιο της πεπερασμένης διάστασης που κάθε φορά ο άνθρωπος ανήκει. Εδώ θα ήθελα να αναφέρω την προσωπική μου θέση για το άπειρο που εφάπτεται της θέσης των Jones και Mathlener. Το άπειρο δεν υφίσταται ως έννοια χειροπιαστή, δηλαδή δεν υπάρχει πραγματικό άπειρο, όμως αυτό δε σημαίνει σύμφωνα με την αρχή του Αποκλειόμενου Μέσου ότι είναι και κατ' ανάγκη δυνητικό. Πιστεύω ότι το άπειρο είναι δυνητικό, μόνο αν το υποκείμενο που ενεργεί είναι **εν ζωή!** Δηλαδή θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι το άπειρο είναι εν δυνάμει μόνο αν βρίσκεται ο ίδιος στη ζωή ή η διαδικασία που διαρκεί

άπειρο χρόνο συντελείται από ζωντανούς οργανισμούς ή οι άπειρες επαναληπτικές λειτουργίες είναι δυνατόν να πραγματοποιθούν στον εγκόσμιο βίο του. Ας δώσω ένα παράδειγμα από την τάξη. Πολλοί μαθητές δεν κατανοούν το αποτέλεσμα του ορίου $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$. Πρώτα βάζουμε του μαθητές στη διεργασία να σκεφτούν δύο – τρεις αριθμούς που μικραίνουν ας πούμε $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{2000}$ κ.λπ. (μπορούν να έχουν και κομπιουτεράκι ώστε να δουν ότι $\frac{1}{2} = 0,5$ και $\frac{1}{20} = 0,05$ ενώ $\frac{1}{2000} = 0,0005$. Κατόπιν υπολογίζουμε τους αριθμούς $\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}$, $\frac{1}{(\frac{1}{20})^2}$, $\frac{1}{(\frac{1}{2000})^2}$ είτε με το κομπιουτεράκι $\frac{1}{0,5^2}$, $\frac{1}{0,05^2}$, $\frac{1}{0,005^2}$ είτε για τους πιο καλούς με τις ιδιότητες των κλασμάτων. Και οι δύο ομάδες μαθητών καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα:

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{0,5^2} = 4, \quad \frac{1}{(\frac{1}{20})^2} = \frac{1}{0,05^2} = 400, \quad \frac{1}{(\frac{1}{2000})^2} = \frac{1}{0,005^2} = 4.000.000.$$

Σε αυτό το σημείο υπάρχουν αρκετοί μαθητές που ενώ συμμετέχουν στο παιχνίδι των πράξεων, δεν κατανοούν τη μεγάλη αύξηση του τελικού αποτελέσματος, δηλαδή ότι όταν το x τείνει στο 0, το κλάσμα $\frac{1}{x^2}$ τείνει στο άπειρο. Είχα προσπαθήσει λοιπόν εδώ και πολλά χρόνια να βρω κάτι πιο χειροπιαστό, ένα πιο εύκολο παράδειγμα για εκείνους τους μαθητές που συναντούσαν δυσκολία (γενικότερα αυτό είναι ένα ζητούμενο ειδικά για την τελευταία τάξη στο λύκειο με όλη την ανάλυση μπροστά μας. Ένα παράδειγμα που αντιλαμβάνονται όλοι, σχεδόν και ο τελευταίος μαθητής είναι στο όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, όπου το x του παρονομαστή είναι τα μέλη μιας οικογένειας και το 1 του αριθμητή είναι μια πίτσα. Αν $x = 4$ τότε ο καθένας τρώει $1/4$, αν $x = 40$ σε μία συγκέντρωση τότε ο καθένας τρώει $1/40$ και αν x είναι άπειρο όπως ας πούμε ο πληθυσμός της Αιθιοπίας τότε πόσο τρώει ο καθένας; Με το αστείο αν όχι μακάβριο παράδειγμα με τον κωδικό "ΑΙΘΙΟΠΙΑ", τα παιδιά, που παρεμπιπτόντως δένονται «ψυχολογικά» με αυτού του είδους τα παραδείγματα, αντιλαμβάνονται ότι αν μοιράσουμε μια πίτσα σε άπειρα άτομα, τότε ο καθένας δεν τρώει τίποτε). Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, στην συνέχεια της «Αιθιοπίας», σκέφτηκα το παράδειγμα με το μυρμήγκι.

