

ΓΕΝΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ(από το ΑΣΚΙΣΟΠΟΛΙΣ)

8ο Κεφάλαιο: Ομοιότητα

- 1. Πότε δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια; Τι ονομάζεται λόγος ομοιότητας αυτών; Με τι ισούται ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθυγράμμων σχημάτων;**

Απάντηση

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ .

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

- 2. Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων;**

Απάντηση

1ο κριτήριο ομοιότητας

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

2ο κριτήριο ομοιότητας

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

3ο κριτήριο ομοιότητας

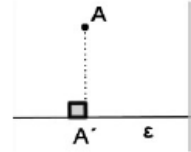
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

9ο Κεφάλαιο: Μετρικές σχέσεις

1. Ορθές προβολές

8. Τι ονομάζεται προβολή ενός σημείου A σε μια ευθεία ε ;
Απάντηση

Το ίχνος A' της καθέτου που φέρουμε από το A προς την ε το λέμε ορθή προβολή ή απλώς προβολή του A στην ευθεία ε .



2. Πυθαγόρειο θεώρημα

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα

Απόδειξη

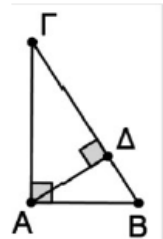
Ασκησίοπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα

$AB\Gamma$ και ΔBA είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή.

Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.



10. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων προκύπτει ότι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = B\Gamma \cdot (B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$$

11. Με τι ισούται ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και γιατί;

Απάντηση

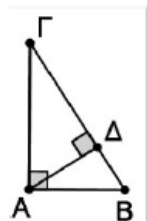
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Γνωρίζουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Διαιρώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:

Διαιρώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Gamma \cdot B\Delta}{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$



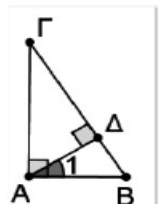
12. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Έστω $A\Delta$ το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της B . Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες,

δηλαδή $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$.



3. Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

13. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη

Έστω ότι στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} < 90^\circ$ και $A\Delta$ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β , θα αποδείξουμε ότι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$, $\Delta B A$ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$$

Επειδή είναι $\hat{A} < 90^\circ$ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του A και ειδικότερα:

- αν $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ το Δ βρίσκεται μεταξύ των A, Γ οπότε $\Delta \Gamma = \beta - A\Delta$.
- αν $\hat{\Gamma} > 90^\circ$ το Γ βρίσκεται μεταξύ των A, Δ οπότε $\Delta \Gamma = A\Delta - \beta$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

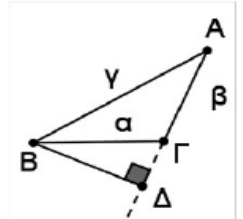
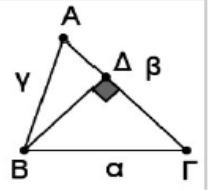
$$\Delta \Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ στην $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2$ προκύπτει ότι

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Αν τέλος $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma A B$ δίνει

$$\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2 \text{ που γράφεται } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta, \text{ αφού } A\Delta = \beta.$$



14. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} > 90^\circ$ και $A\Delta$ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β , τότε ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $\Delta B A$, παίρνουμε αντίστοιχα:

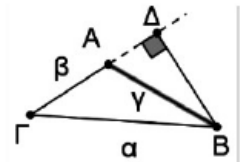
$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2.$$

Επειδή $\hat{A} > 90^\circ$ το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓA προς το A και επομένως

$$\Delta \Gamma = \beta + A\Delta \text{ οπότε } \Delta \Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και $\Delta \Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$ στη σχέση

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2, \text{ προκύπτει η ζητούμενη ισότητα } \alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$



15. Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε μια γωνία του να είναι αμβλεία, ορθή ή οξεία;

Απάντηση

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} > 90^\circ$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} = 90^\circ$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} < 90^\circ$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

16. Ποιος είναι ο νόμος των συνημιτόνων;

Απάντηση

$$\text{Σε κάθε τρίγωνο } AB\Gamma \text{ ισχύει η σχέση : } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$$

10ο Κεφάλαιο: Εμβαδά

1. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

17. Πότε δύο σχήματα λέγονται ισοδύναμα ή ισεμβαδικά;

Απάντηση

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα ή ισεμβαδικά.

18. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a ;

Απάντηση

Το εμβαδόν E ενός τετραγώνου πλευράς a είναι a^2 , δηλαδή: $E = a^2$.

19. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή αν a, β οι πλευρές και E το εμβαδόν του, τότε $E = a \cdot \beta$.

Απόδειξη

Έστω ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με $AB = a$ και $AD = \beta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AD κατά τμήμα $\Delta E = \alpha$, την AB κατά $BI = \beta$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο $AIHE$, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά $\alpha + \beta$ και επομένως είναι:

$$(AIHE) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1)$$

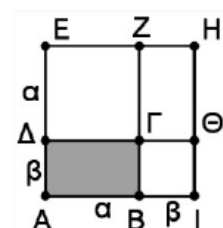
Προεκτείνοντας τις $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ σχηματίζονται τα τετράγωνα $\Delta\Gamma ZE$, $BI\Theta\Gamma$ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο $\Gamma\Theta HZ$ που είναι ίσο με το $AB\Gamma\Delta$. Είναι

$$(\Delta\Gamma ZE) = \alpha^2, \quad (BI\Theta\Gamma) = \beta^2 \quad \text{και} \quad (\Gamma\Theta HZ) = (AB\Gamma\Delta) \quad (2).$$

Είναι $(AIHE) = (AB\Gamma\Delta) + (\Gamma\Theta HZ) + (BI\Theta\Gamma) + (\Delta\Gamma ZE)$, οπότε από τις (1), (2) προκύπτει:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(AB\Gamma\Delta) + \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2(AB\Gamma\Delta) + \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$$



20. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή, δηλαδή

$E = a u_a = \beta u_\beta$, όπου a, β οι πλευρές και u_a, u_β τα αντίστοιχα ύψη.

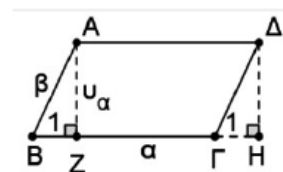
Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και ας φέρουμε το ύψος AZ που αντιστοιχεί στη $B\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AZ$.

Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Τότε τα τρίγωνα ZBA και $H\Gamma\Delta$ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, $AB = \Delta\Gamma$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε:

$$(ZBA) = (H\Gamma\Delta) \quad (1). \quad \text{Όμως} \quad (AB\Gamma\Delta) = (ABZ) + (AZ\Gamma\Delta), \quad \text{οπότε σύμφωνα}$$

με την (1) προκύπτει ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AZ\Gamma\Delta) + (\Delta\Gamma H) = (AZH\Delta)$.



Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = (AZH\Delta) = A\Delta \cdot AZ = B\Gamma \cdot AZ$.

21. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το

$$\text{αντίστοιχο ύψος, δηλαδή } E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon_{\beta} = \frac{1}{2} \gamma \cdot \upsilon_{\gamma}.$$

Απόδειξη

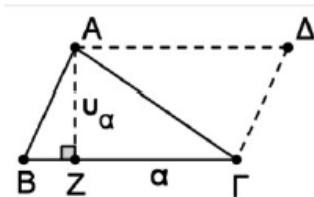
Με πλευρές AB και $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το εμβαδόν του οποίου είναι $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \upsilon_{\alpha}$ (1).

Όμως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι ίσα, οπότε:

$$(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$ η οποία, σύμφωνα

$$\text{με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην } \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = 2(AB\Gamma) \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_{\alpha}.$$



22. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των

$$\text{βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή } E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot \upsilon.$$

Απόδειξη

Έστω τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$), με βάσεις $B\Gamma = B$, $A\Delta = \beta$ και ύψος υ .

