ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ e ΚΑΙ π ΚΑΙ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Του Αντωνίου Α. Αντωνίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι ένα υπεραρθμήσιμο σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των πραγματικών αριθμών οι υπερβατικοί αριθμοί αποτελούν τον κανόνα και οι αλγεβρικοί την εξαίρεση. Το πρόβλημα όμως του χαρακτηρισμού ενός αριθμού σαν αλγεβρικού ή υπερβατικού είναι από τα πλέον δύσκολα. Αλλά το σύνολο των υπερβατικών αριθμών έχει δύο «διάσημους αντιπροσώπους». Τους αριθμούς e και π. Εκείνος που απέδειξε πρώτος την υπερβατικότητα του e ήταν ο Γάλλος Μαθηματικός Charles Hermite το 1873. Το 1882 0 Γερμανός Μαθηματικός Ferdinand von Lindemann γενικεύοντας τις ιδέες του Hermite απέδειξε την υπερβατικότητα του π. Λίγο πριν από τον Hermite ο Georg Cantor ασχολήθηκε με την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών αποδεικνύοντας με πολύ κομψό τρόπο το αριθμήσιμο του συνόλου των αλγεβρικών αριθμών.
Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται σύντομα οι ιδέες των Cantor, Hermite και Lindemann καθώς και γενικές ιδιότητες, παρατηρήσεις και σχόλια που αφορούν το σύνολο των υπερβατικών αριθμών.

1. Ο GEORG CANTOR ΚΑΙ Η ΥΠΑΡΞΗ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Όπως ήταν ήδη γνωστό από την Αρχαιότητα, το «συνεχές» των σημείων της ευθείας των πραγματικών αριθμών δεν εξαντλείται με τους ρητούς. Μεταξύ των ρητών υπάρχουν και άρρητοι. Γεννάται το ερώτημα: μεταξύ των πραγματικών αριθμών υπάρχουν άλλες διακρίσεις;
Η μελέτη των γεωμετρικά (με κανόνα και διαβήτη) κατασκευάσιμων μεγεθών παραπέμπει στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός: Ένας πραγματικός αριθμός λέγεται <u>**αλγεβρικός**</u>, αν είναι ρίζα μιας εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές.

Ο παραπάνω ορισμός αφορά και μιγαδικούς αριθμούς.

Έτσι, για παράδειγμα οι αριθμοί $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}+\sqrt{5}, \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, i$ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι αλγεβρικοί αριθμοί.
Το ενδιαφέρον ερώτημα που ανακύπτει είναι αν, μεταξύ των πραγματικών αριθμών, εκτός των αλγεβρικών, υπάρχουν και άλλοι αριθμοί. Το ερώτημα αυτό διερεύνησε αρχικά ο Γάλλος Μαθηματικός J. Liouville (1809-1882), αποδεικνύοντας την ύπαρξη μη αλγεβρικών αριθμών [5]. Οι μη αλγεβρικοί αριθμοί λέγονται <u>**υπερβατικοί**</u>.[1]

[1] Ο όρος υπερβατικός αριθμός (transzedenze Zahl) εμφανίζεται για πρώτη φορά το 1882 στη γερμανόφωνη δημοσίευση του Lindemann για την υπερβατικότητα του π.

Ο Georg Cantor, απέδειξε το 1873 την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών χρησιμοποιώντας πιο απλές μεθόδους απ' ότι ο Liouville. Η απόδειξή του βασίζεται στο γεγονός ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο (: δηλ. ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ του συνόλου των φυσικών αριθμών και του συνόλου των αλγεβρικών αριθμών).

