

ΓΕΝΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. ΘΕΩΡΙΑ
(από το ΑΣΚΙΣΟΠΟΛΙΣ)

1. Σύνολα

1. Τι είναι το σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο. Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου. Τα σύνολα συνήθως τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή Λατινικού αλφαβήτου.

2. Ποιοι είναι οι βασικοί τρόποι παράστασης συνόλων και τι γνωρίζετε γι αυτούς;

Τα σύνολα παριστάνονται με αναγραφή ή περιγραφή.

- Παράσταση με **αναγραφή** έχουμε μεταξύ δύο αγκίστρων όλα τα στοιχεία αναλυτικά τα στοιχεία του συνόλου. Για παράδειγμα το σύνολο A που περιέχει τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5 γράφεται:

$$A = \{0,1,2,3,4,5\}.$$

Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται συνήθως όταν τα στοιχεία του συνόλου είναι σχετικά λίγα.

- Παράσταση με **περιγραφή** έχουμε όταν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα το σύνολο B των ακεραίων από το 1 έως το 100, γράφεται: $B = \{x \in \mathbb{Z} / 1 \leq x \leq 100\}$

3. Πότε δύο σύνολα είναι ίσα;

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Γράφουμε $A = B$.

4. Πότε ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B ;

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Γράφουμε $A \subseteq B$.

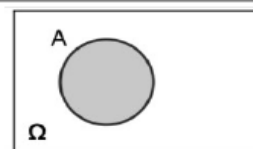
5. Ποιο σύνολο λέγεται κενό;

Ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία, λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\{\}$ ή $\emptyset$. Για παράδειγμα το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\}$. Επειδή η εξίσωση $x^2 = -1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, το A δεν έχει κανένα στοιχείο, άρα $A = \emptyset$.

Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου A , δηλαδή $\emptyset \subseteq A$.

6. Τι είναι τα διαγράμματα Venn;

Τα διαγράμματα Venn είναι μία εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων. Το βασικό σύνολο Ω συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου. Κάθε υποσύνολο του βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης.

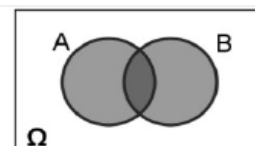


Πράξεις συνόλων

7. Ποιο σύνολο λέγεται ένωση δύο συνόλων A, B ;

Ένωση δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα A και B . Συμβολίζεται με $A \cup B$.

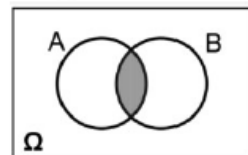
Δηλαδή $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$.



8. Ποιο σύνολο λέγεται τομή των συνόλων A,B;

Τομή δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν ταυτόχρονα και στα δύο σύνολα A και B. Δηλαδή στην τομή των A και B ανήκουν τα κοινά τους στοιχεία. Συμβολίζεται με $A \cap B$.

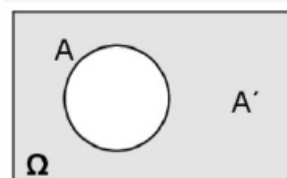
$$\text{Δηλαδή } A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$$



9. Ποιο σύνολο λέγεται συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Omega;

Συμπλήρωμα ενός συνόλου A λέγεται το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του Omega που δεν ανήκουν στο A. Συμβολίζεται με A' .

$$\text{Δηλαδή } A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$$



2. Πραγματικοί αριθμοί

α. Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους

10. Ποιος αριθμός ονομάζεται ρητός και ποιος άρρητος;

Ρητός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι α και β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$.

Οι αριθμοί που δεν γράφονται στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι α και β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$, λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

11. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών;

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Συμμετρικό στοιχείο (αντίθετος- αντίστροφος)	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	

12. Τι ονομάζεται δύναμη α^v με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη τον φυσικό αριθμό $v > 1$;

Δύναμη α^v με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη τον φυσικό αριθμό $v > 1$, είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με το α. Δηλαδή: $\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_v \text{ παράγοντες}$

Ακόμη ορίζουμε ότι: $\alpha^1 = \alpha$ και με $\alpha \neq 0$: $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$.

13. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ιδιότητες δυνάμεων:

$$\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \dots\dots\dots \quad \alpha^{\kappa} : \alpha^{\lambda} = \dots\dots\dots \quad \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = \dots\dots\dots \quad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \dots\dots\dots \quad (\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}, \quad \alpha^{\kappa} : \beta^{\kappa} = (\alpha : \beta)^{\kappa}, \quad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}, \quad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}, \quad (\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$$

14. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\begin{array}{llll} (\alpha + \beta)^2 = \dots & (\alpha - \beta)^2 = \dots & \alpha^2 - \beta^2 = \dots & (\alpha + \beta)^3 = \dots \\ (\alpha - \beta)^3 = \dots & \alpha^3 + \beta^3 = \dots & \alpha^3 - \beta^3 = \dots & (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 & (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 & \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & & (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) & & \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma & & \end{array}$$

15. Να γράψετε τις ιδιότητες των αναλογιών που απορρέουν από την ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \beta\delta(\beta + \delta) \neq 0.$$

- i. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, \quad \beta\delta \neq 0$ ii. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}, \quad \beta\gamma\delta \neq 0$
- iii. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}, \quad \beta\delta \neq 0$ iv. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta + \alpha} = \frac{\gamma}{\delta + \gamma}, \quad \beta\delta(\beta + \alpha)(\delta + \gamma) \neq 0$
- v. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}, \quad \beta\delta(\beta + \delta) \neq 0$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

β. Διάταξη πραγματικών αριθμών

16. Πότε ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β;

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$.

17. Αν δύο αριθμοί α, β είναι ομόσημοι τότε τι συμπεραίνετε για το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο τους;

Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός και το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός. Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

18. Αν δύο αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι τότε τι συμπεραίνετε για το γινόμενο και το πηλίκο τους;

Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

19. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha^2 \dots 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\alpha^2 \geq 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

20. Να αποδείξετε ότι για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$$

Ευθύ: Έστω $\alpha = \beta$. Τότε από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει ότι $\alpha^n = \beta^n$.

Αντίστροφο: Έστω ότι $\alpha^n = \beta^n$ και $\alpha \neq \beta$, τότε:

Αν $\alpha > \beta$ θα είναι $\alpha^n > \beta^n$ άτοπο και

αν $\alpha < \beta$ θα είναι $\alpha^n < \beta^n$ που είναι επίσης άτοπο. Άρα $\alpha = \beta$.

21. Τι ονομάζεται κλειστό και τι ανοικτό διάστημα από το a μέχρι το b και πως συμβολίζεται;

Κλειστό διάστημα από το a μέχρι το b λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a \leq x \leq b$ και συμβολίζεται με $[a, b]$.

Ανοικτό διάστημα από το a μέχρι το b λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a < x < b$ και συμβολίζεται με (a, b) .

γ. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

22. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α;

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|α|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|α| = \begin{cases} α, & α \geq 0 \\ -α, & α < 0 \end{cases}$$

Ασκησίοπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

23. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις με τα σύμβολα $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$:

$|α| \dots |-α| \dots 0$

$|α| \dots α \text{ και } |α| \dots -α$

$|α|^2 \dots α^2$

Είναι $|α| = |-α| \geq 0$, $|α| \geq α$ και $|α| \geq -α$, $|α|^2 = α^2$

24. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις

Αν $θ > 0$, τότε $|x| = θ \Leftrightarrow \dots$ και $|x| = |α| \Leftrightarrow \dots$

Είναι $|x| = θ \Leftrightarrow x = \pm θ$ και $|x| = |α| \Leftrightarrow x = \pm α$

25. Να αποδείξετε ότι: α) $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ β) $\left| \frac{α}{β} \right| = \frac{|α|}{|β|}$

α) Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|α \cdot β| = |α| \cdot |β| \Leftrightarrow |α \cdot β|^2 = (|α| \cdot |β|)^2 \Leftrightarrow (α \cdot β)^2 = |α|^2 \cdot |β|^2 \Leftrightarrow α^2 \cdot β^2 = α^2 \cdot β^2 \text{ ισχύει}$$

β) Αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

26. Να αποδείξετε ότι: $|α + β| \leq |α| + |β|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|α + β| \leq |α| + |β|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

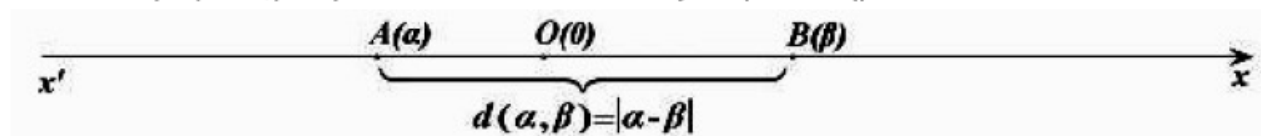
$$|α + β| \leq |α| + |β| \Leftrightarrow |α + β|^2 \leq (|α| + |β|)^2 \Leftrightarrow (α + β)^2 \leq |α|^2 + 2|α||β| + |β|^2 \Leftrightarrow$$

$$α^2 + 2αβ + β^2 \leq α^2 + 2|α||β| + β^2 \Leftrightarrow 2αβ \leq 2|α||β| \Leftrightarrow |αβ| \geq αβ \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $|αβ| = αβ$ ισχύει μόνο αν $αβ \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

27. Τι ονομάζεται απόσταση δύο αριθμών α, β, πως συμβολίζεται και με τι είναι ίση;

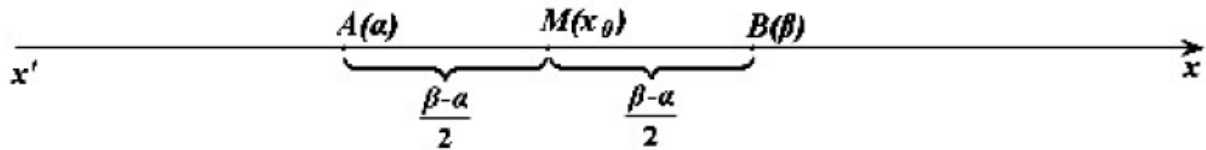
Έστω ότι οι αριθμοί α, β παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β.



Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(α, β)$ και είναι ίση με $|α - β|$. Δηλαδή $d(α, β) = |α - β|$.

28. Έστω ότι τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α, β του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

Αν $M(x_0)$ το μέσο AB, να αποδείξετε ότι $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



$$\begin{aligned} \text{Είναι } (MA) &= (MB) \Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta) \Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta| \Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0 \text{ (αφού } \alpha < x_0 < \beta) \Leftrightarrow \\ 2x_0 &= \alpha + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

29. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow \dots$ και $|x| < \rho \Leftrightarrow \dots$

Για $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ ισχύει: $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow \dots$ και $|x| > \rho \Leftrightarrow \dots$

$$\text{Είναι } |x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty) \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho.$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

δ. Ρίζες πραγματικών αριθμών

30. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a ;

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον a .

Δηλαδή αν $a \geq 0$, η $\sqrt{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

31. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\sqrt{a^2} = \dots, \quad (\sqrt{a})^2 = \dots, \quad a \geq 0, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \dots, \quad a, b \geq 0, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dots, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

32. Τι ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a ;

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει το a .

Δηλαδή αν $a \geq 0$, η $\sqrt[n]{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$.

33. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \dots, \quad a \geq 0, \quad \sqrt[n]{a^n} = \dots, \quad a \geq 0, \quad \sqrt[n]{a^n} = \dots, \quad a \leq 0 \text{ και } n \text{ άρτιος}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad a \geq 0, \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad a \geq 0, \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad a \leq 0 \text{ και } n \text{ άρτιος}$$

34. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι:

i. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$

ii. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}, \beta \neq 0$

iii. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n \cdot m]{\alpha}$

iv. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[n \cdot p]{\alpha^{\mu}}$

i. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta})^n \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$ ισχύει

ii. Αποδεικνύεται όπως και το i.

iii. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n \cdot m]{\alpha} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}})^{n \cdot m} = (\sqrt[n \cdot m]{\alpha})^{n \cdot m} \Leftrightarrow \left[(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}})^m \right]^n = \alpha \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ ισχύει

iv. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[n \cdot p]{\sqrt[n]{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[n \cdot p]{(\alpha^{\mu})^p} = \sqrt[n \cdot p]{\alpha^{\mu \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{\alpha^{\mu}}$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

35. Πως ορίζεται η δύναμη του μη αρνητικού αριθμού a σε ρητό εκθέτη;

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε $\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}$

Αν $\alpha = 0$, μ, n θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{n}} = 0$.

3. Εξισώσεις

α. Εξισώσεις 1ου Βαθμού

36. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ για τις διαφορετικές τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Είναι: $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε: $\alpha x = -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0 \cdot x = -\beta$
 - αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, ενώ
 - αν $\beta = 0$ η εξίσωση έχει τη μορφή $0 \cdot x = 0$ και αληθεύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x , δηλαδή είναι ταυτότητα.

37. Ποιος αριθμός λέγεται ρίζα μιας εξίσωσης;

Η λύση μιας εξίσωσης λέγεται και ρίζα της.

38. Πότε μια εξίσωση 1ου βαθμού λέγεται παραμετρική και πως ονομάζεται η διαδικασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της;

Αν οι συντελεστές a και b της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων τότε τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

β. Η εξίσωση $x^v = \alpha$

39. Να λύσετε την εξίσωση $x^v = \alpha$.

$$\text{Αν } v \text{ άρτιος και } \alpha \geq 0 \text{ τότε: } x^v = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt[v]{\alpha} \\ x = -\sqrt[v]{\alpha} \end{cases}$$

Αν v άρτιος και $\alpha < 0$, τότε η εξίσωση $x^v = \alpha$ είναι αδύνατη

$$\text{Αν } v \text{ περιττός και } \alpha \geq 0 \text{ τότε: } x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{\alpha}$$

$$\text{Αν } v \text{ περιττός και } \alpha < 0 \text{ τότε: } x^v = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{|\alpha|}$$

γ. Εξισώσεις 2ου βαθμού

40. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Ασκησούπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

$$\text{Έστω } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma, \text{ τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: } \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (1)$$

$$\text{Αν } \Delta > 0 \text{ τότε η (1) γίνεται: } x + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \text{ δηλαδή η εξίσωση}$$

$$\text{έχει δύο λύσεις τις } x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

Αν $\Delta = 0$ η (1) γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}\right) \text{ ή } \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$

Στη περίπτωση αυτή η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Τέλος αν $\Delta < 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη άρα και η ισοδύναμή της, η αρχική, είναι αδύνατη.

41. Να αποδείξετε τους τύπους του Vieta, δηλαδή ότι αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, τότε το άθροισμα των ριζών είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha}$, το γινόμενο των ριζών

είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

$$\text{Είναι } x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}. \text{ Άρα } S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

$$\text{Η εξίσωση } \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ γίνεται: } x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

4. Ανισώσεις

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

α. Ανισώσεις 1ου βαθμού

42. Να λύσετε την ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$.

Είναι: $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$

Αν $\alpha > 0$, τότε: $\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} > -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$, ενώ αν $\alpha < 0$, τότε: $\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0 \cdot x > -\beta$ και

αν $\beta \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ αν $\beta < 0$ είναι αδύνατη.

β. Ανισώσεις 2ου βαθμού

43. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ για τις διαφορετικές τιμές της διακρίνουσας Δ .

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left[x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = \\ &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right]\end{aligned}$$

Αν $\Delta > 0$, τότε $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ και το τριώνυμο γίνεται:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right)^2 \right] = \\ &= \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \alpha \left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \\ &= \alpha (x - x_1)(x - x_2), \text{ όπου } x_1, x_2 \text{ οι ρίζες του τριωνύμου.}\end{aligned}$$

Αν $\Delta = 0$, τότε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$ και

αν $\Delta < 0$, τότε $-\Delta = |\Delta|$ και το τριώνυμο γράφεται $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$

44. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ όταν $\Delta > 0$.

Είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - x_1)(x - x_2)$ (1).

Εστω $x_1 < x_2$

Αν $x < x_1 < x_2$ τότε $x - x_1 < 0$, $x - x_2 < 0$ και $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, οπότε λόγω της (1) το τριώνυμο είναι ομόσημο του α .

Αν $x_1 < x < x_2$ τότε $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$ και $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, οπότε λόγω της (1) το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α .

Αν $x_1 < x_2 < x$ τότε $x - x_1 > 0$, $x - x_2 > 0$ και $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, οπότε λόγω της (1) το τριώνυμο είναι ομόσημο του α .

45. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ όταν $\Delta = 0$.

$$\text{Είναι } \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

Ασκηόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Για κάθε $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 > 0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α , ενώ μηδενίζεται για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

46. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ όταν $\Delta < 0$.

$$\text{Είναι } \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right].$$

Επειδή η παράσταση στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

47. Πότε ένα τριώνυμο είναι ετερόσημο του α , μηδέν και πότε ομόσημο του α ;

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι:

Ετερόσημο του α , μόνο όταν $\Delta > 0$ για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του.

Μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

Ομόσημο του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

5. Πρόοδοι

α. Ακολουθίες

48. Τι ονομάζεται ακολουθία; Τι λέγεται πρώτος όρος, τι δεύτερος και τι n -οστός ή γενικός της όρος;

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_1 , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός n καλείται n -οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με α_n . Δηλαδή, $1 \rightarrow \alpha_1$, $2 \rightarrow \alpha_2$, $3 \rightarrow \alpha_3$, ..., $n \rightarrow \alpha_n$, ... Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_n) .

49. Πως ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά;

Για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά απαιτείται να γνωρίζουμε:

- Τον αναδρομικό της τύπο και
- Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

β. Αριθμητική πρόοδος

50. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος; Ποιος είναι ο αναδρομικός της τύπος;

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Αν ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου, τότε ο αναδρομικός της τύπος είναι $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega$.

51. Να αποδείξετε ότι $v_{\text{oς}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$.