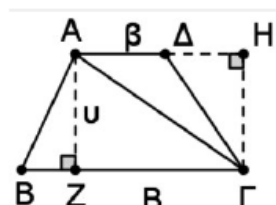
Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$. Τότε έχουμε

$$E = (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις B , β αντίστοιχα και επομένως:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B \cdot \upsilon \text{ και } (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon \quad (2),$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot \upsilon$, δηλαδή το ζητούμενο.



23. Ποια σχέση συνδέει το εμβαδόν τραπεζίου με τη διάμεσό του;

Απάντηση

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

24. Ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a ; Πως υπολογίζετε το εμβαδόν ρόμβου με διαγώνιες δ_1, δ_2 ;

Απάντηση

Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου είναι: $E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$ και του ρόμβου: $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

2. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

25. Να γράψετε τον τύπο του Ήρωνα.

Απάντηση

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}, \text{ όπου } \tau \text{ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.}$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

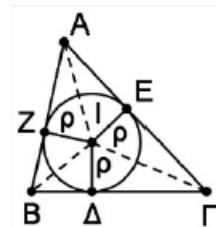
26. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E ενός τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ είναι
 $E = \tau\rho$.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (I, ρ) . Τα τρίγωνα $IB\Gamma$, $ΙΓΑ$ και $ΙΑΒ$ έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε:

$$E = (AB\Gamma) = (IAB) + (IB\Gamma) + (IAG) \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma\rho + \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho = \frac{1}{2}\tau\rho = \tau\rho$$



27. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E ενός τριγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\beta\gamma = 2Ru_\alpha$, οπότε $u_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$.

$$\text{Είναι } E = \frac{1}{2}\alpha \cdot u_\alpha = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\beta\gamma}{2R} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

28. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

Απόδειξη

Αν $\hat{A} < 90^\circ$ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ ισχύει ότι:

$$\eta\mu A = \frac{u_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow u_\beta = \gamma\eta\mu A$$

Αν $\hat{A} > 90^\circ$ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ ισχύει ότι:

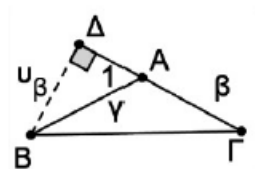
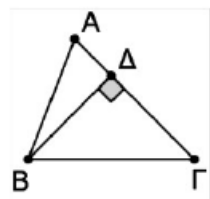
$$\eta\mu A_1 = \frac{u_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow u_\beta = \gamma\eta\mu(180^\circ - A) = \gamma\eta\mu A$$

Οπότε και στις δύο περιπτώσεις είναι $u_\beta = \gamma\eta\mu A$, άρα

$$E = \frac{1}{2}\beta u_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A.$$

Όταν $\hat{A} = 90^\circ$, τότε $u_\beta = \gamma$ και πάλι ισχύει ο τύπος.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.



29. Ποιος είναι ο νόμος των ημιτόνων;

Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

3. Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων - πολυγώνων

30. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων που έχουν ίσες βάσεις ή ίσα ύψη;

Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

31. Να αποδείξετε ότι αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.

Είναι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{u_\alpha}{u_{\alpha'}} = \lambda$, όπου λ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων.

$$\text{Είναι } \frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}\alpha u_\alpha}{\frac{1}{2}\alpha' u_{\alpha'}} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{u_\alpha}{u_{\alpha'}} = \lambda^2$$



32. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

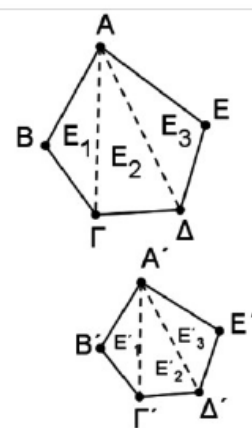
Έστω τα όμοια πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ και $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ με λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \lambda.$$

Για τα εμβαδά $E_1, E_2, E_3, E'_1, E'_2, E'_3$ του διπλανού σχήματος ισχύει ότι:

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \lambda^2, \quad \frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}\right)^2 = \lambda^2, \quad \frac{E_3}{E'_3} = \left(\frac{\Delta E}{\Delta'E'}\right)^2 = \lambda^2,$$

$$\text{οπότε: } \lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \frac{E_3}{E'_3} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{E'_1 + E'_2 + E'_3} = \frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E')}$$

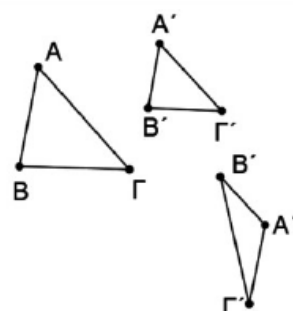


33. Να αποδείξετε ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$, τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ότι

$$\eta\mu A = \eta\mu A', \text{ οπότε: } \frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A}{\frac{1}{2}\beta'\gamma' \eta\mu A'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}.$$



11ο Κεφάλαιο: Μέτρηση κύκλου

Κανονικά πολύγωνα

1.Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

34.Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό; Με τι ισούται η γωνία κανονικού n - γώνου;

Απάντηση

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.
Έστω $A_1A_2...A_n$ ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές και έστω

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dots = \hat{A}_n = \varphi_n. \text{ Τότε } \varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

35.Πότε δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

Αν δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

37.Τι ονομάζεται κέντρο, τι ακτίνα, τι απόστημα και τι κεντρική γωνία του κανονικού πολυγώνου;

Απόδειξη

Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται κέντρο του πολυγώνου.

Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ακτίνα του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται απόστημα του πολυγώνου.

Επειδή τα τόξα $AB, B\Gamma, \dots, TA$ είναι ίσα, οι επίκεντρες γωνίες $\hat{A}\hat{O}B, \hat{B}\hat{O}\Gamma, \dots, \hat{T}\hat{O}A$ είναι ίσες.

Καθεμία από τις γωνίες αυτές, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται κεντρική γωνία του πολυγώνου.

38.Να αποδείξετε ότι σε κάθε κανονικό n -γωνο ακτίνας R ισχύουν οι σχέσεις:

i. $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$

ii. $P_n = n\lambda_n$

iii. $\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$

iv. $E_n = \frac{1}{2}P_n\alpha_n$

Απόδειξη

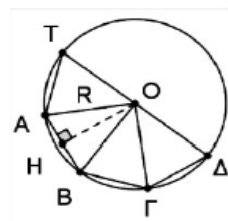
i. Έστω $AB\Gamma\Delta...T$ ένα κανονικό n - γωνο, R η ακτίνα του,

$AB = \lambda_n$ η πλευρά του και $OH = \alpha_n$ το απόστημά του.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο HOA , με εφαρμογή του

Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει $OH^2 + HA^2 = OA^2$,

$$\text{δηλαδή } \alpha_n^2 + \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 = R^2.$$



ii. Επειδή $AB = B\Gamma = \dots = TA = \lambda_n$, θα είναι $P_n = n \cdot \lambda_n$.

iii. Επειδή $AB = B\Gamma = \dots = TA$ θα είναι $\hat{A}\hat{O}B = \hat{B}\hat{O}\Gamma = \dots = \hat{T}\hat{O}A = \omega_n$ και αφού οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$,

$\hat{B}\hat{O}\Gamma, \dots$ και $\hat{T}\hat{O}A$ έχουν άθροισμα 360° , έχουμε $n \cdot \omega_n = 360^\circ$, δηλαδή $\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$.

iv. Τα τρίγωνα $OAB, OBG, \dots, OTA$ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε:

$$E_n = n(OAB) = n \cdot \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}n\lambda_n\alpha_n = \frac{1}{2}P_n\alpha_n$$

39. Να αποδείξετε ότι σε δύο κανονικά n -γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Απόδειξη

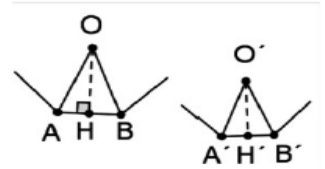
Έστω δύο κανονικά πολύγωνα $AB\Gamma\ldots\Gamma$ και $A'B'\Gamma'\ldots\Gamma'$ με το ίδιο πλήθος πλευρών, έστω n ($n \geq 3$).