Η πρόταση Cantor

Αφού κάθε εξίσωση της μορφής $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_i \in Z$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ χαρακτηρίζεται από το βαθμό της και τους συντελεστές της, αν ορίσουμε σαν «ύψος» το φυσικό αριθμό $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$, τότε κάθε εξίσωση θα έχει το πολύ $N+1$ ρίζες. Επειδή, όμως, σε δεδομένο $N \in \mathrm{N}$ αντιστοιχεί πεπερασμένο πλήθος, έστω $\varphi(N)$, αλγεβρικών εξισώσεων, θα αντιστοιχούν σ' αυτό το πολύ $(N+1)\varphi(N)$ πραγματικοί αριθμοί σαν ρίζες , δηλαδή $(N+1)\varphi(N)$ αλγεβρικοί αριθμοί. Επειδή όμως το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου συνόλου με αριθμήσιμο σύνολο δίνει αριθμήσιμο σύνολο (πρβλ. [6]), οι προηγούμενοι συλλογισμοί αποδεικνύουν την επόμενη

Πρόταση (Cantor): Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι το ακόλουθο

Πόρισμα: Υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί.

Απόδειξη Θεωρούμε τον αλγεβρικό αριθμό σαν δεκαδικό. Με τη «διαγώνια μέθοδο» μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δεκαδικό αριθμό που να μην ανήκει στον πίνακα των αλγεβρικών αριθμών.[2] Πράγματι: έστω ότι μας έχει δοθεί ένας αλγεβρικός αριθμός σε δεκαδική μορφή. Μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε έναν άλλο δεκαδικό αριθμό ως ακολούθως:
Το 1ο δεκαδικό ψηφίο να είναι διάφορο του 1ου δεκαδικού ψηφίου του 1ου αλγεβρικού αριθμού.
Το 2ο δεκαδικό ψηφίο να είναι διάφορο του 2ου δεκαδικού ψηφίου του 2ου αλγεβρικού αριθμού.
Το 3ο δεκαδικό ψηφίο να είναι διάφορο του 3ου δεκαδικού ψηφίου του 3ου αλγεβρικού αριθμού.
κ.ο.κ.[3]
Είναι προφανές ότι ο προκύπτων δεκαδικός αριθμός δεν ανήκει στον πίνακα των αλγεβρικών αριθμών. Είναι δηλαδή μη αλγεβρικός, άρα υπερβατικός. Επομένως υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί.

2. Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e

Λίγα ιστορικά

Η ιστορία του αριθμού e δεν αρχίζει ούτε με τους λογαριθμικούς πίνακες στις αρχές του 17ου αιώνα ούτε με τη λύση του Jacob Bernoulli στο πρόβλημα του ανατοκισμού (1690), αλλά ούτε και με την (αμφίβολης, θεωρητικά, καθαρότητας) μέθοδο της αντιστροφής των σειρών του Newton λίγο αργότερα.

---

[2] Οι αλγεβρικοί αριθμοί σαν σύνολο αριθμήσιμο μπορούν να ταξινομηθούν σε πίνακα.

[3] Τα παραπάνω επιλεγόμενα δεκαδικά ψηφία πρέπει να είναι διαφορετικά από το 9 για να αποφύγουμε την «ακραία» περίπτωση του 0,9999…

Εκείνος που καλλιέργησε τον «σπόρο» προσδιορισμού της ταυτότητας του e είναι ο Euler (εξ ου και η ονομασία «αριθμός του Euler»). Ο Euler στο έργο του [2] ο-ρίζει τον αριθμό e σαν βάση των φυσικών ή υπερβολικών λογαρίθμων και τον αναπτύσσει σαν σειρά $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ Το 1840 ο Liouville δημοσίευσε την εργασία του με τίτλο «Το άρρητο του αριθμού e=2,718…», στην οποία όμως, δεν αποδεικνύει ότι ο e είναι άρρητος, αλλά ότι δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $ae+{}^{b}\!/_{e}=c,$ με a,b,c ακέραιους. Αμέσως μετά και χωρίς να λάβει υπ' όψη του τα μέχρι τώρα τα συμπεράσματα για τον e, θέτει το πρόβλημα της ταυτότητας του e σε μια εντελώς νέα βάση διατυπώνοντας το ερώτημα: « Είναι ο e ρίζα μιας εξί-σωσης συγκεκριμένου βαθμού με ακέραιους συντελεστές ;». Είναι η πρώτη φορά που τίθεται έμμεσα το πρόβλημα της υπερβατικότητας του e. Τρία χρόνια αργό-τερα ο ίδιος ο Liouville δίνει αρνητική απάντηση στο ερώτημα χρησιμοποιώντας πάλι Σειρές κλασμάτων.
Στο σημείο αυτό (1873) παραλαμβάνει τη σκυτάλη ο Γάλλος Μαθηματικός Charles Hermite (1822-1901), ο οποίος αποδεικνύει ότι ο αριθμός e δεν μπορεί να είναι ρίζα αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, πρόταση που θα δούμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Η υπερβατικότητα του αριθμού e.