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$

.....

$$\alpha_{v-1} = \alpha_{v-2} + \omega$$

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} + \omega$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Προσθέτοντας κατά μέλη της v αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, έχουμε:
 $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$.

52. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Πως ονομάζεται ο β ;

Επειδή οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει ότι: $\beta - \alpha = \omega$ και $\gamma - \beta = \omega$ άρα

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Αντίστροφα τώρα. Αν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ τότε $2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$ που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ .

γ. Γεωμετρική πρόοδος

53. Ποια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος; Τι είναι ο λόγος της προόδου; Ποιος είναι ο αναδρομικός της τύπος;

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε λόγο της προόδου. Με βάση τον ορισμό, ο αναδρομικός τύπος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_{v+1} = \lambda \cdot \alpha_v$$

54. Να αποδείξετε ότι n ος όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}.$$

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 \cdot \lambda$$

.....

$$\alpha_{v-1} = \alpha_{v-2} \cdot \lambda$$

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} \cdot \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη της n αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, έχουμε: $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

55. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$. Ποιός αριθμός ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α , γ ;

Έστω λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, τότε: $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$.

Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α , γ .

ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

Α) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ:

$$S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v).$$

Β) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

$$S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}.$$

6. Συναρτήσεις

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

α. Η Έννοια της Συνάρτησης

58. Τι ονομάζεται συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B; Πως ονομάζεται το σύνολο A;

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B. Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

59. Στη συνάρτηση $y = f(x)$ ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή; Ποιο σύνολο ονομάζεται σύνολο τιμών της συνάρτησης f; Πως συμβολίζεται;

Το γράμμα x που παριστάνει οποιαδήποτε στοιχείο του A λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές μιας συνάρτησης f για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

60. Ποιες συναρτήσεις λέγονται πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και πως συμβολίζονται;

Αν σε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

β. Γραφική παράσταση Συνάρτησης

61. Τι ονομάζεται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και πως συμβολίζεται; Ποιο επίπεδο λέγεται καρτεσιανό; Ποιο σύστημα συντεταγμένων λέγεται ορθοκανονικό; Πως ονομάζονται οι άξονες;

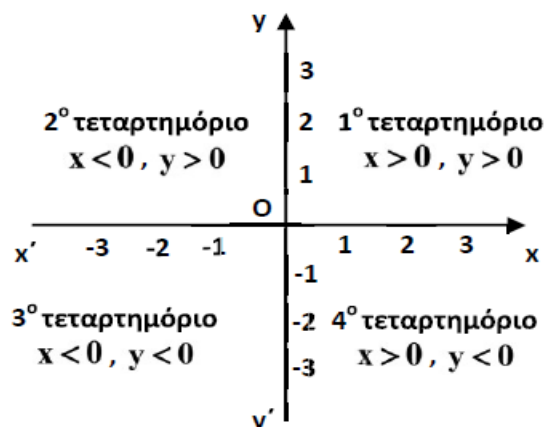
Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται ένα ζεύγος κάθετων αξόνων $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O. Συμβολίζεται με Oxy. Το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό λέγεται καρτεσιανό επίπεδο. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό. Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ καλείται άξονας των τετμημένων ή άξονας των x και ο κατακόρυφος άξονας $y'y$ καλείται άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y.

62. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται συντεταγμένες ενός σημείου M;

Σε κάθε σημείο M του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζευγάρι (x,y) πραγματικών αριθμών που ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου M. Το σημείο συμβολίζεται με $M(x,y)$. Το x λέγεται τετμημένη και το y τεταγμένη του σημείου M.

63. Τι είναι τα τεταρτημόρια και τι πρόσημο έχουν οι συντεταγμένες σε αυτά;

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη καθένα που ονομάζονται **τεταρτημόρια** και διακρίνονται σε 1°, 2°, 3°, 4°. Το πρόσημο των συντεταγμένων κάθε σημείου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

64. Οι συντεταγμένες των σημείων των αξόνων τι μορφής είναι;

Τα σημεία του άξονα $x'x$ και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη μηδέν ($y = 0$), δηλαδή τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν συντεταγμένες της μορφής $(x, 0)$.

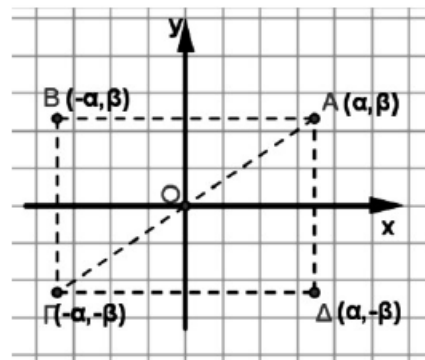
Τα σημεία του άξονα $y'y$ και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη μηδέν ($x = 0$), δηλαδή τα σημεία του άξονα $y'y$ έχουν συντεταγμένες της μορφής $(0, y)$.

65. Αν $A(\alpha, \beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες των συμμετρικών του A , ως προς τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$, την αρχή O των αξόνων κάνοντας κατάλληλο σχήμα.

Το σημείο $B(-\alpha, \beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $y'y$. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τεταγμένες.

Το σημείο $\Delta(\alpha, -\beta)$ είναι το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $x'x$. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τεταγμένες.

Το σημείο $\Gamma(-\alpha, -\beta)$ είναι το συμμετρικό του A ως προς την αρχή O των αξόνων. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων έχουν αντίθετες συντεταγμένες.



66. Αν $A(\alpha, \beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων κάνοντας κατάλληλο σχήμα.

Το σημείο $A'(\beta, \alpha)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha, \beta)$ ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων «εναλλάσσουν» τις συντεταγμένες τους.



67. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy , να αποδείξετε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο: $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

68. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση συνάρτησης; Πότε ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ;

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$, ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , αν και μόνο αν $f(\alpha) = \beta$.

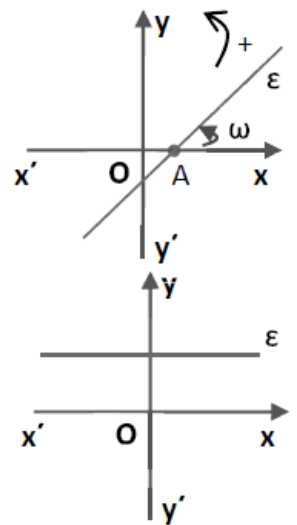
γ. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

69. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ και ποιες τιμές παίρνει;

Έστω ότι μια ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο A .
Η γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , αν στραφεί κατά την θετική φορά γύρω από το A μέχρι να συμπίψει με την ε , ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. Ισχύει ότι $0^\circ < \omega < 180^\circ$.

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον $x'x$, τότε η γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$, είναι ίση με 0° .

Άρα γενικά για την γωνία ω , ισχύει ότι: $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.



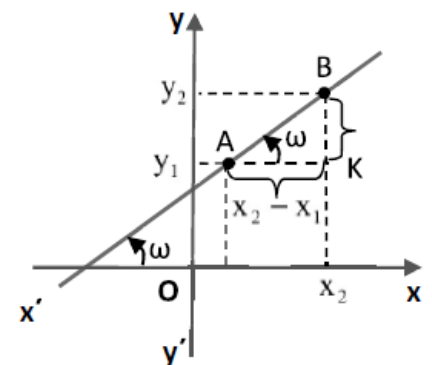
70. Τι ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας; Τι γνωρίζετε για τις τιμές του;

Ο συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ε είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$ και συμβολίζεται με λ_ε ή λ . Αν η γωνία ω είναι οξεία ο συντελεστής διεύθυνσης είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία είναι αρνητικός και αν η γωνία είναι 0° τότε είναι 0.

71. Να αποδείξετε ότι αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ τότε συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δίνεται από τον τύπο $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$ ισχύει ότι $y_1 = \alpha x_1 + \beta$ και $y_2 = \alpha x_2 + \beta$. Οπότε και

$$y_2 - y_1 = \alpha x_2 + \beta - \alpha x_1 - \beta = \alpha(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

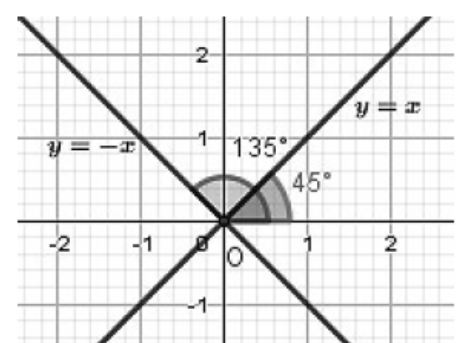


72. Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x$ και από ποιο σημείο διέρχεται; Πως ονομάζονται οι ευθείες $y = x$, $y = -x$ και γιατί;

Αν $\beta = 0$ η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x$, οπότε η γραφική παράσταση της $y = \alpha x$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Αν $\alpha = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$ που έχει $\alpha = \varepsilon\varphi\omega = 1$ άρα $\omega = 45^\circ$. Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

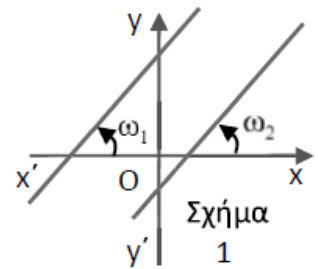
Αν $\alpha = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$ που έχει $\alpha = \varepsilon\varphi\omega = -1$ άρα $\omega = 135^\circ$.



