

Ενότητα: Α.1.5 – Χαρακτήρες Διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση Αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Σελίδα 27 Σχολικού βιβλίου.

1^ο Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού:

Παράδειγμα:

- Πολλαπλάσια του 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,.....
- Πολλαπλάσια του 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,.....
- Πολλαπλάσια του α : $0, 1 \cdot \alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, 4 \cdot \alpha, 5 \cdot \alpha, 6 \cdot \alpha, \dots$

❖ Κάθε φυσικός αριθμός « **διαιρεί** » τα πολλαπλάσιά του.

Π.χ. το 2 διαιρεί το 10 ή το 10 είναι πολλαπλάσιο του 2.

2^ο Κοινά πολλαπλάσια – Ελάχιστο Κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π):

Παράδειγμα 1:

- Πολλαπλάσια του 2: 0, 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**,
- Πολλαπλάσια του 3: 0, 3, **6**, 9, **12**, 15, **18**, 21, 24,

❖ **Κοινά** Πολλαπλάσια του 2 και του 3: **6, 12, 18,**

❖ **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** του 2 και του 3: **Ε.Κ.Π(2, 3)=6**

Παράδειγμα 2:

Ο κύριος Γιώργος παίρνει 2 φάρμακα.

Το 1^ο φάρμακο το παίρνει **κάθε** 6 ώρες.

Το 2^ο φάρμακο το παίρνει **κάθε** 8 ώρες.

Κάθε πόσες ώρες παίρνει και τα δύο φάρμακα μαζί;

Λύση

φάρμακο	A	A	A	A
Κάθε 6 ώρες	6	12	18	24
φάρμακο	B	B	B	B
Κάθε 8 ώρες	8	16	24	32

3^ο Διαιρέτες – Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ):

Παράδειγμα 1:

- Διαιρέτες του 12: **1, 2, 3, 4, 6, 12.**
- Διαιρέτες του 18: **1, 2, 3, 6, 9, 18.**
- Διαιρέτες του 36: **1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.**

❖ Κοινοί Διαιρέτες των 12, 18, 36: 1, 2, 3, 6.

❖ **Μ.Κ.Δ(12, 18, 36)=6**

■ 2ος τρόπος εύρεσης του Μ.Κ.Δ: Αλγόριθμος του Ευκλείδη

- Όταν οι αριθμοί των οποίων μας ενδιαφέρει να βρούμε τον Μ.Κ.Δ είναι 3ψήφιοι ή και μεγαλύτεροι η αναζήτηση διαιρετών είναι εξαιρετικά επίπονη διαδικασία και σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος του Ευκλείδη είναι εξαιρετικά σύντομος.

Πως δουλεύει:

Έστω ότι ζητάμε τον Μ.Κ.Δ(52, 68, 124)

Βήμα 1:

- Γράφουμε οριζόντια τους αριθμούς των οποίων μας ενδιαφέρει να βρούμε τον Μ.Κ.Δ. Κατεβάζουμε τον μικρότερο από όλους κάτω.

52 68 124
↓
52

Βήμα 2:

Εκτελούμε την διαίρεση των υπολοίπων διά του μικρότερου

(του 52 εδώ) και κάτω από κάθε έναν καταγράφουμε το **υπόλοιπο** της διαίρεσης προσοχή όχι το πηλίκο αλλά το υπόλοιπο.

$$\begin{array}{r|l} 68 & 52 \\ -52 & 1 \\ \hline 16 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 124 & 52 \\ -104 & 2 \\ \hline 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \quad 68 \quad 124 \\ \downarrow \\ 52 \quad 16 \quad 20 \end{array}$$

Βήμα 3:

Εκτελούμε ξανά το 2^ο βήμα για την 2^η σειρά αριθμών ξανακατεβάζοντας τον μικρότερο από τους τρεις κάτω και επαναλαμβάνουμε τις διαιρέσεις των υπολοίπων με αυτόν που κατεβάσαμε καταγράφοντας τα υπόλοιπα των διαιρέσεων κάτω από τους αριθμούς αυτούς.

$$\begin{array}{r|l} 52 & 16 \\ -48 & 3 \\ \hline 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 16 \\ -16 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \quad 68 \quad 124 \\ \downarrow \\ 52 \quad 16 \quad 20 \\ \quad \downarrow \\ \quad 4 \quad 16 \quad 4 \end{array}$$

Βήμα 4:

Εκτελούμε ξανά το 3^ο βήμα για την 3^η σειρά αριθμών ξανακατεβάζοντας τον μικρότερο από τους τρεις κάτω και επαναλαμβάνουμε τις διαιρέσεις των υπολοίπων με αυτόν που κατεβάσαμε καταγράφοντας τα υπόλοιπα των διαιρέσεων κάτω από τους αριθμούς αυτούς.
Σταματάμε όταν βρούμε παντού 0 εκτός από μία μη μηδενική τιμή.

$$\begin{array}{r}
 16 \overline{) 4} \\
 \underline{-16} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \overline{) 4} \\
 \underline{-4} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 52 68 124 \\
 \downarrow \\
 52 16 20 \\
 \downarrow \\
 4 16 4 \\
 \downarrow \\
 0 0 4
 \end{array}$$

Άρα το 4 είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης τους.

Παράδειγμα 2:

Το 1^ο Γυμνάσιο Γυθείου αποφάσισε να μοιράσει 150 τετράδια, 90 στυλό και 60 γόμες σε πακέτα δώρων ώστε τα πακέτα να είναι τα ίδια.

1. Μπορεί να γίνουν 10 πακέτα δώρων;
2. Πόσα **όμοια** πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;
3. Πόσα **το πολύ όμοια** πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;

Λύση

1. Τετράδια: $150:10=15$ τετράδια ανά πακέτο.