Πρόταση (Hermite): Ο αριθμός e δεν είναι αλγεβρικός.

Λόγω του μακροσκελούς της απόδειξης της παραπάνω πρότασης θα παραθέσουμε εδώ μόνο την κεντρική της ιδέα. Μια από τις καλύτερες αποδόσεις της απόδειξης του Hermite για την υπερβατικότητα του e βρίσκεται στο [4].

Κεντρική ιδέα της απόδειξης της πρότασης Hermite: Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός e είναι υπερβατικός, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι συντελεστές $C_0, C_1, \dots, C_n$ που να ικανοποιούν την εξίσωση

$$F(e) = C_0 + C_1 e + \cdots + C_n e^n = 0 \qquad (E)$$

Έστω ότι υπάρχουν ακέραιοι συντελεστές $C_0, C_1, \dots, C_n$ που να ικανοποιούν την εξίσωση $(E).$ Τότε για κάθε ακέραιο M ισχύει

$$MF(e) = MC_0 + MC_1 e + \cdots + MC_n e^n = 0 \qquad (E')$$

Αν μπορούμε να εκλέξουμε ακέραιο M για τον οποίο:

α) Ισχύει $Me^k = M_k + \varepsilon_k$ όπου M_k ακέραιος και e_k γνήσια κλάσματα για $k = 1,2,\dots,n$. Στην περίπτωση αυτή η (E') θα πάρει τη μορφή

$$\left.\begin{aligned} MF(e) = MC_0 + M_1 C_1 + \cdots + MC_n \\ + C_1\varepsilon_1 + \cdots + C_n\varepsilon_n \end{aligned}\right\} = 0 \qquad (E'')$$

β) Το ακέραιο μέρος $MC_0 + MC_1 + \cdots + MC_n$ δεν είναι μηδέν.

γ) Η παράσταση $C_1\varepsilon_1 + \cdots + C_n\varepsilon_n$ είναι ένα κλάσμα «οσοδήποτε» μικρό.

Είναι φανερό, ότι στην περίπτωση αυτή η (E''), άρα και η (E) είναι αδύνατη, αφού το πρώτο μέλος της είναι άθροισμα ενός ακέραιου διάφορου του μηδενός και ενός ανάγωγου κλάσματος. Η όλη προσπάθεια εστιάζεται στην εκλογή ενός τέτοιου ακεραίου και χωρίζεται σε δύο βήματα: στο πρώτο αναζητείται ο ακέραιος

M και, στο δεύτερο, εξετάζεται αν ο ακέραιος M που εκλέχθηκε ικανοποιεί πράγματι τις α), β) και γ).

Πόρισμα: Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Απόδειξη Έστω ότι ο αριθμός e είναι ρητός. Τότε υπάρχουν ακέραιοι a_0, a_1 με $a_1 \neq 0$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $e = \frac{a_0}{a_1}$. Η τελευταία όμως είναι ισοδύναμη με την

$$a_1 e - a_0 = 0, a_0, a_1 \in Z, a_1 \neq 0,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός e είναι αλγεβρικός αριθμός, πράγμα που είναι άτοπο.