Ας υποθέσουμε ότι x είναι η ποσότητα της τροφής που τρώει ένα μυρμήγκι καθημερινά. Πόση είναι αυτή; Ένα ψίχουλο στην καλύτερη περίπτωση, μια ποσότητα που είναι σχεδόν 0. Αν το 1 στον αριθμητή είναι ένα καρβέλι ψωμί, τότε το μυρμήγκι πόσες φορές θα φάει από το καρβέλι; Η ανταπόκριση των μαθητών στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι καλύτερη από το αριθμητικό παράδειγμα και έχουμε συμφωνήσει το κλάσμα $\frac{1}{0}$, δηλαδή με παρονομαστές που τείνουν στο 0, με τον κωδικό «ΜΥΡΜΗΓΚΙ» να δίνουν όριο το ∞ . Μέχρι εδώ όλα καλά. Επιστρέφοντας στην εργασία μας, η μερίδα των μαθητών που είχαν καταλάβει το άπειρο όριο με το αριθμητικό παράδειγμα κατατάσσονται στην κατηγορία της πνευματικής διεργασίας του δυνητικού απείρου, αφού για την κατάκτηση της γνώσης ως προσέγγιση ήταν: «όσο μικραίνω τον παρονομαστή, μεγαλώνει το κλάσμα» και με συνεχόμενες επαναλήψεις της ίδιας φόρμουλας προσεγγίζεται σιγά – σιγά το αποτέλεσμα. Η ομάδα της φόρμουλας «ΜΥΡΜΗΓΚΙ» είναι κατά τη γνώμη μου μια κατηγορία που περιλαμβάνει και δυνητικό και πραγματικό άπειρο αφού το αποτέλεσμα που εκμαιεύσαμε από αυτά τα παιδιά δεν είμαστε σίγουροι αν παράγεται είτε με τον ίδιο ή παρόμοιο τρόπο με την προηγούμενη ομάδα (δηλαδή με επαναλαμβανόμενες επαναλήψεις του πειράματος να τρώει το μυρμήγκι όλο και πιο μικρές ποσότητες) είτε με τη διαίσθηση ότι προσφέροντας ένα ολόκληρο καρβέλι σε ένα μυρμηγκάκι που τρώει τόσο λίγο, το άπειρο είναι το άμεσο αποτέλεσμα μιας μόνο σκέψης με τόσο ξεκάθαρο αποτέλεσμα (ίσως μια πρακτική αναλαμπή που δείχνει ότι ίσως μια έννοια πραγματικού απείρου να κρύβεται στην ανθρώπινη φύση).

Όμως πέρα από αυτούς τους προβληματισμούς μεταξύ δυνητικού και υπαρκτού απείρου θέλω να σταθώ σε μια λεπτομέρεια που συνέβη κάποια σχολική χρονική στιγμή. Ο μαθητής δεν καταλάβαινε ούτε με το μυρμήγκι (ούτε βέβαια με τα κλάσματα) και κάπως ενοχλημένος ρωτάει: «Δηλαδή πόσες φορές θα φάει το μυρμήγκι από το καρβέλι; Πέντε, δέκα, είκοσι...;» «Όχι παιδί μου, άπειρες φορές» του απαντάω. «Τι άπειρες φορές κύριε, κάποτε θα πεθάνει». Αυτό ήταν... Σκέφτομαι ότι ο διάλογος αυτός ήταν η αιτία της θέσης που ανέπτυξα πριν και συνεχίζω από εδώ και κάτω. Ο μαθητής είχε δίκιο. Τι να κάνει τα 1.000.000 γεύματα όταν σε όλη του τη ζωή θα φάει 100 με 200 φορές (στο διαδίκτυο μάθαμε ότι η μέση ζωή ενός μυρμηγκιού είναι 45 με 60 ημέρες!). Άρα τρία γεύματα τη μέρα μας κάνουν πλούσια 200 μικροσκοπικά ψίχουλα! Τι νόημα λοιπόν έχει αν το 1 καρβέλι στον αριθμητή έχει διάμετρο 5 πόντους ή 5 μέτρα ή 5 χιλιόμετρα, αφού σε

μερικές δεκάδες ψυχουλάκια το αντικείμενο της εξέτασης του απείρου (το στομάχι του μυρμηγκιού) δε θα υφίσταται. Το άπειρο λοιπόν: α) κατά πάσα πιθανότητα είναι δυνητικό, β) έχει νόημα αν η λειτουργία ή η διαδικασία ή η επανάληψη λαμβάνει χώρα σε έμβιο ον, γ) δεν υπάρχει εκεί ως οντότητα πραγματική και «περιμένει» να το ανακαλύψουμε, δ) μάλλον είναι ανθρώπινη εφεύρεση για να εκφράσει το πολύ μεγάλο, το πολύ μακρινό ή το πολύ μικρό (απειροστό).