Αν O, O' τα κέντρα των πολυγώνων, τα τρίγωνα OAB και $O'A'B'$ είναι

όμοια γιατί είναι ισοσκελή και έχουν $\angle AOB = \angle A'O'B' = \frac{360^\circ}{n}$ και επομένως

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OH}{O'H'}, \text{ όπου } OH, O'H' \text{ τα ύψη των τριγώνων. Από την}$$

$$\text{τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: } \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_n}{\alpha'_n}.$$



2. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

40. Να κατασκευάσετε τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση

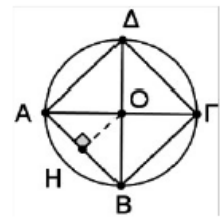
Έστω ένας κύκλος (O, R) και δύο κάθετες διαμέτροι AG και BD . Είναι

$\angle AOB = \angle BO\Gamma = \angle \Gamma OD = \angle DOA = 90^\circ$, οπότε

$AB = B\Gamma = \Gamma D = DA$ και επομένως το $AB\Gamma D$ είναι τετράγωνο.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε $\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \lambda_4 = R\sqrt{2}$

$$\text{Είναι } \alpha_4^2 + \frac{\lambda_4^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_4^2 + \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_4^2 = R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

41. Να κατασκευάσετε κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση

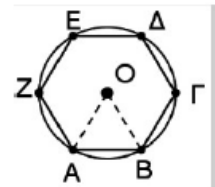
Έστω κύκλος (O, R) και AB η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (O, R) . Τότε $\angle AOB = \omega_6 = 60^\circ$ και επειδή $OA = OB (=R)$ το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο.

Άρα $AB = OA = R$, δηλαδή $\lambda_6 = R$.

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον

κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $AB, B\Gamma, \Gamma D, DE, EZ$ και ZA με αντίστοιχη χορδή R , το καθένα, οπότε το $AB\Gamma DEZ$ είναι κανονικό εξάγωνο.

$$\text{Είναι } \alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_6^2 + \frac{R^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



42. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση

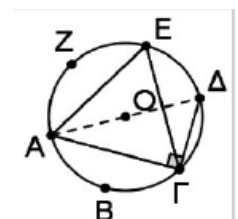
Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα

σημεία A, Γ, E είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\angle A\Gamma E = \angle \Gamma E A = \angle E A \Gamma = 120^\circ$.

Επειδή $\angle A\Gamma \Delta = 180^\circ$, η $A\Delta$ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο $A\Gamma \Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε:

$$\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Είναι } \alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_3^2 + \frac{3R^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_3^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{R}{2}$$



3. Μήκος κύκλου- Μήκος τόξου

43. Από ποιον τύπο υπολογίζετε το μήκος κύκλου ακτίνας R; Ποιο τόξο κύκλου λέγεται ακτίνιο(rad); Από ποιον τύπο υπολογίζεται το μήκος τόξου μ μοιρών και α rad;

Απάντηση

Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$

Ακτίνιο λέγεται ένα τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Μήκος τόξου μ μοιρών: $\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$

Μήκος τόξου α rad: $\ell = \alpha R$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

4. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου – κυκλικού τομέα – κυκλικού τμήματος

44. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R; Από ποιον τύπο υπολογίζετε το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ μοιρών και α rad;

Απάντηση

Το εμβαδόν E ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $E = \pi R^2$.

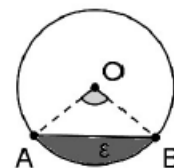
Το εμβαδόν κυκλικού τομέα κέντρου O και αντιστοίχου τόξου AB δίνεται από τους τύπους:

$$(\text{OAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} \text{ και } (\text{OAB}) = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

45. Πως υπολογίζετε το εμβαδόν κυκλικού τμήματος που σχηματίζεται από χορδή AB σε κύκλο (O,R);

Απάντηση

Η AB χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής. Καθένα από αυτά τα μέρη λέγεται κυκλικό τμήμα. Το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία AOB υπολογίζεται με τη βοήθεια της ισότητας $\varepsilon = (\text{OAB}) - (\text{OAB})$ δηλαδή αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα το εμβαδόν του τριγώνου OAB.



2. ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ (ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΛΑΤΦΟΡΜΑ ΤΟΥ Ι.Ε.Π. [ΕΔΩ](#))

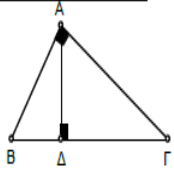
14534.	14536.	16100	14499	16805.	22514.	17348	16101	16804	21302.
18550	18560	22032	22331	16135	18565	29849	18370	21194	22101
20638	21122	21298	22046	20672	21121	22021	22024	22261	22098

3. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

- Αν α, β, γ οι πλευρες τριγωνου $AB\Gamma$ και $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε η γωνια A είναι οξεια
- Αν α, β, γ οι πλευρες τριγωνου $AB\Gamma$ τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$
- Σε κάθε ορθογωνιο τριγωνο ο λογος των τετραγωνων των καθετων πλευρων του
- είναι ισος με τον λογο των προβολων τους στην υποτεινουσα
- Αν σε ένα τριγωνο το αθροισμα των δυο πλευρων είναι ισο με το τετραγωνο της μεγαλυτερης πλευρας τότε το τριγωνο είναι ορθογωνιο
- Αν α, β, γ οι πλευρες τριγωνου $AB\Gamma$ και $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε η γωνια A είναι οξεια
- Αν α, β, γ οι πλευρες τριγωνου $AB\Gamma$ τότε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos \Gamma$
- Το εμβαδον ενός ορθογωνιου με διαστασεις α και β είναι ισο με $\alpha \cdot \beta$
- Το εμβαδον ενός τριγωνου με πλευρες α, β και περιεχομενη γωνια Γ είναι ισο με $\frac{1}{2}\alpha\beta\sin \Gamma$
- Το εμβαδον ενός τριγωνου με πλευρες α, β, γ και ακτινα περιγεγραμμενου κυκλου R είναι ισο με $\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$
- Το εμβαδον ενός τραπεζιου με βασεις α και β και υψος u είναι ισο με $\frac{(\alpha+\beta)}{2}u$
- Όταν δυο τριγωνα είναι ομοια τότε ο λογος των εμβαδων τους είναι ισος με το τετραγωνο του λογου ομοιοτητας τους
- Το μηκος ενός κυκλου ακτινας ρ είναι $M = \pi\rho^2$
- Δυο κανονικα πολυγωνα με ισο αριθμο πλευρων είναι παντα ομοια
- Αν ϕ και ω οι γωνιες ενός κανονικου πολυγωνου τότε είναι συμπληρωματικες
- Αν ένα τοξο ειναι α ακτινια τότε εχει μηκος $S = \alpha\rho$ (ρ η ακτινα του κυκλου)
- Κυκλικο τμημα είναι το μικτογραμμα χωριο που περικλειεται από ένα τοξο και την χορδη του.
- Δυο τριγωνα είναι ομοια όταν εχουν δυο γωνιες τους μια προς μια ισες

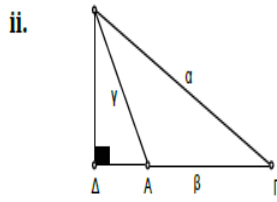
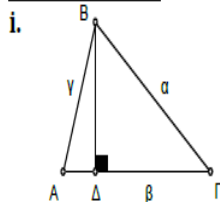
4. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Ορθογώνιο τρίγωνο



- i. $AB^2 = BG \cdot \Delta\Delta$, $AG^2 = BG \cdot \Gamma\Delta$
- ii. $A = 90^\circ \Leftrightarrow AB^2 + AG^2 = BG^2$
- iii. $\Delta\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