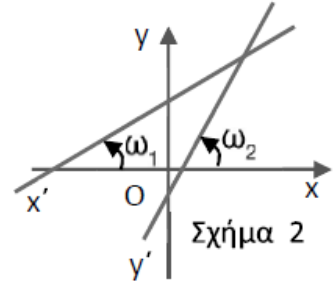
Επομένως η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας των αξόνων.

73. Πότε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις είναι $y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$ και $y_2 = \alpha_2 x_2 + \beta_2$ είναι παράλληλες και πότε συμπίπτουν και πότε τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο;

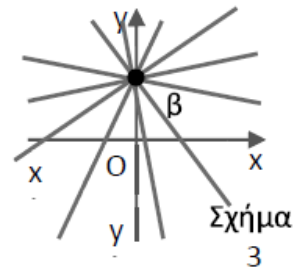
- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ τότε $\varepsilon\omega_1 = \varepsilon\omega_2$, δηλαδή $\omega_1 = \omega_2$ και οι ευθείες είναι παράλληλες οι ταυτίζονται.
Αν επιπλέον $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχήμα 1), ενώ αν $\beta_1 = \beta_2$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται.



- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και οι ευθείες τέμνονται (Σχήμα 2).



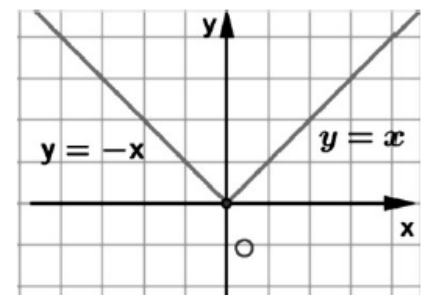
- Οι ευθείες που έχουν το ίδιο β , τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο (Σχήμα 3).



74. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από δύο ημιευθείες: την $y = -x$ με $x \leq 0$ και την $y = x$ με $x \geq 0$.



2. ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΛΑΤΦΟΡΜΑ ΤΟΥ Ι.Ε.Π. [ΕΔΩ](#)

14458	35388.	13323.	14492	37817	14071	35041	35112.	35412	33896.
34152	14682	36778.	12857.	14730	34161	33889	36651	33826.	34154.
34920.	33584.	36675.	34148.	36893	13474	35382	34162.	37168	13174
14924.	34319	34186.	14476.	34145	35299.	12764.	14920	35042.	13032.
14728.	35298	37202	14562.	14655	14759	36679.	34159	13030	13557
14665	14926	32742	33894	36676	12913.	13054	12682.	12834.	12944

3. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ «ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ»

- Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y συμμετρικά ως προς τον άξονα xx' .
- Η εξίσωση $x^n = a$ με $a < 0$ και n περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[n]{|a|}$.
- Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$.
- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.
- Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .
- Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
- Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.
- Η εξίσωση $x^n = a$, με n περιττό φυσικό και $a < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[n]{|a|}$.
- Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ισχύει $f(\beta) = \alpha$.
- Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
- Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|-a| = a$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.
- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.
- Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.
- Αν $a \leq 0$ και n άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.
- Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_n) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω . Το άθροισμα S_n των n πρώτων διαδοχικών όρων της (α_n) δίνεται από την σχέση $S_n = \frac{n}{2} [\alpha_1 + \alpha_n]$.
- Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x , όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.
- Αν $a \leq 0$ και n άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- Αν $a > 0$ και $\Delta < 0$ η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.
- Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
- Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |-\alpha| + |\beta|$.
- Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

Τάξη: Α'

Ασκήσεις Επανάληψης

Β. Μπαλταβιάς - Θ. Ξένος

Α' Μέρος: Θ. Ξένου

Άσκηση 1^η: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε να ορίζεται η τιμή $f(3\lambda - 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

Λύση: α) Η f ορίζεται όταν ισχύει:

$$4x - x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \quad (1).$$

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει $\Delta = 4$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Άρα η (1) αληθεύει όταν $x \in [1, 3]$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [1, 3]$.

β) Η τιμή $f(3\lambda - 2)$ ορίζεται, όταν ο αριθμός $3\lambda - 2$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή όταν: $1 \leq 3\lambda - 2 \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 3\lambda \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \lambda \leq \frac{5}{3}$.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα $f(x) < x$,

για κάθε $x \in [1, 3]$. Έχουμε $f(x) < x \Leftrightarrow \sqrt{4x - x^2 - 3} < x \Leftrightarrow 4x - x^2 - 3 < x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 > 0$, που αληθεύει πάντα, γιατί το τριώνυμο $2x^2 - 4x + 3$ έχει $\Delta = -8 < 0$ και είναι πάντα θετικό.

Άσκηση 2^η: Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|2x - 3| \leq 2 \quad (i) \text{ και } 2x^2 - 9x + 9 > 0 \quad (ii)$$

α) Να αποδειχθεί ότι συναληθεύουν όταν το x ανήκει στο διάστημα $\Delta = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

β) Αν οι αριθμοί α και β επαληθεύουν τις ανισώσεις (i) και (ii), να αποδειχθεί ότι:

$$1) \frac{1}{4} \leq \alpha\beta < \frac{9}{4} \quad 2) -1 < \alpha - \beta < 1$$

$$3) -1 < 4\alpha - 2\beta < 5 \quad 4) \frac{1}{6} < \frac{\alpha^2}{\beta} < \frac{9}{2}$$

ΛΥΣΗ: α) $|2x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2x \leq 5 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \quad (1) \text{ Το τριώνυμο } 2x^2 - 9x + 9 \text{ έχει}$$

διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $x_1 = \frac{9+3}{4} = 3$ και

$$x_2 = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}.$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$	
$2x^2 - 9x + 9$	+	0	-	0	+

Άρα το τριώνυμο είναι θετικό όταν

$$x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (3, +\infty) \quad (2)$$

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των (1) και (2),

$$\text{που είναι: } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}.$$

$$\beta) 1) \text{ Γνωρίζουμε ότι: } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2} \end{array} \right\}.$$

Τα μέλη είναι όλα θετικά, οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{1}{4} \leq \alpha\beta < \frac{9}{4}.$$

2) Έχουμε

$$\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq -\beta > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -\beta \leq -\frac{1}{2}.$$

Άρα προσθέτοντας κατά μέλη με την $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2}$ έχουμε $-1 < \alpha - \beta < 1$.

3) Έχουμε: $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 4\alpha < 6$ και

$$\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -3 < -2\beta \leq -1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη $-1 < 4\alpha - 2\beta < 5$.

4) Έχουμε $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \alpha^2 < \frac{9}{4}$ και

$$\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{\beta} \leq 2. \text{ Τα μέλη είναι όλα θετικά,}$$

οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε: $\frac{1}{6} < \frac{\alpha^2}{\beta} < \frac{9}{2}.$

Άσκηση 3^η: Δίνονται η εξίσωση $\lambda(x+3) + 2(\lambda^2 - x) = \lambda^3 + 6$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος

και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.

α) Να λυθεί η εξίσωση.

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Λύση: α) Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda x + 3\lambda + 2\lambda^2 - 2x = \lambda^3 + 6 \Leftrightarrow (\lambda - 2)x = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 6 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 2)x = (\lambda - 2)\lambda^2 - 3(\lambda - 2) \Leftrightarrow (\lambda - 2)x = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3) \quad (1).$$

• Αν $\lambda \neq 2$, τότε η (1) έχει μοναδική λύση, την

$$x = \lambda^2 - 3.$$

- Αν $\lambda=2$, η (1) γράφεται: $0 \cdot x = 0$ και είναι αόριστη.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

$$x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A=(0,1)$.

γ) Θα βρούμε τις τιμές του λ , ώστε να ισχύει $0 < \lambda^2 - 3 < 1$.

- $\lambda^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 3 \Leftrightarrow |\lambda| > \sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda < -\sqrt{3} \text{ ή } \lambda > \sqrt{3}$ (2).
- $\lambda^2 - 3 < 1 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$ (3).

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των (2), (3) οπότε προκύπτει $\lambda \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

Άσκηση 4η: Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4.$$

α) Για ποιες τιμές του α , έχει δύο ρίζες άνισες;

β) Για ποιες τιμές του α , οι άνισες ρίζες x_1, x_2 του τριωνύμου $f(x)$, επαληθεύουν τη σχέση:

$$x_1^2 + x_2^2 = 9;$$

γ) Για ποιες τιμές του α , ισχύει: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Λύση: α) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 - 4(\alpha + 4) > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 15 > 0$ (1). Αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta' = 64 > 0$, άρα έχει ρίζες $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 5$. Επομένως η (1) αληθεύει όταν $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.

β) Για $\alpha < -3$ ή $\alpha > 5$, ισχύει ότι $x_1 + x_2 = \alpha + 1$, $x_1 \cdot x_2 = \alpha + 4$.

$$\text{Έτσι έχουμε: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (\alpha + 1)^2 - 2(\alpha + 4) = \alpha^2 - 7.$$

$$\text{Άρα } \alpha^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \pm 4.$$

Αφού όμως έχουμε ότι $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

δεκτή τιμή είναι η $\alpha = -4$.