Μάλιστα σε μία μεγάλη λίστα ανθρώπων που μελέτησαν το άπειρο ανακαλύπτουμε ότι δεν είμαστε μόνοι μας: «Μπορώ να δω την οπτική γωνία του Kronecker, η οποία λέει ότι ο Cantor εξαρτά τη θεωρία του στην ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων που δεν φαίνεται να υπάρχουν στην πραγματική ζωή (π.χ. τι είναι ένας πραγματικός αριθμός τελικά;). Εάν οι ενάντιοι στον Cantor συμφωνούσαν σε αυτό το επίπεδο, νομίζω ότι θα τασσόμουν ουσιαστικά μαζί τους» (S.Montgomery – Smith, sci.math) [96]. Τέλος, ο μεγάλος της αναλυτικής φιλοσοφίας και της λογικής Ludwig Wittgenstein αναφέρει: «Η μαθηματική λογική έχει παραμορφώσει εντελώς τη σκέψη και των φιλοσόφων, δημιουργώντας μια επιφανειακή ερμηνεία των μορφών της καθημερινής μας γλώσσας ως μια ανάλυση των δομών των γεγονότων [...]. Δεν υπάρχει μονοπάτι στο άπειρο, ούτε καν ένα ατελείωτο μονοπάτι... εντάζει το μονοπάτι πρέπει να είναι ατελείωτο. Αλλά αν είναι ατελείωτο, τότε αυτό ακριβώς σημαίνει ότι δεν μπορείς να το περπατήσεις μέχρι το τέλος. Δεν είναι μόνο αδύνατο «για εμάς τους ανθρώπους» να διατρέξουμε τους φυσικούς αριθμούς ένα προς ένα [...]. Δεν μπορείτε να μιλάτε για όλους τους αριθμούς γιατί δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα: όλοι οι αριθμοί. Η άπειρη σειρά αριθμών είναι μόνο η άπειρη δυνατότητα πεπερασμένων σειρών αριθμών. Εάν γνωρίζουμε για άπειρη επέκταση, τότε θα ήταν εντάξει να μιλήσουμε για πραγματικό άπειρο. Η θεωρία συνόλων είναι λάθος επειδή προϋποθέτει έναν συμβολισμό που δεν υπάρχει» (L.Wittgenstein: Philosophical remarks §123, 124, 126, 144) [9].

4.2. Αποτίμηση - συμπεράσματα της εργασίας

Η εργασία αυτή πραγματεύθηκε τις έριδες που η ενασχόληση με το άπειρο επέφερε σε δύο ιστορικές στιγμές της ανθρώπινης διανόησης: α) την εποχή του Αριστοτέλη και β) την εποχή του G.Cantor. Και οι δύο άφησαν ξεχωριστό αποτύπωμα σχετικά με την πίστη τους για το άπειρο. Ο Αριστοτέλης πίστευε στο δυνητικό άπειρο (εν δυνάμει), εξέθεσε τις απόψεις του στο έργο του τα «Φυσικά», παραθέτοντας τη διαφωνία του κυρίως με τη φιλοσοφική σχολή των Ελεατών.

Ο G.Cantor από την άλλη μεριά πίστευε στο πραγματικό άπειρο, αποτυπώνοντάς το σε διάφορες δημοσιεύσεις πάνω στη συνολοθεωρία και συνάντησε πολύ μεγάλο θαυμασμό αλλά έντονες διαφωνίες με βασικό εκφραστή τον L. Kronecker. Σήμερα και οι αριστοτελικές και οι καντοριανές θέσεις θεωρούνται σημαντικές από μεγάλο μέρος των μαθηματικών, χαίρουν μεγάλης αποδοχής, δεν παύουν όμως να ασκούνται και κριτικές από αυτούς που διαφωνούν ανοικτά. Στο τελευταίο μέρος της εργασίας έγινε παρουσίαση της προσωπικής θέσης του γράφοντος γύρω από το θέμα του απείρου.

Σύμφωνα με τους στόχους που είχαν αρχικά τεθεί η εργασία αυτή εξήγαγε συμπεράσματα που κινήθηκαν σε δύο άξονες:

A. Συμπεράσματα για το επιστημονικό έργο, την τεράστια προσφορά και τη στάση ζωής των δύο μεγάλων δασκάλων, του Αριστοτέλη και του G.Cantor και

B. Συμπεράσματα σχετικά με τον τρόπο αποδοχής του απείρου στα μαθηματικά, δηλαδή αν πρέπει να θεωρείται ως δυνητικό ή πραγματικό. Σημειώνεται ότι υπάρχει και μια υπολογίσιμη ομάδα, που δεν δέχεται καν την ύπαρξη του απείρου.