3. Ο ΑΡΙΘΜΟΣ π

Οι ιστορικές προσπάθειες υπολογισμού του π συνοπτικά.
Ίσως να μην υπάρχει στην ιστορία των Μαθηματικών μέγεθος που να απασχόλησε περισσότερο τη μαθηματική κοινότητα απ' όσο ο π. Οι προσπάθειες υπολογισμού του έχουν μείνει ιστορικές και χρονολογούνται από το 1500 π.Χ. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται συγκεντρωτικά τα καίρια στοιχεία που αφορούν τις προσπάθειες αυτές.

Αρ.	Χρονολογία	Χώρα	Ερευνητής – Τιμή του π
1.	1500 π.Χ.	Αίγυπτος	έμμεσα: $\pi = (16/9)^2 = 3{,}1604...$
2.	500 π.Χ.	Ινδίες	έμμεσα: $\pi = (26/15)^2 = 3{,}004...$
3.	427-348 π.Χ.	Ελλάδα	Ο ΠΛΑΤΩΝ υπολογίζει: $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14...$
4.	218-287 π.Χ.	Ελλάδα	Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ με τη βοήθεια 96-γώνου προσεγγίζει $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$
5.	120 π.Χ.	Αίγυπτος	Ο AHMES βρίσκει: $\pi = (1{,}5)^2 = 2{,}25$
6.	78-139 π.Χ.	Κίνα	Ο αστρονόμος ZAHNG-HENG υπολογίζει $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1622...$
7.	430-501	Κίνα	Ο TZOU-HONG-TZI υπολογίζει $\pi = {}^{355}\!/_{113} = 3{,}145929203...$
8.	$7^{ος}$ αι.	Ινδίες	Ο ΒΡΑΧΜΑΠΟΥΤΡΑ υπολογίζει $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162234...$
9.	950	Ινδίες	Ο ALHARTZI υπολογίζει: $\pi = 38804665...$
10.	1250	Ιταλία	Ο Leonardo PISANO (FIBONACCI) υπολογίζει: $\pi = 3{,}141818...$
11.	1610	Ολλανδία	Ο LUDOLPH VAN GEULEN υπολογίζει τον π με προσέγγιση 35 δεκαδικών ψηφίων.
12.	1659	Αγγλία	Ο WALLIS υπολογίζει με ολοκλήρωση: $\frac{\pi}{4} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots$
13.	1665	Αγγλία	Ο NEWTON βρίσκει το $\arcsin x$ και βάσει αυτού:

			$\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots$
14.	1673	Γερμανία	Ο LEIBNIZ εκφράζει το π με τη σειρά του GREGORY, αξιοποιώντας τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης που είχε βρει.
15.	1734	Ελβετία	Ο EULER βρίσκει νέους τύπους υπολογισμού όπως $\frac{\pi^2}{6}=1+2^{-2}+3^{-2}+4^{-2}+\cdots$
16.	1841	Αγγλία	Ο William RUTHERFORD υπολογίζει 208 δεκαδικά ψηφία του π, από τα οποία είναι σωστά τα πρώτα 152
17.	1882	Γερμανία	Ο LINDEMANN αποδεικνύει την υπερβατικότητα του π
18.	1949	Αμερική	Ο George REITWIESER υπολογίζει 2 εκατ. δεκαδικά ψηφία του π.
19.	1984	Καναδάς	Καναδοί Μαθηματικοί υπολογίζουν 16 εκατ. δεκαδικά ψηφία του π.
20.	1989	Αμερική	Οι αδελφοί CUDNOWOSKIJ υπολογίζουν 1,13 δισεκατομμύρια Δεκαδικά ψηφία του π.

Σε σχέση με τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα θα μπορούσε να παρατηρήσει κανείς τα ακόλουθα:

1. Οι υπολογισμοί των Αιγυπτίων και των Ινδών ήταν καθαρά εμπειρικοί.
2. Σταθμό αποτελεί η έρευνα του Αρχιμήδη «Κύκλου μέτρησις», όπου με τη βοήθεια του κανονικού 96-γώνου «εγκλωβίζει» το π σε πολύ στενά όρια.
3. Η εποχή από το 1660 μέχρι το 1770 χαρακτηρίζεται από τα ονόματα κυρίως των Leibniz, Newton, Euler. Είναι η περίοδος ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού, με τη βοήθεια του οποίου υπολογίσθηκαν εκφράσεις του π μέσω σειρών και ολοκλήρωσης. Επί πλέον, αρχίζει να διαφαίνεται η σχέση μεταξύ του π και του e. Σχέσεις μεταξύ αυτών των δύο βρίσκονται στα γραπτά δοκίμια του Άγγλου Napier (1614). Ο ίδιος, όμως, διστάζει να γνωστοποιήσει τις έρευνές του, μέχρι που ο ίδιος ο Euler βρήκε το «θάρρος» να χρησιμοποιήσει μιγαδικούς εκθέτες και να αποδείξει τη σχέση $e^{ix}=\sigma\upsilon\nu x+i\eta\mu x$, απ' όπου για $x=\pi$ προκύπτει η πιο «παράξενη» ίσως σχέση στην Ιστορία των Μαθηματικών $e^{i\pi}=-1$.
4. Το 1770 και 1794 οι Lambert και Legendre αποδεικνύουν το άρρητο των π και π^2.
5. Περίπου 100 χρόνια αργότερα, το 1873, ο Hermite αποδεικνύει, όπως είδαμε, την υπερβατικότητα του e και ο Lindemann, το 1882, την υπερβατικότητα του π, θέμα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.
6. Ο εικοστός αιώνας είναι ο αιώνας των Ηλ. Υπολογιστών. Με τη βοήθειά τους υπολογίστηκαν δισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία του π. Διαπιστώθηκε ότι τα ψηφία 0,1,…,9 εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα.

Η υπερβατικότητα του αριθμού π.

Η απόδειξη της υπερβατικότητας του π οφείλεται στο διάσημο Γερμανό Μαθηματικό Ferdinand von Lindemann (1852-1939) και παρουσιάσθηκε για πρώτη φορά το 1882 στην Ακαδημία του Βερολίνου, για να δημοσιευθεί στη συνέχεια στο

περιοδικό Mathematische Annalen, τόμος 19, με τίτλο "Űber die Ludolphsche Zahl" (ο αριθμός του Ludolph).
Το έναυσμα στον Lindemann για να ασχοληθεί επισταμένως με την υπερβατικότητα του π του το έδωσε ο ίδιος ο Hermite. Σε μια συνάντησή των δύο στο Παρίσι, ο Hermite παρουσιάζοντας του την εργασία του για τον e
είπε: «Είναι η ωραιότερη εργασία της ζωής μου και σας τη συνιστώ θερμά. Δυστυχώς όμως δεν μπόρεσα να επεκτείνω τις ιδέες μου για τον π.»[7]
Η έμμεση προτροπή του Hermite προς τον Lindemann βρήκε πρόσφορο έδαφος. Η διαδικασία που ακολούθησε ο Lindemann για να αποδείξει την υπερβατικότητα του π, θεωρείται γενίκευση των ιδεών του Hermite για την υπερβατικότητα του e. Συγκεκριμένα, ενώ ο Hermite θεώρησε τις εξισώσεις της μορφής $c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_n e^n = 0$ με $c_i \in Z, i = 1,2,\ldots,n$ ο Lindemann θεωρεί στη θέση των e^k αθροίσματα της μορφής $e^{k_1} + e^{k_2} + \cdots + e^{k_N}$, όπου τα $k_1, k_2, \ldots, k_N$ είναι αλγεβρικοί αριθμοί «εξαρτώμενοι μεταξύ τους», δηλαδή είναι ρίζες της ίδιας αλγεβρικής εξίσωσης, ενώ θεώρησε μετά (πρβλ. και Πρόταση (2) στη συνέχεια) και την περίπτωση των «μη εξαρτώμενων μεταξύ» τους εκθετών.
Τα παραπάνω παρουσιάζονται στις επόμενες προτάσεις, οι οποίες λόγω του μακροσκελούς των αποδείξεών τους και του περιορισμένου του χώρου αυτής της εργασίας παρατίθενται χωρίς αυτές. (πρβλ.[4]).