γ) Αυτό συμβαίνει όταν

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 15 < 0 \Leftrightarrow -3 < \alpha < 5.$$

Άσκηση 5η: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9x} + \frac{1}{\sqrt[3]{|x-2|} - 1}$$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να εξεταστεί αν η γραφική της παράσταση έχει κοινά σημεία με τους άξονες συντεταγμένων.

β) Να εξεταστεί αν ο αριθμός

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 32^{\frac{3}{5}} + (0,25)^{-1}$$

ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Λύση: α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2 - 9x \geq 0$ (1) και $|x-2| - 1 > 0$ (2).

$$(1) \Leftrightarrow x(x-9) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq 9$$

$$(2) \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow x-2 < -1 \text{ ή } x-2 > 1 \Leftrightarrow$$

$$x < 1 \text{ ή } x > 3.$$

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις τους, οπότε

$$x \leq 0 \text{ ή } x \geq 9. \text{ Άρα } A = (-\infty, 0] \cup [9, +\infty).$$

Επειδή $f(x) > 0$ (γιατί;), η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον $x'x$. Επίσης, για $x=0$ έχουμε

$$f(0) = \sqrt{0} + \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ τέμνει τον } y'y$$

στο σημείο $K(0,1)$.

$$\beta) \text{ Έχουμε } A = 27^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 32^{\frac{3}{5}} + (0,25)^{-1} =$$

$$\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 + 4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 5 \cdot \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$$

$$3^2 + 4 \cdot \sqrt{4} - 5 \cdot 2^3 + 4^1 = 9 + 8 - 40 + 4 = -19,$$

που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Άσκηση 6η: Δίνεται η παράσταση $A = |x+1| + |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) \text{ Να αποδειχθεί ότι: } A = \begin{cases} -2x & , x < -1 \\ 2 & , -1 \leq x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$$

β) Να λυθεί η εξίσωση $|x-1| + |x+1| = 3$

γ) Να αποδειχθεί ότι: $|x-1| + |x+1| \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: α) Έχουμε

x	$-x$	-1	1	$+x$
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+

Αν $x < -1$, τότε $x+1 < 0$ και $x-1 < 0$, οπότε

$$A = (-x-1) + (-x+1) = -2x$$

Αν $-1 \leq x < 1$, τότε $x+1 \geq 0$ και $x-1 < 0$, οπότε

$$A = (x+1) + (-x+1) = 2$$

Αν $x \geq 1$, τότε $x+1 > 0$ και $x-1 \geq 0$, οπότε

$$A = (x+1) + (x-1) = 2x.$$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} -2x & , x < -1 \\ 2 & , -1 \leq x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$$

β) Αν $x < -1$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-2x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}, \text{ δεκτή. Αν } -1 \leq x < 1, \text{ τότε η}$$

εξίσωση γράφεται: $A = 2 \neq 3$, άρα είναι αδύνατη.

Αν $x \geq 1$, τότε η εξίσωση γράφεται: $2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$,

δεκτή. Άρα τελικά ρίζες οι $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$.

γ) Αν $x < -1$, τότε $A = -2x > 2$.

Αν $-1 \leq x < 1$, τότε $A = 2$. Αν $x \geq 1$, τότε $A = 2x \geq 2$.

Άρα $A \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7α: α) Ένα κερί ύψους 50 cm καίγεται με ρυθμό 2,5 cm την ώρα.

ι) Να βρεθεί το ύψος του κεριού, 10 ώρες μετά, από την στιγμή που άρχισε να καίγεται.

ii) Σε πόσο χρόνο το κερί θα έχει ύψος 10 cm ;

iii) Σε πόσο χρόνο το κερί θα λιώσει;

β) Ένα δεύτερο κερί ύψους 60 cm, αρχίζει να καίγεται μαζί με το πρώτο και μετά από 15 ώρες έχουν το ίδιο ύψος. Με τι ρυθμό καίγεται το δεύτερο κερί;

γ) Ένα τρίτο κερί καίγεται με ρυθμό 4 cm την ώρα και λιώνει συγχρόνως με το πρώτο κερί. Ποιο είναι το αρχικό ύψος του κεριού αυτού;

Λύση: α) Την 1^η ώρα το ύψος του κεριού είναι $\alpha_1 = 47,5$ cm, την 2^η ώρα $\alpha_2 = 45$ cm κ.ο.κ.

Τα ύψη $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = -2,5$ cm.

ι) $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 47,5 - 9 \cdot 2,5 = 25$ cm

ii) $\alpha_n = 10 \Leftrightarrow 47,5 + (n-1) \cdot (-2,5) = 10 \Leftrightarrow n = 16$

iii) $\alpha_n = 0 \Leftrightarrow n = 20$ ώρες.

β) Έστω $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ τα ύψη του δεύτερου κεριού, την 1^η ώρα, την 2^η ώρα κ.ο.κ. Έχουμε πάλι διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά τον άγνωστο ρυθμό δ . Έτσι έχουμε: $\beta_1 = 60 + \delta$ και $\beta_{15} = \alpha_{15}$. Άρα:

$\beta_1 + 14\delta = \alpha_1 + 14\omega \Leftrightarrow 60 + 15\delta = 12,5 \Leftrightarrow$

$\delta = -\frac{19}{6}$. Άρα το δεύτερο κερί λιώνει με ρυθμό

$\frac{19}{6}$ cm την ώρα.

γ) Αν το αρχικό ύψος του τρίτου κεριού είναι $\gamma_0 = x$ τότε έχουμε: $\gamma_1 = x - 4$ και $\gamma_{20} = 0$, αφού σε 20 ώρες λιώνει.

Επομένως $\gamma_1 + 19 \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 - 76 = 0 \Leftrightarrow x = 80$

Άρα το αρχικό ύψος του 3^{ου} κεριού είναι 80 cm.

Β' Μέρος: Β. Μπαλτσαβιά

Άσκηση 1^η: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$

ι) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση: i) Η f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει: $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Άρα $A = \mathbb{R} - \{2\}$

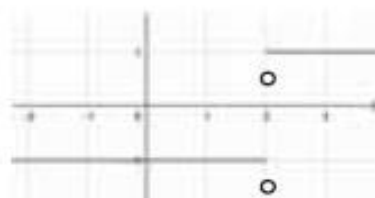
ii) Για $x \neq 2$ έχουμε: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x - 2} = \frac{|x-2|}{x-2}$

Για $x > 2$ είναι $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$

Για $x < 2$ είναι $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

Άρα $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 2 \\ -1, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

iii)



Άσκηση 2^η: Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η ευθεία (ε): $y = 2x$. Με τη βοήθεια του σχήματος,



ι) α) να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2x$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της

συνάρτησης $g(x) = \frac{\sqrt{|x| + x}}{\sqrt{f(x) - 2x}}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 2x$.

Λύση: i) α) Η επίλυση της ανίσωσης $f(x) > 2x$, γεωμετρικά «μεταφράζεται» ως η αναζήτηση των τετμημένων x των σημείων $(x, f(x))$ της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία (ε). Από το σχήμα έχουμε ότι:

$f(x) > 2x \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$.

β) Η g ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει: $\begin{cases} |x| + x \geq 0 \\ f(x) - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq -x \\ f(x) > 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Άρα $A = (-2, 0) \cup (1, +\infty)$

iii) Η C_f και η ευθεία (ε) τέμνονται στα σημεία $A(-2, -4), O(0, 0)$ και $B(1, 2)$. Οπότε $f(x) = 2x \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = 1$. Για την $|f(x)| = 2x$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $x \geq 0$ τότε στο $[0, +\infty)$ η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τον x' , δηλαδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε $|f(x)| = f(x)$.

Άρα $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = 1$ από τις οποίες δεκτές είναι οι $x = 0$ και $x = 1$.

Άσκηση 3η: Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

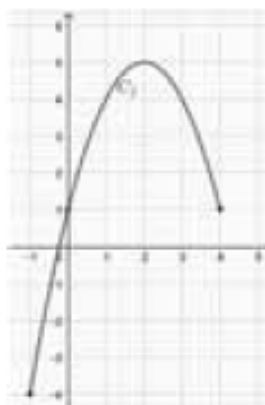
- Να βρείτε το A .
- Να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f(0)$.
- Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση: i) $A = [-1, 4]$

ii) $f(4) = 1$ και $f(0) = 1$

iii) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda < -4$ τότε η οριζόντια ευθεία $y = \lambda$ δεν τέμνει τη C_f άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $-4 \leq \lambda < 1$ τότε η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη C_f μια φορά ακριβώς άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μόνο μια λύση.
- Αν $1 \leq \lambda < 5$ τότε η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη C_f δυο φορές άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δυο λύσεις.
- Αν $\lambda = 5$ τότε η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη C_f μια φορά ακριβώς άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μόνο μια λύση.
- Αν $\lambda > 5$ τότε η ευθεία $y = \lambda$ δεν τέμνει τη C_f άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.