Στυλό: $90:10=9$ στυλό ανά πακέτο.

Γόμες: $60:10=6$ γόμες ανά πακέτο.

2. Διαιρέτες του 150: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150.

Διαιρέτες του 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Διαιρέτες του 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Όμοια Πακέτα Δώρων: 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 10 ή 15 ή 30.

3. Μ.Κ.Δ(150, 90, 60)=30 πακέτα το πολύ.

4^ο Πρώτοι & Σύνθετοι Αριθμοί:

Πρώτοι Αριθμοί λέγονται οι αριθμοί, οι οποίοι έχουν σαν μοναδικούς διαιρέτες το **1** και **τον εαυτό τους**.

Παραδείγματα Πρώτων Αριθμών: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...

2: έχει σαν μοναδικούς διαιρέτες το **1** και το **2** δηλ: **1, 2**.

3: 1, 3

5: 1, 5

7: 1, 7

11: 1, 11

13: 1, 13

17: 1, 17

19: 1, 19

Σύνθετοι αριθμοί λέγονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι πρώτοι, δηλαδή έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός από το **1** και **τον εαυτό τους**.

Πχ:

Το **4** έχει σαν διαιρέτες τους: 1, 2, 4.

Το **6:** 1, 2, 3, 6.

Το **8:** 1, 2, 4, 8.

Το **9:** 1, 3, 9.

Το **α:** 1, ... ,α.

5^ο Ανάλυση σε Γινόμενο Πρώτων Παραγόντων:

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής: Κάθε αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός.

Π.χ :Θέλουμε να αναλύσουμε το 24 σε γινόμενο **πρώτων** αριθμών.

Υπενθυμίζουμε μερικοί πρώτοι **πρώτοι** είναι οι ακόλουθοι:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...

Άρα θέλουμε να φτιάξουμε το 24 σαν γινόμενο των **αποκλειστικά και μόνο** των παραπάνω αριθμών.

Διαιρούμε το 24 με έναν πρώτο αριθμό κάθε φορά.

24	2
12	2
6	2
3	<u>3</u>
1	

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

6^ο Δεύτερος Τρόπος εύρεσης για το Ε.Κ.Π – **Τρίτος** Τρόπος εύρεσης για το Μ.Κ.Δ:

Παράδειγμα: ΕΚΠ(8, 12, 36) =?

Αναλύουμε το 8, το 12, το 36 σε γινόμενο πρώτων αριθμών

8	2
4	2
2	<u>2</u>
1	

12	2
6	2
3	3
<u>1</u>	

36	2
18	2
9	3
3	<u>3</u>
1	

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

- Το **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο των παραπάνω **κοινών και μη κοινών** παραγόντων με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη.
- $\text{Ε.Κ.Π}(8,12,36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$
- Ο **Μ.Κ.Δ** είναι το γινόμενο **μόνο** των κοινών παραγόντων με τον **μικρότερο** εκθέτη.
- $\text{Μ.Κ.Δ}(8,12,36) = 2^2 \cdot 3 = 12$

7^ο Κριτήρια Διαιρετότητας:

• **Του 2:**

Παράδειγμα:

120	124	128
122	126	

Δηλαδή όσοι λήγουν σε **0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8**.

• **Του 5:**

Παράδειγμα:

120
125

Δηλαδή όσοι λήγουν σε **0 ή 5**.

• **Του 3:**

Παράδειγμα:

$$123 \rightarrow 1+2+3=6$$

Το 6 διαιρείται με το 3 άρα και το 123 διαιρείται με το 3.

$$126 \rightarrow 1+2+6=9$$

Το 9 διαιρείται με το 3 άρα και το 126 διαιρείται με το 3.

• **Του 9:**

Παράδειγμα:

$$126 \rightarrow 1+2+6=9$$

Το 9 διαιρείται με το 9 άρα και το 126 διαιρείται με το 9.

- **Του 4:**

Παράδειγμα:

136

Το 36 διαιρείται με το 4 άρα και το 136 διαιρείται με το 4.

248

Το 48 διαιρείται με το 4 άρα και 248 διαιρείται με το 4.

Δηλαδή διαιρούνται με το 4 όσων το διψήφιο τελευταίο τμήμα τους διαιρείται με το 4.

- **Του 25:**

Παράδειγμα:

150

Το 50 διαιρείται με το 25 άρα και το 150 διαιρείται με το 25.

175

Το 75 διαιρείται με το 25 άρα και το 175 διαιρείται με το 25.

Δηλαδή διαιρούνται με το 25 όσων το διψήφιο τελευταίο τμήμα τους διαιρείται με το 25.

- **Του 4 και του 25:**

Παράδειγμα:

200, 1300, 24500

Δηλαδή διαιρούνται με το 4 και το 25 όσων τα δύο τελευταία τους ψηφία είναι 0.

Αναμενόμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα:

- Να **υπολογίζουμε** τους διαιρέτες & τα πολλαπλάσια ενός αριθμού.
- Να **υπολογίζουμε** το Μ.Κ.Δ & το Ε.Κ.Π δύο ή περισσότερων αριθμών.
- Να **ορίζουμε** τους πρώτους και τους σύνθετους αριθμούς και να δίνουμε φυσικά παραδείγματα.
- Να **αναλύουμε** έναν ή περισσότερους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Να **υπολογίζουμε** το Ε.Κ.Π και τον Μ.Κ.Δ με τη μέθοδο ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Να **επιλύουμε** προβλήματα χρησιμοποιώντας τις έννοιες του Μ.Κ.Δ και του Ε.Κ.Π δύο ή περισσότερων αριθμών.