Σχετικά με το έργο τους (A):

A1. Το βασικό στοιχείο των δύο ανδρών είναι η ξεκάθαρη άποψη πως είχαν κάτι να πουν το **πολύ ξεχωριστό**, που δεν είχε κανένας άλλος μέχρι τότε. Τάραξαν τα νερά της εποχής τους και σταθερή ήταν η προσήλωσή τους στο συγγραφικό τους έργο. Ο Αριστοτέλης κατά τους Αλεξανδρινούς συνέγραψε περί τα 400 βιβλία ενώ σύμφωνα με τον Διογένη τον Λαέρτιο φέρεται να έχει γράψει 445.270 στίχους! Ο Cantor παρ'

όλη την περιπέτεια της υγείας του και τις απανωτές εισαγωγές του στα санаторία, τις περιόδους που ήταν διαφυγής ήταν συγγραφέστατος.

- A2.** Οι αντιδράσεις των υπόλοιπων σύγχρονων τους επί αυτών που είπαν είναι δηλωτικό της σημαντικότητας του έργου τους και της αλλαγής νοοτροπίας της εποχής τους. Είναι συνηθισμένο όμως κάθε φορά που αλλάζει του status quo σε κάποιον τομέα, ο υπαίτιος να δέχεται μεγάλη κριτική.
- A3.** Και οι δύο μεγάλοι της εργασίας διατύπωναν ανοικτά τη διαφωνία τους, δεν κρύβονταν πίσω από άλλους. Ο Αριστοτέλης ίδρυσε σχολή για τη διάδοση των ιδεών του, ο Cantor εκτός των δημοσιεύσεών του έγραψε έναν τεράστιο αριθμό γραμμμάτων βγαίνοντας ανοικτά μπροστά να υπερασπιστεί τη θεωρία του.
- A4.** Ήταν πολύπλευρες προσωπικότητες κάνοντας ταυτόχρονα με το συγγραφικό τους έργο πολλά άλλα πράγματα μαζί. Ο Αριστοτέλης εκτός από τα «Φυσικά» έγραψε για πάρα πολλούς τομείς ακόμα όπως η ηθική, η ψυχή, τα ζώα, ο ουρανός, η φιλοσοφία κ.λπ., ίδρυσε τη σχολή του στην Αθήνα, δε δίστασε να γίνει ο προσωπικός δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου. Ο Cantor έγινε ο βασικός καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Halle, προσπαθούσε να φέρει μαθηματικούς με κύρος στην σχολή αυτή, ίδρυσε και διετέλεσε πρόεδρος της γερμανικής ένωσης μαθηματικών, έδινε διαλέξεις όταν μπορούσε εντός και εκτός Γερμανίας.
- A5.** Είχαν και οι δύο μια πολυτάραχη ζωή με αλλαγή τόπου διαμονής, με αλλαγή παραστάσεων και περιβάλλοντος. Παρ' όλες αυτές τις κοινωνικές αλλαγές έμειναν σταθεροί στο έργο τους.
- A6.** Το πρωτότυπο κείμενο των δύο δημιουργών είναι η πηγή έμπνευσης των υποστηρικτών τους. Είναι μεγάλη η δύναμη που αποπνέει η συγγραφική τους ικανότητα, πράγμα που κανείς αντιλαμβάνεται από την άμεση επαφή με το πρωτότυπο του καθενός. Και τέλος,
- A7.** Ήταν δάσκαλοι και οι δύο. Η διοίκηση της σχολής τους και η διαπαιδαγώγηση των μαθητών τους ήταν το κύριο έργο ζωής των μεγάλων αυτών δασκάλων.

