

3ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΡΙΝΘΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 7 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ(3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2.α) Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$; (μονάδες 4)
β) Πότε μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ ; (μονάδες 4)

Μονάδες 8

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα διάστημα $[a,b]$ τότε η γραφική της παράσταση δέχεται τουλάχιστον μια εφαπτόμενη παράλληλη στον οριζόντιο άξονα σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του $[a,b]$.

Μονάδες 2

β) Μια συνάρτηση 1-1 στο πεδίο ορισμού της είναι πάντα και γνησίως μονότονη σε αυτό.

Μονάδες 2

γ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

δ) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

ε) Αν F μια αρχική της συνάρτησης f στο διάστημα Δ τότε $\frac{dF}{dx} = f$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln^2 x$, $x > 0$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις θέσεις ακροτάτων και τα σημεία καμπής της f .

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε ότι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της f στο $x=0$ είναι και ασύμπτωτη της g στο $x=0$.

Μονάδες 4

B3. Αν η ευθεία $x=\alpha$ με $1<\alpha<e$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των f και g αντίστοιχα στα σημεία A και B έτσι ώστε το μήκος του AB να είναι μέγιστο, να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{e}$.

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g , τον άξονα των x και τις ευθείες AB και $x=e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 2 \\ e^{x-2} - \alpha & , x \geq 2 \end{cases}$ και $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Αν η f είναι συνεχής να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Για $\alpha = 2$

Γ2. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης g (μονάδες 3) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα το $x = 2$ (μονάδες 4).

Μονάδες 7

Γ3. Σημείο M κινείται επάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g με την τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό $x'(t) = 1$ μετρική μονάδα /sec. Να προσδιορίσετε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M την χρονική στιγμή κατά οποία η εφαπτόμενη της g στο M σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των x .

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι κάθε x στο (e, π) ισχύει $(\pi - e) \cdot e^{e-2} < f(\pi) - f(e) < (\pi - e) \cdot e^{\pi-2}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε:

- έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.
- $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$.
- η g παρουσιάζει (ολικό)ελάχιστο στις θέσεις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

- α) η γραφική παράσταση της συνάρτησης g **δεν** βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα (μονάδες 3)
- β) η συνάρτηση g **δεν** είναι κοίλη (μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται τουλάχιστον μια εφαπτόμενη παράλληλη στον οριζόντιο άξονα σε σημείο $x_0 \in (-1,1)$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} f'(x) = f'(x_0)$, με x_0 από το ερώτημα Δ2.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x) f'(x) dx \leq 0$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το Εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.
Στην αρχή των απαντήσεων σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομα σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο σας και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

3ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΡΙΝΘΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 7 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ(3)

(ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** ΘΕΩΡΙΑ
A2. α) ΘΕΩΡΙΑ
β) ΘΕΩΡΙΑ
A3. Σ-Λ-Σ-Λ-Σ

ΘΕΜΑ Β (προσαρμογή του θεματος 33648 της τραπεζας θεματων ΙΕΠ)

- B1.** α) i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{D}_f = (0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2 \frac{\ln x}{x}$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f ,

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=0$.

ii. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 2 \frac{x \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Το πρόσημο της $f''(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f ,

- είναι κυρτή στο διάστημα $(0, e]$ και κοίλη στο $[e, +\infty)$
- παρουσιάζει καμπή για $x=e$. Το σημείο καμπής είναι το $M(e, 1)$.

B2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$ οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ που είναι η κατακορυφή ασυμπτωτη της g .

B3. Στο διάστημα $[1, e]$ ισχύει $g(x) \geq f(x)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(\alpha) = \ln \alpha - \ln^2 \alpha$, $\alpha \in (1, e)$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$d'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - 2\ln \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(1 - 2\ln \alpha)$$

και ισχύει

$$d'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \ln \alpha \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < \alpha \leq \sqrt{e}$$

οπότε η d είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, \sqrt{e})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\sqrt{e}, e)$. Επομένως η συνάρτηση d παίρνει την μέγιστη τιμή της, δηλαδή το μήκος του τμήματος AB γίνεται μέγιστο, όταν $\alpha = \sqrt{e}$.

B4. $E = \int_{\sqrt{e}}^e |\ln x| dx \stackrel{\ln x > 0}{=} \int_{\sqrt{e}}^e \ln x dx = \dots$

ΘΕΜΑ Γ(προσαρμογή του θεματος 27455 της τραπεζας θεματων ΙΕΠ)

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = -1$, ποτε $\alpha = 2$

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x < 2$ με $f'(x) = 0$, ως σταθερή και για $x > 2$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = e^{x-2}(x-2)' = e^{x-2} > 0$, για κάθε $x > 2$.

Άρα η f είναι σταθερή με $f(x) = -1$ στο $(-\infty, 2)$, γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και συνεχής στο 2. Οπότε για $x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$.

Οπότε ισχύει ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η g έχει μέγιστο το -1 στο $x=2$ και επομένως (από Γ2) ισχύει $f(x) \geq -1 \geq g(x)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$

Γ3. Είναι $g'(x_0) = -x_0 + 2 = \tan 45^\circ = 1$ οπότε $x_0 = 1$ και επομένως $y'(1) = -x'(1)x(1) + 2 = -1 + 2 = 1$

Γ4. Για κάθε $x > 2$ είναι $f''(x) = e^{x-2} > 0$ οπότε f κυρτή αρα f' γνησίως αυξουσα.

Από ΘΜΤ για τη f στο $[e, \pi]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 στο (e, π) ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e}$

$$e < x_0 < \pi \stackrel{f' \text{ γνησίως αυξουσα}}{\Rightarrow} f'(e) < f'(x_0) < f'(\pi)$$

$$\Rightarrow e^{e-2} < \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} < e^{\pi-2} \Rightarrow (\pi - e)e^{e-2} < f(\pi) - f(e) < (\pi - e)e^{\pi-2}$$

ΘΕΜΑ Δ (προσαρμογή του θεματος 24758 της τραπεζας θεματων ΙΕΠ)

Δ1. α) Η g έχει ελάχιστο στα -1 και 1 οπότε $g(x) \geq g(-1) = g(1) = 0$

β) Από θεώρημα FERMAT $g'(-1) = g'(1) = 0$ οπότε η g' δεν είναι γνησίως μονοτονή οπότε ούτε η g είναι κοίλη (ούτε βεβαία κυρτή)

Δ2. $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$ οπότε $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $g'(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.
Εφαρμόζουμε ROLLE για την f στο $[-1, 1]$.

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(e^{x-x_0} - 1)f(x)}{x - x_0} \stackrel{0/0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow x_0} \frac{[(e^{x-x_0} - 1)f(x)]'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0}f(x) + (e^{x-x_0} - 1)f'(x)}{1}$$

f' συνεχής
 $\stackrel{f'(x_0)=0}{=} e^{x_0-x_0}f(x_0) = f(x_0)$

$$\Delta 4. \int_0^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx = [(x^3 - 3x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 (3x^2 - 3)f(x)dx = 0 - 0 - 3 \int_0^1 (x^2 - 1)f(x)dx \leq 0$$

αφού $(x^2 - 1)f(x) = g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $\int_0^1 (x^2 - 1)f(x)dx \geq 0$ και τελικά

$$-3 \int_0^1 (x^2 - 1)f(x)dx \leq 0. \text{ Συνεπώς } \int_0^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0.$$