Τυχαίο τρίγωνο



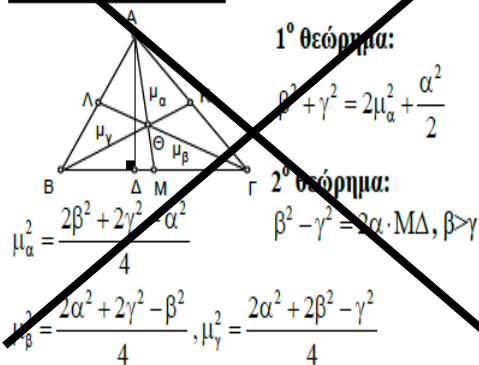
$$A < 90^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\Delta\Delta \quad A > 90^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta$$

Νόμος συνημιτόνων: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sin A$

Τύποι για το εμβαδόν τριγώνου: $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot \upsilon_\gamma$, $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \gamma \cdot \alpha \cdot \eta\mu B$

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}, \quad E = \tau \cdot \rho, \quad E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$$

Θεωρήματα Διαμέσων



Κύκλος

Μήκος κύκλου: $L = \pi \cdot \delta = 2\pi R$

Μήκος τόξου: $\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180^\circ} = \alpha \cdot R$

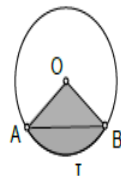
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου:

$$E = \pi R^2$$

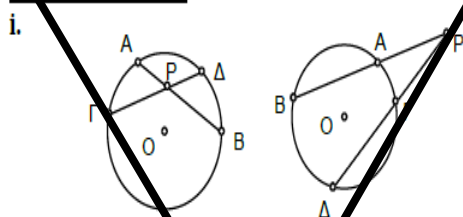
Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \alpha R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τμήματος:

$$(\tau) = (OAB) - (OAB)$$



Τέτοιουσες κύκλου



$$PA \cdot PB = PG \cdot PD$$

ii. Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

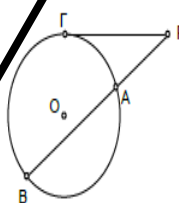
$$\Delta_{(O,R)}^P = PA \cdot PB = PO^2 - R^2$$

- Αν το P είναι εξωτερικό του κύκλου τότε: $\Delta_{(O,R)}^P > 0$

- Αν το P είναι εσωτερικό του κύκλου τότε: $\Delta_{(O,R)}^P < 0$

- Αν το P είναι σημείο του κύκλου τότε: $\Delta_{(O,R)}^P = 0$

iii.



$$PG^2 = PA \cdot PB$$

1. Είδος τριγώνου

$$A < 90^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

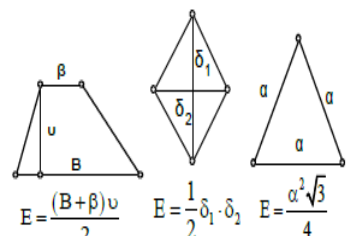
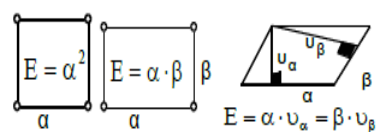
$$A = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$A > 90^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$$

Θεωρήματα για τα εμβαδά

- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες ή παραπληρωματικές τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Εμβαδά βασικών σχημάτων



Κανονικά πολύγωνα

$$\phi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}, \quad \omega_v = \frac{360^\circ}{v} \quad \phi_v + \omega_v = 180^\circ,$$

$$\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2, \quad P_v = v \cdot \lambda_v, \quad E_v = \frac{1}{2} P_v \cdot \alpha_v$$

Βασικά κανονικά πολύγωνα

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}, \quad \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_6 = R, \quad \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_3 = R\sqrt{3}, \quad \alpha_3 = \frac{R}{2}$$

Τύποι του Αρχιμήδη:

$$\lambda_{2v}^2 = 2R(R - \alpha_v), \quad \alpha_{2v}^2 = \frac{R}{2}(R + \alpha_v)$$