Ερωτήσεις κατανόησης κεφ. 1 σελίδας 201 - 203

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1.

Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in R^*$ Α Ψ

β) $(f \circ g)(x) = -x$, $x \in R$ Α Ψ

Αιτιολογία

α) Είναι ψευδής διότι

$D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο

$D_{gof} = \{\, x \in D_f$ με $f(x) \in D_g \,\}$, δηλαδή $x > 0$ με $\ln x \in R \Rightarrow x > 0$

Άρα $D_{gof} = (0, +\infty)$ και όχι το R^*

β) Είναι αληθής διότι

$D_{fog} = \{\, x \in D_g$ με $g(x) \in D_f \,\}$, δηλαδή $x \in \mathbb{R}$ με $e^{-x} > 0$, οπότε

$D_{fog} = \mathbb{R}$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln e^{-x} = -x$

2.

Αν $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Θέτω $\dfrac{f(x)}{x-1} = g(x)$ με $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \ell$.

Τότε $f(x) = (x-1)g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)g(x) = 0 \cdot \ell = 0$

3.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$ A Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής, διότι ο πολλαπλασιασμός $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}$ δε δίνει αποτέλεσμα 0,

αφού είναι η απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$ ή $0(-\infty)$

4.

Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε

κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$ A Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής, διότι μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Π. x Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$

είναι $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

5.

Ισχύει : α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$ A Ψ

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ A Ψ

Αιτιολογία

Το (α) είναι αληθής διότι :

Θέτω $\dfrac{1}{x}=u$, οπότε $u\to 0$.

Αλλά $\dfrac{1}{u}=x$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu u\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=1$

Το (β) είναι ψευδής διότι :

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{1}{|x|}|\eta\mu x|\leq\dfrac{1}{|x|}\quad\Rightarrow\quad -\dfrac{1}{|x|}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\dfrac{1}{|x|}$

Επειδή όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

6.

Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$0 \le f(x) \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 f(x) \le x^2$ και επειδή $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$.

7.

Αν $f(x) \le \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ Α Ψ

Λύση

Είναι ψευδής . Μπορεί η f να μην έχει καν όριο στο $+\infty$

8.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)g(6)$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι δεν ξέρουμε αν η $f(x)g(x)$ είναι συνεχής στο 6.

9.

Αν $\lim_{x\to x_o}|f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι Α Ψ

$\lim_{x\to x_o} f(x) = 1$ ή $\lim_{x\to x_o} f(x) = -1$

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι μπορεί το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει.

Π .χ Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχουμε

$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|} = 1$ ενώ το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

10.

Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ A Ψ

Αιτιολογία

Από τον ορισμό του ορίου (είναι εκτός ύλης) έχουμε

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}[f(x) - \ell] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}|f(x) - \ell| = 0$$

Για ℓ=0 προκύπτει το ζητούμενο

11.

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$ ισχύει A Ψ

$f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$, τότε $f(4) = 1$

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$$f \text{ συνεχής} \Rightarrow f(4) = \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$$
$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4}(x-3) = 1$$

12.

Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$,

τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_o \in (-1, 1)$ έτσι ώστε A Ψ

$f(x_o) = \pi$

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

Η f συνεχής στο $[-1, 1]$, $f(-1) \neq f(1)$ και $3 < \pi < 4$

Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_o \in (-1, 1)$ έτσι ώστε $f(x_o) = \pi$

II

Κυκλώστε την σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις

1.

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to x_o} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_o

τότε κατ' ανάγκη θα είναι :

Α) $\ell < m$ Β) $\ell \le m$ Γ) $\ell \le m$

Δ) $\ell = m$ Ε) $m < \ell$

2.

Το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με

Α. 8 Β. 1 Γ. 0 Δ. $+\infty$ Ε -8

3.

Το $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με

Α. $+\infty$ Β. $-\infty$ Γ. 1 Δ. -1 Ε 0

4.

Αν το $\lim_{x\to x_o} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε

Α. $x_o = 0$ Β. $x_o = 2$ Γ. $x_o = -1$ Δ $x_o = 1$

III

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2.

Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένα;

A $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ B. $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$ Δ. $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

E $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x+1)]$ ΣΤ. $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x-1)]$

3.

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\Delta=[0,\ 3]$ με

$f(0)=2,\quad f(1)=1\quad$ και $\quad f(3)=-1$

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

A. Υπάρχει $x_o\in(0,\ 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)=0$

B. $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-1$

Γ. $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Δ. $[-1,\ 2]\subseteq f(\Delta)$

E Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,\ 3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη το -1

Ερωτήσεις κατανόησης κεφ. 2 σελίδων 295 - 299

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας .

1.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$ Α Ψ

Αιτιολογία

Αν ήταν $f(0) = f(1)$, τότε από το Θ.Rolle στο $[0, 1]$, θα υπήρχε ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο.

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) < 0$. Α Ψ

Αιτιολογία

Αν ήταν $f'(x_o) \geq 0$ για κάθε $x_o \in (\alpha, \beta)$, τότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, οπότε δεν θα μπορούσε να είναι $f(\beta) < f(\alpha)$

3.

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_o , f(x_o))$ και $B(x_o , g(x_o))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες . Α Ψ

Αιτιολογία

Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει το Θ. Rolle, οπότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h'(x_o) = 0 \Rightarrow$

$$f'(x_o) - g'(x_o) = 0$$

$$f'(x_o) = g'(x_o) .$$

Δηλαδή οι εφαπτόμενες στα Α και Β είναι παράλληλες.

4.

Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f Α Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f Α Ψ

Αιτιολογία

Οι ρίζες και το πρόσημο της f' φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Βλέπουμε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 1, ενώ έχει τοπικό ελάχιστο στο 2

5.

α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη Α Ψ

Αιτιολογία

α) Η πρώτη παράγωγος θα είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, που ως γνωστόν έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, συνεπώς θα έχουμε μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

β) Η πρώτη παράγωγος θα είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, οπότε δεν είναι υποχρεωτικό να έχει πραγματικές ρίζες.

6.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. Α Ψ

Αιτιολογία

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι η $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, η οποία έχει πάντα μία τιμή μηδενισμού αφού $\alpha \neq 0$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο, άρα πάντα έχουμε ένα σημείο καμπής.

7.

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_o σημείο καμπής, τότε και η συνάρτηση $h = f{\cdot}g$ έχει στο x_o σημείο καμπής. A Ψ

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα.

$f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$

Οι f'' και g'' μηδενίζονται στο $x_0 = 0$ και αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν αυτού, άρα παρουσιάζουν καμπή στο 0.

Αλλά $h(x) = x^8 \Rightarrow h'(x) = 8x^7$ και $h''(x) = 56x^6$

Οπότε η h'' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$, αλλά δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Άρα δεν παρουσιάζει καμπή στο 0.

8.

Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα των x .
Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o , f(x_o))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα των x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε η εφαπτομένη σ' αυτό θα είναι οριζόντια. A Ψ

Αιτιολογία

Είναι φανερό ότι το σημείο A θα βρίσκεται σε σχέση με τα υπόλοιπα ψηλότερα ή χαμηλότερα από τον άξονα των x οπότε η συνάρτηση θα έχει ακρότατο στο x_o και επειδή παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ σύμφωνα με το Θ.Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$, οπότε η εφαπτομένη οριζόντια

9.

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ A Ψ

β) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$ A Ψ

Αιτιολογία

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x - 1} = -1$

άρα η $x = 1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

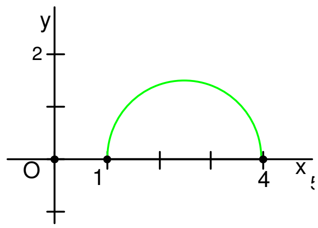
β) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x - 1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1}$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x - 2}{x - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x - 2}{x - 1} = +\infty$,

η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

10.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε



i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,\ 4)$ Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,\ 4]$ Α Ψ

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ 4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_o \in (1,\ 4) :\ f'(x_o) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

i) Όπως φαίνεται από την γραφική παράσταση, υπάρχει σημείο $x_o \in (1,\ 4)$ το οποίο είναι ψηλότερα από όλα τα άλλα και στο οποίο η f παραγωγίζεται, άρα από Θ.Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$

ii) Ομοίως με το (i)

iii) Όχι, διότι η συνάρτηση είναι και γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ 4]$

iv) Η εξήγηση δίνεται στο (i)

11.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει

α) μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\ 1)$ Α Ψ

β) μία ακριβώς ρίζα στο $(-1,\ 0)$ Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

Αιτιολογία

α) Όχι επειδή όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί

β) Ισχύει Bolzano και είναι γνησίως αύξουσα, αφού $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

γ) Καλύπτεται από το (ii)

12.

Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν

$f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$,

τότε $(fog)'(0) = (gof)'(0)$ Α Ψ

Αιτιολογία

$(fog)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(5)\cdot 1 = 6$

$(gof)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(4)\cdot 3 = 6$

II

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε την σωστή απάντηση .

1.

Το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+h)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Β $\dfrac{4}{3}$ Γ. $\sqrt{3}$ Δ. $\dfrac{3}{4}$

2.

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με

Α. $\dfrac{1}{x^2}$ Β. $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ. $-\dfrac{2}{x}$ Ε. 0

3.

Αν $f(x) = 5^{3x}$, τότε η $f'(x)$ ισούται με

Α. $3x\cdot 5^{3x-1}$ Β. $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ . $3\cdot 5^{2x}$ Δ . $3\cdot 5^{3x}$ Ε $5^{3x}\ln 125$

4.

Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(x+1)$, τότε η $f'(\pi)$ ισούται με

Α. $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Β. $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$ Γ $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$

Δ. $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

5.

Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$, τότε η 7^{η} παράγωγος είναι

Α . 1 Β. -1 Γ 0 Δ.. 27 Ε. δεν υπάρχει

6.

Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_o είναι παράλληλες τότε το x_o είναι

Α. 0 Β. $\frac{1}{4}$ Γ $\frac{1}{2}$ Δ.1 Ε.2

7.

Αν $f(x) = e^{\beta x}$, $g(x) = e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με :

Α. $\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$ Β. $\frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$ Γ. $\frac{\alpha + 1}{\alpha^2}$

Δ. $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$ Ε $\frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$

8.

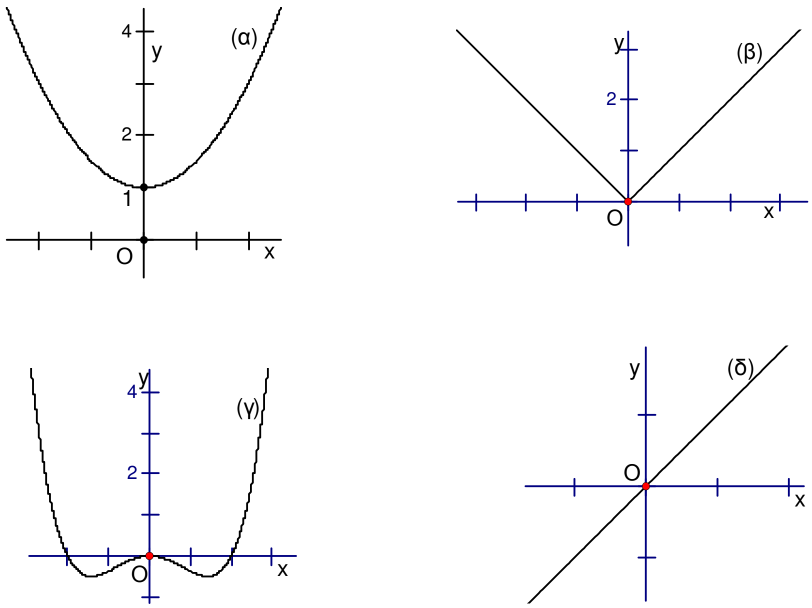
Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 0$, τότε