Σχετικά με το άπειρο (B)

- B1.** Η εργασία προσπάθησε να καταδείξει τις **βασικές διαφορές μεταξύ δυνητικού και πραγματικού απείρου**. Αυτό έγινε κατά σειρά προτεραιότητας (α) μελετώντας το πρωτότυπο έργο των δύο μεγάλων συγγραφέων, (β) καταγράφοντας τις αντιδράσεις των βασικών πολέμιών τους και (γ) παρατηρώντας τις θέσεις τρίτων είτε συγχρόνων τους είτε κυρίως μελετητών που εκφράζουν τις σημερινές αντιλήψεις περί του απείρου.
- B2.** Πολλές φορές η διάκρισή δεν είναι εμφανής ανάμεσα στο δυνητικό και πραγματικό άπειρο και αυτό συνάγεται (α) από τις ερευνητικές ομάδες που καταρτίζουν ερωτηματολόγια πάνω στο θέμα και κυρίως (β) από αντιλήψεις μαθηματικών που παίρνουν θέση σήμερα, αποστασιοποιημένοι από τις έριδες της εποχής που διατυπώθηκαν.
- B3.** Το άπειρο εμπλέκεται με τα παράδοξα στο μέγιστο βαθμό αφού (α) ο Αριστοτέλης επιχειρηματολογεί για το δυνητικό άπειρο για να άρει τα παράδοξα του Ζήνωνα και (β) ο Cantor με το πραγματικό άπειρο ήρθε αντιμέτωπος με παράδοξα που γέννησε η θεωρία του.
- B4.** Σήμερα οι απόψεις δίστανται. Η μελέτη έδειξε ότι και οι απόψεις του Αριστοτέλη και του Cantor βρίσκονται πολύ ψηλά σε αποδοχή και αυτό διότι (α) είναι πράγματι απίστευτο πόσοι πολλοί σύγχρονοι μελετητές του Αριστοτέλη υπάρχουν προσπαθώντας να αποδώσουν το αρχαίο κείμενο με σύγχρονους όρους και (β) η σύγχρονη συνολοθεωρία έχει αποδεχθεί τα βασικά συστατικά της θεωρίας συνόλων και πληθαρθμών του Cantor, χωρίς φυσικά να μην σημειώνονται διαφορές.
- B5.** Το ερωτηματολόγιο προς ένα στοχευμένο ακροατήριο, όπως αυτό των μαθητών θα έδειχνε μια τάση, ίσως όχι αντικειμενική αφού το δείγμα είναι μικρό, αλλά σίγουρα μια επικρατούσα τάση που καταγράφεται.
- B6.** Καταγράφεται η δυσκολία εξαγωγής συμπερασμάτων από τις απαιτήσεις των μαθητών στην ανάλυση της τελευταίας τάξης του λυκείου. Πράγματι το αποτέλεσμα για παράδειγμα $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{4} = +\infty$ που απαιτούν οι μαθητές, δεν μπορεί να γνωρίζει ο

καθηγητής – ερευνητής αν είναι αποτέλεσμα δυνητικού ή πραγματικού απείρου, αφού δεν γνωρίζει το ταξίδι της σκέψης του μαθητή μέχρι το αποτέλεσμα. Και τέλος,

B7. Η προσωπική θέση του γράφοντος είναι ένα αποτέλεσμα της συνολικής ενασχόλησής του με τα μαθηματικά της εκπαίδευσης και το όμορφο αυτό ταξίδι του μεταπτυχιακού προγράμματος του ΕΑΠ.

Η θεωρία των συνόλων του Cantor, οι σοβαρές αντιρρήσεις που αυτή έφερε, τα παράδοξα που δημιούργησε στη στροφή του εικοστού αιώνα κλόνισε ανεπανόρθωτα τα θεμέλια των μαθηματικών και οδήγησε στη δημιουργία ανταγωνιστικών ομάδων όσον αφορά τη δομή της αγαπημένης τους επιστήμης: τους λογικιστές, τους ιντουϊσιονιστές και τους φορμαλιστές. Άραγε ο μεγάλος δάσκαλος, ο Αριστοτέλης, σε ποια θα ήταν πιο κοντά, μια ερώτηση που δεν θα απαντηθεί ποτέ.

A.K.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΕΦ. 1

- [1] Mayor Eli (1991): *To Infinity and Beyond*, Princeton University Press.
- [2] Μπαντές Γ. (χ.χ) *Η αξιωματική μέθοδος και η εξέλιξή της (από φυσική σε τυπική)*. Διαθέσιμο στον δικτυακό τόπο [https:// auth. academia.edu/GeorgeMpantes](https://auth.academia.edu/GeorgeMpantes).
- [3] Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π. Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ. και Σιδέρης Π. (2016) *Ευκλείδεια Γεωμετρία* (τεύχος Α') Αθήνα ΙΤΥΕ-Διόφαντος.
- [4] Eves H. (1990). *Foundations and fundamental concepts of mathematics*, PWS-KENT, Publishing Company, Boston.
- [5] Davis D, (2015). *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών*, μετάφραση: Καραγιαννάκης Δημήτρης, Μαγειρόπουλος Μανώλης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