Άσκηση 4η: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \lambda x + 1$. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η C_f

- τέμνει τον άξονα x' σε δυο διαφορετικά σημεία;
- τέμνει τον άξονα x' σε μοναδικό σημείο;
- δεν είναι κάτω από τον x' για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Είναι $a = 1, b = -\lambda, c = 1$ και το τριώνυμο $f(x)$ έχει $\Delta = \lambda^2 - 4$.

i) Η C_f τέμνει τον άξονα x' σε δυο σημεία όταν η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + 1 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow \lambda < -2$ ή $\lambda > 2$.

ii) Η C_f τέμνει τον άξονα x' σε μοναδικό σημείο όταν η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ή $\lambda = 2$.

iii) Η C_f είναι πάνω από τον x' για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 4 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 4 \Leftrightarrow |\lambda| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq 2.$$

Άσκηση 5η: Έχουμε έναν αυτόματο πωλητή διακεκριμένων προϊόντων. Σχηματίζουμε το σύνολο A όλων των προϊόντων που έχει ο πωλητής και το σύνολο B των τιμών των προϊόντων του πωλητή. Ορίζουμε τη διαδικασία $f: A \rightarrow B$ με την οποία αντιστοιχίζουμε κάθε προϊόν στην τιμή του και τη διαδικασία $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχίζουμε κάθε τιμή στο προϊόν.

- Να εξετάσετε αν η f παριστάνει πάντοτε συνάρτηση.
- Να εξετάσετε αν η g παριστάνει πάντοτε συνάρτηση.

Λύση: i) Η απεικόνιση f παριστάνει συνάρτηση, διότι κάθε προϊόν αντιστοιχίζεται σε έναν ακριβώς αριθμό, την τιμή του.

ii) Η g δεν παριστάνει απαραίτητα συνάρτηση διότι, ενδεχομένως, μια τιμή να αντιστοιχίζεται σε δυο διαφορετικά προϊόντα.

Άσκηση 6η: Ένας βιοτέχνης θέλει να νοικιάσει ένα φορτηγό για μια απόσταση 100 χλμ. από την βιοτεχνία B μέχρι το πρατήριο Π . Η εταιρία ενοικίασης ζητάει για κάθε μέρα ενοικίασης 40 € και επιπλέον α ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που θα διανυθεί. Ο βιοτέχνης υπολογίζει ότι το κόστος μεταφοράς στο πρατήριο Π ανέρχεται στα 90 ευρώ.

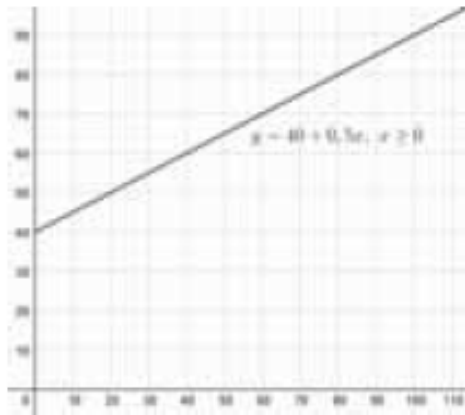
- Να βρείτε την τιμή του α .
- Να γράψετε τη συνάρτηση που υπολογίζει το ημερήσιο κόστος y της ενοικίασης του φορτηγού όταν διανύσει x χιλιόμετρα.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

Λύση: i) Έχουμε $90 = 40 + \alpha \cdot 100 \Leftrightarrow 50 = 100\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0,5$

ii) Το κόστος y όταν διανυθούν x χιλιόμετρα την ημέρα ενοικίασης δίνεται από τη συνάρτηση $y = 40 + 0,5 \cdot x$, με $x \geq 0$.

iii)



Άσκηση 7^η: Δίνεται το τριώνυμο

$$x^2 - \lambda x - \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{16}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

i) Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει ρίζες;

ii) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο (1) έχει ρίζες

- α) αντίθετες β) αντίστροφες
γ) ομόσημες δ) αρνητικές.

iii) Υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σχέση:

$$3 + (4x - 2\lambda)^2 - 4\lambda = 4\lambda^2 + |16x^2 - 16\lambda x - 4\lambda + 3|;$$

Λύση: i) Είναι $\alpha = 1, \beta = -\lambda, \gamma = -\frac{\lambda}{4} + \frac{3}{16}$ και το

τριώνυμο έχει $\Delta = \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4}$.

Το τριώνυμο έχει ρίζες όταν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

λ	$-\infty$	$-3/2$	$1/2$	$+\infty$	
$\lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4}$	+	○	-	○	+

ii) Είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\lambda}{4} + \frac{3}{16} = \frac{3-4\lambda}{16}$

α) έχει ρίζες αντίθετες όταν

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

αδύνατο, άρα δεν υπάρχει τέτοια τιμή για το λ .

β) έχει ρίζες αντίστροφες όταν

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \frac{3-4\lambda}{16} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \lambda = -\frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{13}{4}$$

γ) έχει ρίζες αντίθετες όταν

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \frac{3-4\lambda}{16} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \lambda < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

δ) έχει ρίζες αρνητικές όταν

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \frac{3-4\lambda}{16} > 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \lambda < \frac{3}{4} \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$



iii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$3 + (4x - 2\lambda)^2 - 4\lambda = 4\lambda^2 + |16x^2 - 16\lambda x - 4\lambda + 3|$$

$$\Leftrightarrow |16x^2 - 16\lambda x - 4\lambda + 3| = 16x^2 - 16\lambda x - 4\lambda + 3$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2 - \lambda x - \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{16}\right| = x^2 - \lambda x - \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \lambda x - \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{16} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η έννοια της συνάρτησης
Γραφική παράσταση συνάρτησης
Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$

1. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x}{x^2 - x} + \frac{x+1}{x^2 - 1}$.
- ii. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις f και φ , όπου $\varphi(x) = \frac{2}{x-1}$

Απάντηση:

- i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $x^2 - x \neq 0$ και $x^2 - 1 \neq 0$ $\Leftrightarrow$
 $x(x-1) \neq 0$ και $(x-1)(x+1) \neq 0$ $\Leftrightarrow$
 $(x \neq 0 \text{ και } x \neq 1 \text{ και } x \neq -1)$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το:
 $A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$
- ii. Για κάθε $x \in A$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2 - x} + \frac{x+1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x}{x(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το:
 $B = \mathbb{R} - \{-1\}$, άρα οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

ΣΧΟΛΙΑ:

- i. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης το βρίσκουμε στην αρχική της μορφή και όχι μετά τις απλοποιήσεις, γιατί ενδέχεται να χαθούν ρίζες του παρανομαστή, όπως στο παραπάνω παράδειγμα η ρίζα $x = -1$.
- ii. Εδώ λέμε τότε ότι η συνάρτηση f είναι ένας περιορισμός της φ στο A , ενώ η φ είναι μια επέκταση της f στο B .

2. Ποια τριάδα από τα παρακάτω σημεία δεν μπορούν να ανήκουν στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ; Γιατί;
- A. $K(3, 5)$ $\Lambda(5, 6)$ $M(6, -2)$
B. $K(1, 3)$ $\Lambda(2, 3)$ $M(3, 3)$
Γ. $K(-2, 5)$ $\Lambda(0, 0)$ $M(2, -5)$
Δ. $K(1, 4)$ $\Lambda(3, -2)$ $M(1, 3)$
Ε. $K(1, 1)$ $\Lambda(2, 2)$ $M(3, 3)$

Απάντηση:

Η τριάδα (Δ).

Υπενθυμίζουμε ότι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, με τα x να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .

Στην τριάδα (Δ), το $x = 1$ του σημείου K αντιστοιχίζεται μέσω της f στο $y = 4$ και συγχρόνως το $x = 1$ του σημείου M αντιστοιχίζεται στο $y = 3$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό της συνάρτησης που μας λέει ότι «καθένα x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y ».

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 10(x-1)(x+3)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ των τετμημένων σε δύο σημεία A και B . Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του άξονα $x'x$ είναι της μορφής $(x, 0)$, ενώ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f είναι της μορφής $(x, f(x))$. Άρα, οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$, (αν υπάρχουν), είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Έτσι,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 10(x-1)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -3.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία A και B με συντεταγμένες $(1, 0)$ και $(-3, 0)$.

Η απόστασή τους είναι $|1 - (-3)| = 4$.

4. Να βρείτε σε ποια σημεία τέμνουν τους άξονες οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:
- i. $f(x) = x - 4$
ii. $f(x) = (x-2)(x-3)$
iii. $f(x) = x\sqrt{x+2}$

Απάντηση:

- i. Η συνάρτηση $f(x) = x - 4$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη $y = 0$, αφού κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0.

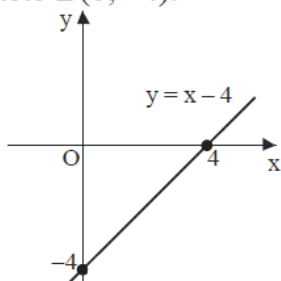
Έτσι, με $y = 0$ από την εξίσωση $y = x - 4$ παίρνουμε $x = 4$.

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(4, 0)$.