Πρόταση (1): Ο αριθμός e δεν μπορεί να ικανοποιεί μιαν εξίσωση της μορφής

$$C_0 + C_1(e^{k_1} + e^{k_2} + \cdots + e^{k_N}) + C_2(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} + \cdots + e^{\lambda_N}) + \ldots = 0 \qquad (E_1)$$

όπου $C_i \in Z$ και οι εκθέτες κάθε παρένθεσης είναι «εξαρτώμενοι μεταξύ τους» αλγεβρικοί αριθμοί.

Η κεντρική ιδέα και η πορεία της απόδειξης της πρότασης αυτής είναι της ίδιας δομής με εκείνη της πρότασης του Hermite στην παράγραφο 2.

Πρόταση (2): Μια εξίσωση

$$0 = C_0^{'} + C_1^{'} e^{k_1} + C_2^{'} e^{\lambda_1} + \cdots \qquad (E_2)$$

όπου οι συντελεστές $C^{'}$ είναι ακέραιοι, είναι αδύνατη, ακόμα και όταν οι εκθέτες k_i, λ_i δεν είναι «εξαρτώμενοι μεταξύ τους» αλγεβρικοί αριθμοί.

Το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω.

Πόρισμα (3): Ο αριθμός e δεν μπορεί να ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$0 = C_0^{(1)} + C_1^{(1)} e^{k} + C_2^{(1)} e^{\lambda} + \cdots \qquad (E_3)$$

όπου τόσο οι συντελεστές C όσο και οι (όχι απαραίτητα «εξαρτώμενοι μεταξύ τους») εκθέτες $k, \lambda, \ldots$ είναι αλγεβρικοί αριθμοί.

Επομένως,

Θεώρημα Lindemann
Αν ο αριθμός e ικανοποιεί μιαν εξίσωση της μορφής

$$C_0 + C_1 e^k + C_2 e^\lambda + \cdots = 0,$$

τότε δεν μπορούν όλοι οι συντελεστές και οι εκθέτες της εξίσωσης αυτής να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί αριθμοί.

Άρα

Πόρισμα (4): Ο αριθμός π είναι υπερβατικός.
Απόδειξη Από τη σχέση $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ για $x = \pi$ προκύπτει:

$$e^{i\pi} = -1 \text{ ή } 1 + e^{i\pi} = 0.$$

Οι συντελεστές αυτής της ως προς e εξίσωσης είναι αλγεβρικοί. Αυτό σημαίνει ότι ο εκθέτης $i\pi$ δεν είναι αλγεβρικός που σημαίνει ότι ο π είναι υπερβατικός.

Σημείωση: Από την υπερβατικότητα του π προκύπτει άμεσα και το άρρητο αυτού (πρβλ. Πόρισμα παράγρ. 2).

4. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟΥΣ ΥΠΕΡ-ΒΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Α. Αν $y + (-1)e^x = 0$ δηλαδή $y = e^x$, τότε από το Θεώρημα Lindemann της προηγούμενης παραγράφου, συνάγεται ότι τα y και x (δηλαδή το πρότυπο και η εικόνα της εκθετικής συνάρτησης) δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί αριθμοί. Αυτό σημαίνει ότι για $x \neq 0$ αλγεβρικό αριθμό το e^x είναι υπερβατικός αριθμός, δηλαδή το σημείο (0,1) είναι μοναδικό σημείο του γραφήματος της $y = e^x$ με συντεταγμένες αλγεβρικούς αριθμούς. Για το λόγο αυτό η καμπύλη $y = e^x$ λέγεται και υπερβατική.

Β. Ανάλογα ισχύουν και για την καμπύλη

$$y + ie^{\frac{ix}{2}} - ie^{-\frac{ix}{2}} = 0 \text{ ή } y = 2\sin\frac{x}{2},$$

με ένα μόνο σημείο με αλγεβρικές συντεταγμένες, το (0,0), και όλα τα άλλα υπερβατικά.