ΚΕΦ. 2

- [6] Μπετσάκος, Β. (2008). *Αριστοτέλης Φυσικά Γ', Δ'*. Εκδόσεις Ζήτρος.
- [7] Κάλφας, Β. (1999). *Αριστοτέλη Περί Φύσεως. Το δεύτερο βιβλίο των Φυσικών*. Αθήνα.
- [8] Heidegger M. (1973) (Einführung in die Metaphysik, 1953) *Εισαγωγή στη Μεταφυσική* (μετ. Χρ. Μαλεβίτσης), Αθήνα.
- [9] Wagner H. (1967) *Aristoteles Physikvorlesung. Übersetzt, eingeleitet und kommentiert*, Berlin.
- [10] Γιανναράς, Χ. (2001). *Σχεδιάσμα Εισαγωγής στη Φιλοσοφία*, Τεύχος Β', εκδόσεις Δόμος.
- [11] Wieland W. (1962). *Die aristotelische Physik. Untersuchungen über die Grundlegung der Naturwissenschaft und die sprachliche Bedingungen der Prinzipienforschung bei Aristoteles*, Göttingen.
- [12] Αναπολιτάνος Δ.Α. (1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Κεφ. «Οι έννοιες του απείρου και του συνεχούς στον Αριστοτέλη», Αθήνα.
- [13] Σιάσος, Λ. (1989). *Η διαλεκτική στη φανέρωση της φύσης. Μελέτη στα Φυσικά του Αριστοτέλη*. Θεσσαλονίκη.
- [14] Ross W.D. (Aristotle, 1923¹, 1953⁵) *Αριστοτέλης* (μετ. Μ. Μητσού), εκδόσεις Παπαευστρατίου, Αθήνα 2001³.
- [15] Bostock D. (1991). «Aristotle on Continuity in Physics VI», στο L. Judson, *Aristotle's Physics. A Collection of Essays*, Oxford.
- [16] Lear J. (1979-1980) «Aristotelian Infinity», *Proceedings of the Aristotelian Society*, NewSeries 80.
- [17] Κουρεμένος Θ. (1995), *Aristotle on Mathematical Infinity*, Stuttgart.
- [18] Adler M., (1996). (Aristotle for everybody. Difficult Thought Made Easy, 1978) *Ο Αριστοτέλης για όλους. Δύσκολος στοχασμός σε απλοποιημένη μορφή* (μετ. Π. Κοτζιά), Αθήνα.
- [19] Παπαευστρατίου Ν. (1999). *Από την κίνηση στο χρόνο. Διερεύνηση της έννοιας του χρόνου στη φιλοσοφία του Αριστοτέλη*, δ.δ., Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

- [20] Sandowsky, L., (2005). «From Space and Time to the Spacing of Temporal Articulation: A phenomenological re-run of Achilles and the tortoise», *Existential: An International Journal of Philosophy*, 15.
- [21] Andrew G. (2007), *The Birth of Science*, Cambridge 2001), *Εύρηκα. Η ανακάλυψη της επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα*, μετ. Αιμ. Μαυρουδής, Θεσσαλονίκη.
- [22] Σφενδόνη-Μέντζου Δ. (2010). *Ο Αριστοτέλης σήμερα. Πτυχές της Αριστοτελικής Φυσικής Φιλοσοφίας υπό το πρίσμα της σύγχρονης επιστήμης*. Θεσσαλονίκη.
- [23] Ossborne C. (2004) *Presocratic Philosophy*, Oxford.
- [24] Graham D.W. (1988) «Aristotle's Definition of Motion», *Ancient Philosophy* 8.
- [25] During I. (1999). (*Aristoteles, Darstellung und Interpretation seines Denkens*, 1966) *Ο Αριστοτέλης, Παρουσίαση και έρμηνεία της σκέψης του*, Α' τομ. (μετ. Π. Κοτζιά) και Β' τόμ. (μετ. Α. Γεωργίου-Κατσιβέλα), Αθήνα.
- [26] Gill M.L. (1991) «Aristotle on Self-Motion», στο L. Judson, *Aristotle's Physics. A Collection Of Essays*, Oxford.