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του άξονα $y'y$ είναι της μορφής $(0, y)$, άρα είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$, αν και μόνο αν αριθμός 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Με $x = 0$ από την $y = x - 4$ έχουμε:

$y = 0 - 4 \Leftrightarrow y = -4$, άρα τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.



- ii. Η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Όπως παραπάνω, για $x = 0$ έχουμε:

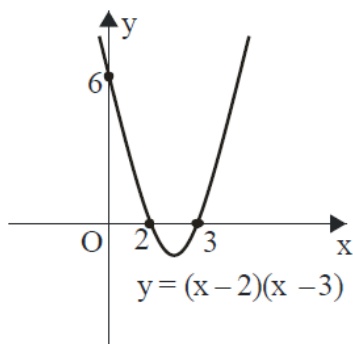
$$y = (0 - 2)(0 - 3) \Leftrightarrow y = 6,$$

άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 6)$.

Για $y = 0$ έχουμε:

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3,$$

άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(2, 0)$ και $B(3, 0)$.



- iii. Η συνάρτηση $f(x) = 2x\sqrt{x+2}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-2, +\infty)$.

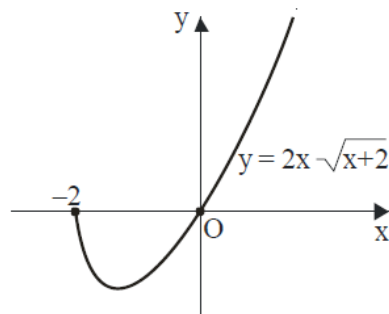
Για $x = 0$ παίρνουμε $y = 0$, άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από

το σημείο $O(0, 0)$ (αρχή των αξόνων).

Για $y = 0$ έχουμε:

$$2x\sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2,$$

άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $O(0, 0)$ (που είναι κοινό σημείο των δύο αξόνων) και $B(-2, 0)$.



ΣΧΟΛΙΟ: Σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τη βοήθεια προγράμματος Η.Υ., ώστε στο σύστημα συντεταγμένων να αποδίδονται ακριβώς τα ζητούμενα σημεία.

5. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g(x) = \frac{8}{x}$

Απάντηση:

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g προκύπτουν από τη επίλυση του συστήματος των εξισώσεών τους: $y = \frac{x+2}{x-1}$ και $y = \frac{8}{x}$.

Αρχικά, για να ορίζονται τα κλάσματα πρέπει: $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

Αντικαθιστούμε την τιμή του y από τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη:

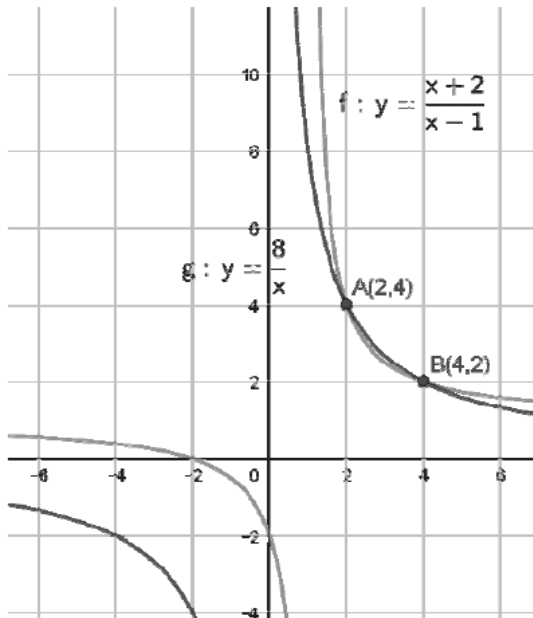
$$\frac{8}{x} = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow 8x - 8 = x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0, \text{ η οποία}$$

έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 4$

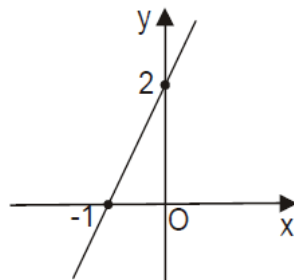
$$\text{και ρίζες τις } x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \in \mathbb{R}$$

Με $x = 4$ βρίσκουμε $y = 2$, ενώ με $x = 2$ βρίσκουμε $y = 4$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία $A(2, 4)$ και $B(4, 2)$.



ΣΧΟΛΙΟ: Σχεδιάσαμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με τη βοήθεια προγράμματος Η.Υ., ώστε να αποδίδονται ακριβώς τα σημεία τομής τους.

6. Αν η ευθεία
 $y = ax + \beta$
 έχει τη γραφική
 παράσταση που
 φαίνεται στο σχή-
 μα, τότε:



$\alpha > 0$	ΝΑΙ	ΟΧΙ
$\beta = 2$	ΝΑΙ	ΟΧΙ
$\alpha > \beta$	ΝΑΙ	ΟΧΙ
$\alpha = 2$	ΝΑΙ	ΟΧΙ

Απάντηση:

Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ έχει κλίση τον αριθμό $\alpha > 0$.

Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 2)$, άρα είναι $\beta = 2$, αφού οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση

$$2 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

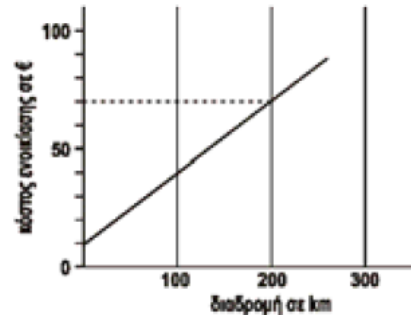
Η ευθεία $y = ax + \beta$ διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(0, 2)$, επομένως για τον συντελεστή διεύθυνσής της έχουμε

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2.$$

Οπότε στην επιλογή $\alpha > \beta$ απαντούμε ΟΧΙ, ενώ σε όλες τις υπόλοιπες ΝΑΙ.

7. Κάποιος ενοικίασε για τις διακοπές του ένα αυτοκίνητο πληρώνοντας ως δικαίωμα ενοικίασης 10 €. Το επιπλέον κό-

στος ενοικίασης είναι ανάλογο με τα χιλιόμετρα (Km) που θα κάνει. Στη γραφική παράσταση φαίνεται το ποσό (σε €) που θα εισπράξει το γραφείο ενοικίασης ως συνάρτηση των χιλιομέτρων που θα διανυθούν.



- i. Με βάση τα στοιχεία αυτά, ποια είναι η χρέωση που γίνεται για κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο;

*Διαγ. Δημοσίου 2004
 (Με διατύπωση επιλογής πολλαπλής απάντησης)*

- ii. Ποιο το συνολικό ποσό που θα εισπράξει το γραφείο για διαδρομή 600 χιλιομέτρων;

Απάντηση:

- i. Η γραφική παράσταση που δείχνει το ποσό που θα εισπράξει το γραφείο είναι η ημιευθεία με αρχή το σημείο $A(0, 10)$ η οποία διέρχεται από το $B(200, 70)$.

Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωσή της. Έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{70 - 10}{200 - 0} = \frac{3}{10} = 0,3$$

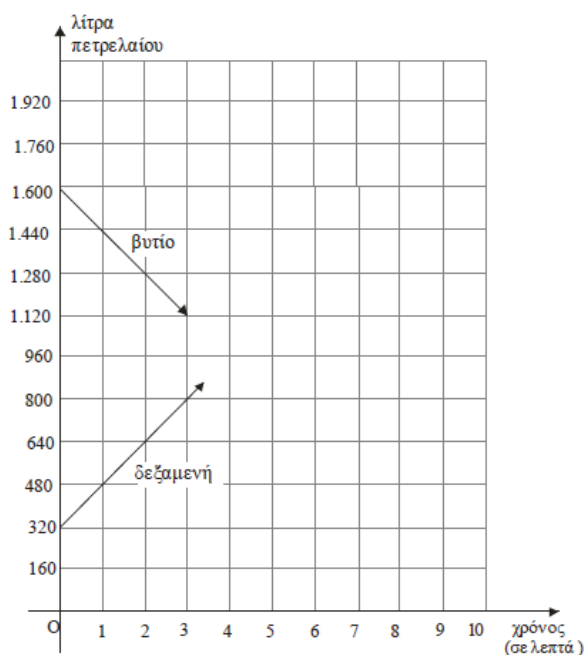
Ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) της ευθείας δείχνει τη μεταβολή του y (ποσό σε ευρώ) για κάθε μοναδιαία μεταβολή του x (χιλιόμετρα). Άρα η χρέωση που γίνεται για κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο είναι 0,3 €

- ii. Η ημιευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0, 10)$ του άξονα $y'y$, άρα είναι $\beta = 10$, οπότε έχει εξίσωση την $y = 0,3x + 10$.