Α. $f(1) = -1$ Β .$f(-1) > 0$ Γ $f(1) > 0$ Δ. $f(-1) = 0$

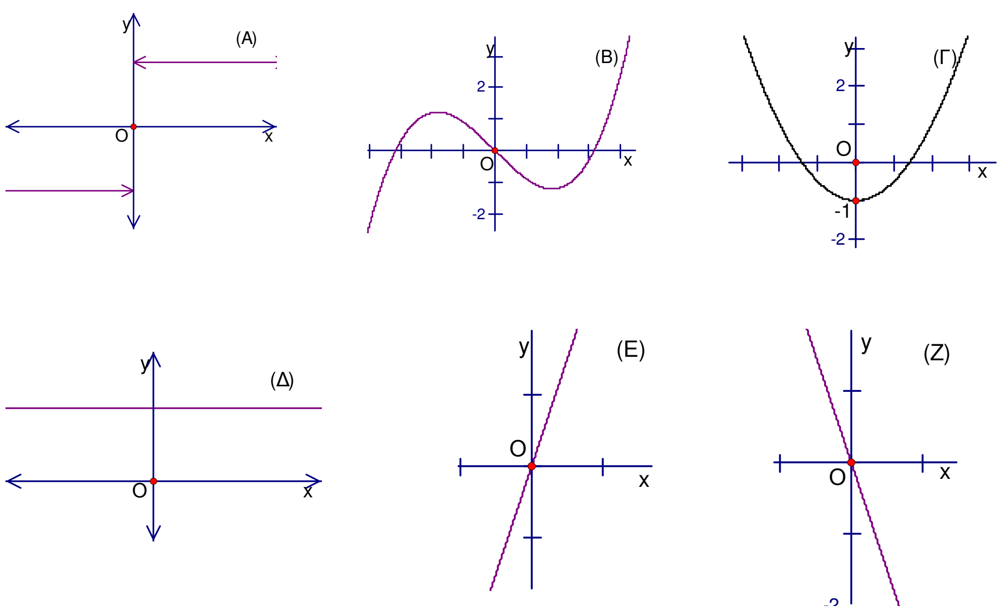
III

1.

Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζεται ότι είναι η παράγωγός της .



....



α ⟶ Ε , β ⟶ Α , γ ⟶ Β , δ ⟶ Δ

2.

Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	**ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ**
$f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$	$\psi = 2$
$f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{e^x}$	$\psi = x - 1$
$f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-2}$	$\psi = -x+1$
	$\psi = x$
	$\psi = -x$

Ερωτήσεις κατανόησης κεφ .3 σελίδων 354 - 359

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1.

Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα

2

$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\ g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα :
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=1, \quad g(x)=1$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\cdot g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}1dx = [x]_{\alpha}^{\beta} = \beta-\alpha$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}1dx\ \int_{\alpha}^{\beta}1dx = (\beta-\alpha)(\beta-\alpha)$$

3.

Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα

4.

Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$, τότε κατ’ ανάγκην θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ Α Ψ

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα :

$$\int_{0}^{2\pi}\eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 0$$

Αλλά δεν είναι $\eta\mu x = 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

5.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα

6.

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ Α Ψ
για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα :

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu 0 = 0 + 1 = 1 > 0$$

Αλλά $\eta\mu x < 0$ όταν $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

7.

$\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$ για κάθε $\alpha > 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} [(x^4 + x^2 + 1) - (x^4 + 1)]dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1 - x^4 - 1)]dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx > 0 \text{ από θεώρημα.}\end{aligned}$$

8.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$ Α Ψ

Αιτιολογία

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu^2 x)dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$$

* Είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

9.

$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$ Α Ψ

Αιτιολογία

Παραγοντική ολοκλήρωση

10.

$\int_{1}^{e}\ln x dx=\int_{e}^{1}\ln\frac{1}{t}dt$ A Ψ

Αιτιολογία

$\int_{e}^{1}\ln\frac{1}{t}dt = \int_{e}^{1}\ln t^{-1}dt = -\int_{e}^{1}\ln tdt = \int_{1}^{e}\ln tdt = \int_{1}^{e}\ln xdx$

11.

Εκτός ύλης

12

Εκτός ύλης

13.

Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α, β]

τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές A Ψ

Αιτιολογία

Αν ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε θα είχαμε

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx<0$ αντίστοιχα.

14.

Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του

χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των x και την C_f. A Ψ

Αιτιολογία

Για να παριστάνει το εμβαδόν θα έπρεπε να είναι

$x^3 - x \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, που δεν ισχύει.

II

Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

1.

Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

A. $-\frac{1}{\pi}$ B. $\frac{1}{\pi}$ Γ $-\frac{2}{\pi}$ Δ $\frac{2}{\pi}$

2.

Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x}dx$ στο $(4, +\infty)$ είναι ίσο με

A. $\ln(4-x) + c$ B. $-\ln(4-x) + c$

Γ. $\ln(x-4) + c$ Δ $-\ln(x-4) + c$

3.

Το ολοκλήρωμα $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0, +\infty)$ είναι ίσο με

A. $\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} + c$ B. $2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

Γ. $\frac{(1 - \ln x)^3}{3} + c$ Δ $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c$

Ε. $\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c$

4.

Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} |x^2 - 1| dx$ είναι ίσο με

A $\frac{4}{3}$ B. 0 Γ. $-\frac{4}{3}$ Δ. $\frac{2}{3}$ Ε. $\frac{5}{3}$

5.

Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

A. $\frac{1}{x} + c$ B. $\frac{\ln^2 x}{2} + c$ Γ $x(\ln x - 1) + c$ Δ. $\frac{\ln^3 x}{3} + c$

6.

Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο [α, β].