ΚΕΦ. 3

- [27] Muchenheim W., (2006). "Die Mathematik des Unendlichen", Shaker-Verlag, Aachen.
- [28] Mancosu P. (1999). "Philosophy of Mathematics and mathematical practice in the 17th century", *Oxford Univ. Press, Oxford*.
- [29] Mirahmadi S. S. (2013). *Qom Seminar*, Qom, Iran (September 2013).
- [30] Clark P.L. (2010). "Physicists can be wrong" tea. Math Overflow, 2 Ιουλίου 2010.
- [31] Muchenheim W. (2018). "Transfinity, A Source Book" 31 Okt. 2018.
- [32] Nelson Ed. (2007). "Hilbert's mistake", (paper).
- [33] Cantor G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin.
- [34] Cantor G. (1966). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo (ed.) Olms, Hildesheim.
- [35] Hansen C.S. (2014). "Constructivism without verificationism", Doctoral Thesis, Univ. of Aberdeem.
- [36] Fullerton G.S. (1887). "The conception of the infinite and the solution of the mathematical antinomies: A study in psychological analysis", Lippintott, Philadelphia.
- [37] Stockbauer D. in "Update Objections to Cantor's theory", sch. math (18 Aug. 2005).
- [38] Seaman D. in "How big is infinity?", sci. math (24 Aug. 2006).
- [39] Manin Y.I. "Georg Cantor and his heritage", ar Xiv (2002).
- [40] Cantor G.(1954). "Contribution to the founding of the theory of transfinite numbers" translated and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain, New York, Dorer Publications, inc, 1 Oct. 1954.
- [41] Hehner E.C.R.: "The size of a set" (3 Apr. 2013).
- [42] Bauer A. in "Set theory and model theory", Math Overflow (30 Apr. 2010).
- [43] Boucher A.: "Cantor and infinite size", sch. math (22 May 1999).
- [44] Banyal A.S. in "Does actual infinity exist?", Research Gate (26 Aug. 2012).

- [45] Peregrin J. (1997). "Structure and meaning", *Semiotica* 113.
- [46] Borel E. (1905). Γράμμα στον J. Hadamard.
- [47] Easterly R.: "How big is infinity?", sci. math. (26 Aug. 2006).
- [48] Vallicella B.: "On potential and actual infinity", *Maverick Philosopher* (4 Aug. 2010).
- [49] Sharon J. N.: "Infinite Nonsense 2: Cantor" (1 Sep. 2016) link expired.
- [50] Foster T.: "The axioms of set theory", www.dpmms.cam.ac.uk (4-3-2019).
- [51] Slater H. (2004). "The Uniform Solution of the Paradoxes", www.philosophy.uwa.edu.au.
- [52] Arthur R. (2001). "Leibniz and Cantor on the actual infinite".
- [53] Cantor G.: "Über ein elementare Frage der Mannigfaltigkeitlehre", *Deutsche Matimatiker Vereinigung, Bib 1*, 1830-1, σελ. 75-78.
- [54] Pulmer D. G. in "Cantor and infinite size", sci. math. (28 May 1999).
- [55] Welch C.: "Cantor's diagonal proof wrong?", sch. math. (14 Nov.2004).
- [56] Dell' Aqua P.: "A note on Cantor's diagonal argument" Research Gate (Jan 2016).
- [57] Anand B.S.: "Three beliefs that lend illusory legimacy to Cantor's diagonal argument" ar. Xir (2003).
- [58] Benschop N. in "Why Cantor was wrong", sci. math (20 Jul. 1999).
- [59] Osborn R. in "The infinite, Part 6, Mathematics, physics and religion in the 19th century", by Common Consent (18 Jan. 2012).
- [60] Cantor G., γράμμα προς τον C.F.Herman, 28 Ιουλίου 1887.
- [61] Cantor G., γράμμα προς τον C.F.Herman, 2 Ιουνίου 1888.
- [62] Feferman S. (1998). "In the light of logic" New York, Oxford University Press.
- [63] Kowolewski G.(1950). "Bestand und Wandel", Munchen.
- [64] Patterson S.: "Cantor was wrong. There are no infinite sets" (20 Jul. 2016).
- [65] Lewis K.A. in "Objections to Cantor:s theory (wikipedia article)", sci. math. (19 July 2005).
- [66] Konig J.(1905). "Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem", *Math Annalen*, 61.
- [67] Du Bois N. in "Why Cantor was wrong" sci.math (19 July 1999).
- [68] Green E. in "Shannon defeats Cantor = single infinity type". sci.math (10 Dec 2003).
- [69] James C.III: "Refutation of Cantor's diagonal argument" viXra (2017).
- [70] Kline M.: "Mathematics: The loss of certainty". Oxford University Press (1980)
- [71] Massey R. in "Cantor's transfinite numbers", sci.math (3 Nov 1996).
- [72] Turchin V.E.: "Infinity", Principia Cybernetica Web (Sep 1991).
- [73] Kronecker L. (2001) "Aber den Begriff der Zahl in der Mathematik", Public lecture in summer semester 1891 at Berlin – Kronecker's last lecture. "Sur le concept de nombre en mathematique" Retranscrit et commenté par Jacqueline Boniface et Norbert Schappacher: *Revue d'histoire des mathématiques* 7.
- [74] Kronecker L. in K. Hensel (ed.): "Leopold Kroneckers Werke" III, Teubner, Leipzig (1895-1931).