Για $x = 600$ βρίσκουμε

$$y = 0,3 \cdot 600 + 10 = 180 + 10 = 190 \text{ €}.$$

8. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι περιεκτικότητες σε λίτρα μιας δεξαμενής και του βυτίου, που την τροφοδοτεί με πετρέλαιο με ρυθμό 160 λίτρα το λεπτό. Το βυτίο θα αδειάσει όλο το πετρέλαιο στη δεξαμενή.



i. Πόσο πετρέλαιο είχε η δεξαμενή μόλις άρχισε η τροφοδοσία και πόσο θα έχει στο τέλος; Πόσο χρόνο διαρκεί η τροφοδοσία;

ii. Γράψτε τις εξισώσεις που δίνουν την ποσότητα πετρελαίου σε δεξαμενή και βυτίο, σε σχέση με το χρόνο τροφοδοσίας. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσής τους, Γιατί;

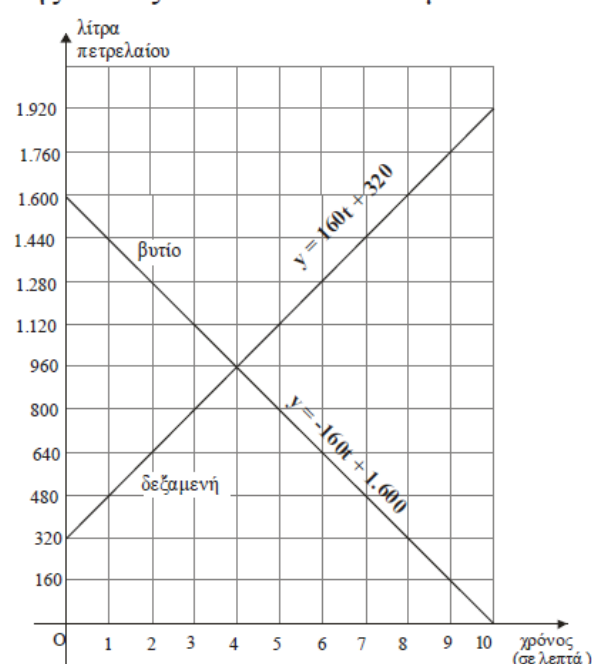
iii. Θα έχουν κάποια στιγμή ίσες ποσότητες δεξαμενή και βυτίο; Αν ναι, σε πόσο χρόνο μετά την αρχή της τροφοδοσίας θα συμβεί αυτό;

Απάντηση:

i. Η στιγμή που αρχίζει η τροφοδοσία αντιστοιχεί στο χρόνο $t = 0$ (σε λεπτά) στο σύστημα αξόνων. Τότε η δεξαμενή είχε 320 λίτρα πετρέλαιο και το βυτίο 1.600. Στο τέλος θα έχει $320 + 1.600 = 1.920$ λίτρα. Αφού τροφοδοτείται με 160 λίτρα το λεπτό, η δεξαμενή θα γεμίσει σε 10 λεπτά.

ii. Η γραφική παράσταση που δείχνει το πόσο πετρέλαιο έχει η δεξαμενή είναι ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $A(0, 320)$, τέλος το $B(10, 1.920)$. Έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) 160, αφού κάθε λεπτό το ύψος της στάθμης στον κατακόρυφο άξονα αυξάνει κατά 160 (λίτρα). Άρα η εξίσωσή της είναι $y = 160t + 320$, με το t να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 10]$. Ομοίως, η γραφική παράσταση που δείχνει το πόσο πετρέλαιο έχει το βυτίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $C(0, 1.600)$ και τέλος το $D(10, 320)$.

κλίση -160 , αφού κάθε λεπτό το ύψος της στάθμης στον κατακόρυφο άξονα μειώνεται κατά 160. Οπότε η εξίσωσή της είναι $y = -160t + 1.600$ με $0 \leq t \leq 10$.



Οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι αντίθετοι αριθμοί, αφού το βυτίο αδειάζει με τον ίδιο ρυθμό που αυξάνει η ποσότητα στη δεξαμενή.

iii. Η δεξαμενή και το βυτίο θα περιέχουν ίσες ποσότητες πετρελαίου (y) τη χρονική στιγμή (t) που θα είναι ίσες οι τιμές των συναρτήσεων που εκφράζουν τις ποσότητες πετρελαίου που περιέχουν.

$$\text{Έχουμε } 160t + 320 = -160t + 1.600 \Leftrightarrow$$

$$320t = 1.280 \Leftrightarrow t = 4.$$

Άρα, το ζητούμενο θα συμβεί σε 4 λεπτά από την έναρξη της τροφοδοσίας.

9. Σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια. Με καθένα απ' αυτά σχηματίζουμε τετράγωνα.

i. Αν x cm είναι το μήκος του πρώτου κομματιού, να εκφράσετε τα εμβαδά τους ως συναρτήσεις του x .

ii. Να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν του δεύτερου να είναι εννιά φορές μεγαλύτερο του πρώτου.

Απάντηση:

i. Αφού x είναι το μήκος του πρώτου κομματιού, το πρώτο τετράγωνο θα έχει πλευρά $\frac{x}{4}$. Το x μπορεί να είναι οποιοσ-

άρα το εμβαδόν του δίνεται από τη συνάρτηση $E_1(x) = \frac{x^2}{16}$, με $0 < x < 20$.

Το κομμάτι σύρματος που απομένει είναι $20 - x$ cm, οπότε το δεύτερο τετράγωνο θα έχει πλευρά $\frac{20-x}{4}$. Κι εδώ το x μπο-

ρεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός από το διάστημα $(0, 20)$, άρα το εμβαδόν του δίνεται από τη συνάρτηση

$$E_2(x) = \frac{(20-x)^2}{16}, \text{ με } 0 < x < 20.$$

ii. Λύνουμε την εξίσωση $E_1(x) = 9E_2(x) \Leftrightarrow \frac{(20-x)^2}{16} = \frac{9x^2}{16} \Leftrightarrow 400 - 40x + x^2 = 9x^2$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 40x - 400 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$$

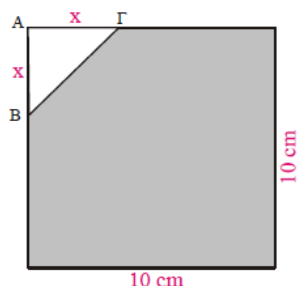
που έχει ρίζες τις $x = 5$ και $x = -15$.

Δεκτή ρίζα είναι η $x = 5$ cm. Το εμβαδόν του πρώτου είναι ίσο με $E_1(5) = \frac{25}{16} \text{ cm}^2$

και του δεύτερου είναι

$$E_2(5) = \frac{(20-5)^2}{16} = \frac{225}{16} \text{ cm}^2.$$

10. Από τετράγωνο με πλευρά 10 cm αποκόπτουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με ίσες πλευρές $AB = AG = x$ cm,



όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που απομένει ως συνάρτηση του x ;

ii. Να βρείτε την τιμή του x έτσι, ώστε το εμβαδόν που απομένει να είναι τα $\frac{7}{8}$ του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.

Απάντηση:

- i. Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 100 cm^2 . Το τρίγωνο που αφαιρούμε έχει εμβαδόν $\frac{x^2}{2}$, με το x να παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 10)$. Άρα η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν E της επιφάνειας που απομένει

$$\text{είναι: } E(x) = 100 - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

ii. Λύνουμε την εξίσωση:

$$E(x) = \frac{7}{8} \cdot 100 \Leftrightarrow 100 - \frac{x^2}{2} = \frac{700}{8}$$

$$\Leftrightarrow 800 - 2x^2 = 700 \Leftrightarrow 2x^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -|x| + 2$.

i. Βρείτε τις εξισώσεις των δύο ημιευθειών (ε_1) και (ε_2) από τις οποίες αποτελείται η γραφική της παράσταση.

ii. Βρείτε τα σημεία στα οποία οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τους άξονες.

iii. Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ και τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

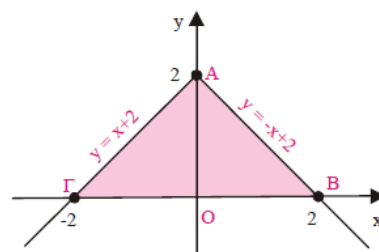
Απάντηση:

i. Είναι: $\begin{cases} \varepsilon_1: y = -x + 2, & x \geq 0 \\ \varepsilon_2: y = x + 2, & x < 0 \end{cases}$

ii. Για $x = 0$ έχουμε:

$$y = f(0) = -0 + 2 \Leftrightarrow y = 2,$$

άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 2)$.



Για $y = 0$ η

εξίσωση της ε_1 δίνει $0 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 2$, άρα η ημιευθεία ε_1 τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, ενώ η εξίσωση της ε_2 δίνει $0 = x + 2 \Leftrightarrow x = -2$, άρα η ημιευθεία ε_2 τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $G(-2, 0)$.

iii. Η περιοχή που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ και τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το τρίγωνο ABΓ με βάση $BG = |2 - (-2)| = 4$ και ύψος την τεταγμένη 2 του A, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ τ.μ.}$$

Βιβλιογραφικές πηγές

- [1] Περιοδικό *Ευκλείδης Β'*, ΕΜΕ.
[2] Αρχείο θεμάτων διαγωνισμού "Ο Θαλής", ΕΜΕ.
[3] Ντρίζος Θανάσης, *Θέματα Άλγεβρας Α' Λυκείου* (αδημοσίευτες σημειώσεις).