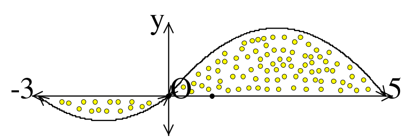
Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

A. $f'(x) \le g'(x), \quad x \in [\alpha, \beta]$ B $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Γ. $\int f(x)dx \le \int g(x)dx, \quad x \in [\alpha, \beta]$ Δ. $\int_\beta^\alpha f(x)dx \le \int_\beta^\alpha g(x)dx$

7.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος είναι ίσο με



A. $\int_{-3}^{5} f(x)dx$ B. $\int_{5}^{-3} f(x)dx$

Γ. $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)dx$ Δ $-\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$

8.

Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει :

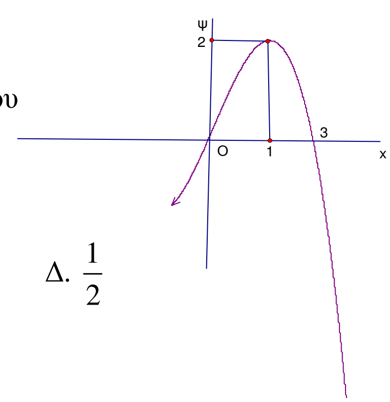
A. $f(x) = g(x) - 2$ B $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = 4$

Γ. $f(x) \le g(x), \quad x \in [-1, 1]$ Δ. Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1, 1]$

9.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με



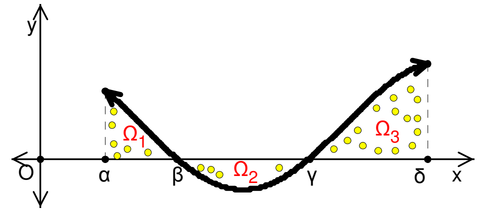
A. 0 B. 1 Γ 2 Δ. $\frac{1}{2}$

10.

Έστω f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος .

Αν $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ ισούται με

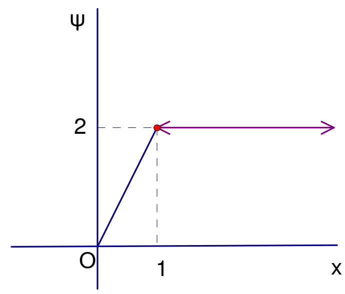


Α. 6 Β. – 4 Γ. 4

Δ. 0 Ε. 2

11.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε



Α. $F(x) = x^2$

Β. $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$

Γ. $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x, & 1 \le x \end{cases}$

Δ. $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & 1 \le x \end{cases}$

III

1.

Εκτός ύλης

2.

Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένα ;

Α. $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ Β. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx$ Γ. $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ. $\int_0^1 \ln x dx$ Ε. $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$ Ζ. $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

3.

Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$\int \frac{1}{x}dx = \int x' \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx \qquad \text{Άρα } \int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx, \text{ οπότε } 0 = 1$$

Απάντηση

Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα είναι σύνολο συναρτήσεων και όχι μια συνάρτηση.

Στην τελευταία ισότητα, διαγράφεται το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x}dx$ του 1ου μέλους με το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x}dx$ του 2ου μέλους που δεν είναι ίσα, αλλά διαφέρουν κατά σταθερά.

Συγκεκριμένα, αν $F(x)$ είναι μία αρχική της $f(x)$, τότε το συμπέρασμα γράφεται

$F(x) + c_1 = 1 + F(x) + c_2 \iff c_1 - c_2 = 1$ και όχι $0 = 1$

4.

Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = -I \qquad \left(\text{Θέσαμε } \frac{1}{u} = x \text{ οπότε } dx = -\frac{1}{u^2}du\right)$$

Άρα $I = -I$ οπότε $I = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx > 0$$

επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

Απάντηση

Η αντικατάσταση $\frac{1}{u} = x$ δεν είναι σωστή διότι :

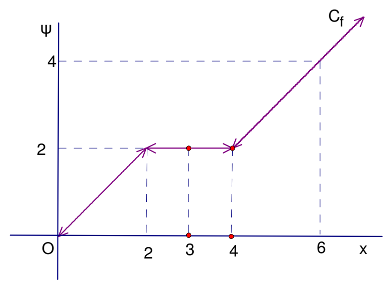
Όταν το x παίρνει την τιμή 0, δεν υπάρχει αντίστοιχο u, αφού $x = \frac{1}{u}$

5.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt\,,$$

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά



F(0) = 0 F(2) = 2 F(3) = 4 F(4) = 6 F(6) = 12