Γ. Στην ερώτηση «είναι ένας δεδομένος αριθμός x υπερβατικός;» η απάντηση δεν είναι απλή. Μόλις το 1900 στο μαθηματικό Συνέδριο των Παρισίων ο Hilbert έθεσε, ανάμεσα στα άλλα και το, γνωστό σαν 7^o πρόβλημα, αν ο αριθμός a^b, όπου ο a είναι αλγεβρικός αριθμός διαφορετικός του 0 και του 1 και ο b είναι άρρητος ή μιγαδικός αλγεβρικός αριθμός (όπως για παράδειγμα ο $2^{\sqrt{2}}$ ή ο i^{-2i}) είναι υπερβατικός ή όχι. Οι Gelfond και Schneider απέδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο το 1934, ότι ο a^b με τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι υπερβατικός [3]. Παρ' όλα αυτά, το να αποφανθεί κανείς για την υπερβατικότητα ή μη ενός αριθμού εξακολουθεί να μην είναι απλή υπόθεση. Για παράδειγμα:

1. Ο Mahler απέδειξε ότι ο δεκαδικός αριθμός

   $$0{,}1234567891011121314\ldots$$

   με δεκαδικά ψηφία την ακολουθία των φυσικών αριθμών είναι υπερβατικός.
2. Ο αριθμός

$$e^{\pi}=e^{(i\pi)(-i)}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{-i}=(-1)^{-i}$$

είναι υπερβατικός, αλλά για τον π^{e} δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

3. Από τη ισότητα

$$e^{2}-(\pi+e)e+\pi e=0$$

και το Θεώρημα Lindemann προκύπτει ότι οι αριθμοί $\pi+e$ και πe δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί. Δε γνωρίζουμε εν τούτοις ποιος εκ των δύο είναι υπερβατικός.

Δ. Το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.

Πράγματι: αν A το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών, T το σύνολο των υπερβατικών αριθμών και R το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε είναι: $A\cup T=R$

Ισχύουν όμως:

- Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών A είναι αριθμήσιμο (πρβλ. παράγρ. 1, Πρόταση Cantor).
- Η ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο αριθμήσιμο [6].
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο [6].

Άρα και το σύνολο των υπερβατικών αριθμών T είναι υπεραριθμήσιμο.

Είναι προφανές, επομένως, ότι μεταξύ των αριθμών οι υπερβατικοί αποτελούν τον κανόνα, οι δε αλγεβρικοί την εξαίρεση.

Ε. Με την υπερβατικότητα του π λύθηκε, ως γνωστόν, με αρνητικό τρόπο το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο G. H. Hardy, στην εργασία του «Η απολογία ενός Μαθηματικού» [7], αναφέρει ότι τα Μαθηματικά πρέπει να διέπονται ταυτόχρονα από σοβαρότητα και ομορφιά. Η υπερβατικότητα των αριθμών e και π καθώς και το σύνολο των υπερβατικών αριθμών γενικότερα, πιστεύουμε ότι είναι ένα μικρό δείγμα συνδυασμού των παραπάνω χαρακτηριστικών.

Βιβλιογραφία

[1] Cantor, G.: Űber eine Eigenschaft des Inbegriffs reeler algebraischen Zahlen, Αρχείο του Πανεπιστημίου του Würzburg Γερμανίας.
[2] Euler, L.: Introductio in Anallysin infitorum, T.1,1748.
[3] Gelfond, A.D.: Zum siebten Hilbertschen Problem, Ostwalds Klassiker, Bd. 252, 1919.
[4] Klein F.: Vorträge über ausgewählte Themen der Elementargeometrie, Leipzig 1895.
[5] Liouville, J.: Coptes rendus, 1844 et Liouville’s Journ., 16, 1851
[6] Νεγρεπόντης Στ.: Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης , Εκδόσεις Παν/μίου Αθηνών, 1976.
[7] Volk, Otto: Vorlesungen über “Die Kunst des Rechens” Vortragsmanusskript, Παν/μιο Würzburg Γερμανίας.