- [75] Belaga E. (2011). *"From traditional set theory - that of Cantor, Hilbert, Cohen - to its necessary quantum extension"* IHES/M/11/18.
- [76] Fletcher P.(1998). *"Truth, proof and infinity"*, Springer.
- [77] Mascaros P. in *"Infinity: does it exist?"* You Tube (28 Sep. 2014).
- [78] Kellner J. *"Pitowsky's kolmogorovian models and super-determinism"*, ar. Xir (2016).
- [79] Kolmogorov A.N. (1929). *"Modern debates on the nature of mathematics"*, Nquchae Slovo 6.
- [80] Skolem T.(1922). *"Some remarks on axiomatized set theory"* quoted in J. van Heijenoort: *"From Frege to Godel - A Source book in mathematical logic, 1879-1931"*, Harv. Univ. Press, Camb., Mo 155(127).
- [81] Kline M.(1980). *"Mathematics: The loss of certainty"*, Oxford University Press (1980).
- [82] Bell E.T. *Men of Mathematics*, Νέα Υόρκη: Simon and Schuster, 1937. [Ελλ. έκδ.: Οι μαθηματικοί τόμοι 1,2, μτφρ. Μανόλης Μαγειρόπουλος, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001 (τόμος 1), 2007 (τόμος 2).]
- [83] Jervel H. R. (1996) *"From the Axiom of Choice to Choice Sequences"*. *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1/1.
- [84] Fraenkel A. (1923). *"Einleitung in die Mengenlehre"* 2nd ed., Springer, Berlin.
- [85] Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Lerg A. (1973). *"Foundations of set theory"* 2nd ed. Elsevier, Amsterdam.
- [86] Van Bendegem J. P. (1999). *"Why the largest number imaginable is still a finite number"*, *Logique et Analyse* 165-166.
- [87] Cohen P.J. (2002). *"The discovery of forcing"*, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 32, 4.
- [88] Godel K. (1940). *"The consistency of the continuum - hypothesis"*, Princeton University Press, Princeton.
- [89] Cohen P.J. (1963). *"The Independence of the continuum hypothesis"*, Proc. Not. Acord. Sciences, USA 50.
- [90] Meschkowski H. (1983). *"Georg Cantor: Leben, Werk und Winkung"* 2nd ed. Bibl. Inst., Mannheim.
- [91] Mostowski A. (1987). *"Recent results in set theory"* in A. Heyting et al. *"Studies in logic and the foundations of mathematics"*, North Holland, Amsterdam.
- [92] Costa - Leite A. in *"Ten Questions about intuitionism"* intuitionism.org (2006).
- [93] E. Zermelo (1908). : *"Untersachungen uber die Grundlagen der Mengenlehre I"* Math. Ann. 65 .

ΚΕΦ. 4

- [94] Jones J. in *"How big is infinity?"* sci. math. (24 Aug. 2006).
- [95] Mathleher R. (2008). *"Die Problematik van die Begrip Oneindigheid"*, Dissertation, Univ. van Suid -Afrika.
- [96] Montgomery - Smith S. in *"Objections to Cantor's theory"* (wikipedia article), sci. math. (19 Jul. 2005).

[97] Wittgenstein L. (1978). *"Philosophical remarks"*, § 123, 124, 126, 144, Wiley-Blackwell.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

- Τα Σχήματα **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11** είναι από το βιβλίο:
Mayor Eli (1991): *To Infinity and Beyond*, *Princeton University Press*.
- Το Σχήμα **12** είναι από το βιβλίο:
Davis D, (2015). *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών*, μετάφραση: Καραγιαννάκης Δημήτρης, Μαγειρόπουλος Μανώλης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τα Σχήματα **13, 14, 15, 16** έχουν αντληθεί από το διαδίκτυο.
- Το Σχήμα **17** είναι από το βιβλίο:
Muchenheim W. (2018). *"Transfinity, A Source Book"* 31 Okt. 2018.
- Το Σχήμα **18** είναι από το βιβλίο:
Feferman, S. (1998). *"In the light of logic"*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.