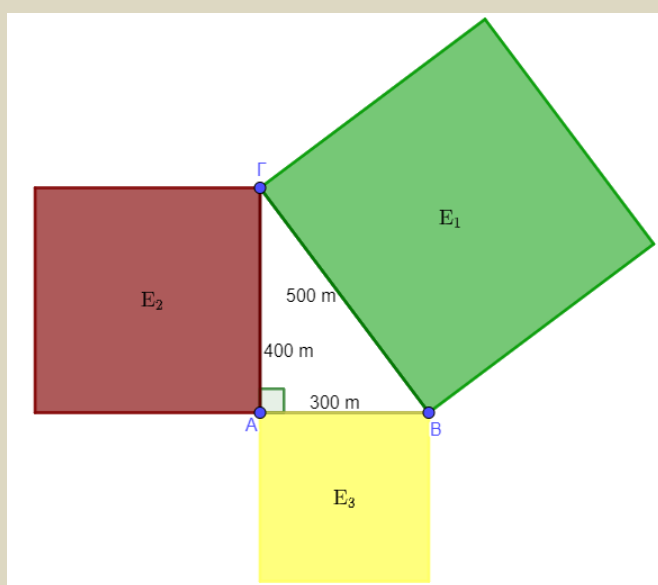


**1ο Σχέση Εμβαδών τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές
Ορθογωνίου τριγώνου:**



- ❖ Ένας πατέρας θέλει να μοιράσει δίκαια την περιουσία του στα 2 του παιδιά,
- ❖ η οποία αποτελείται από **3 χωράφια σχήματος τετραγώνου,**
- ❖ που βρέχονται από μία δεξαμενή νερού σχήματος ορθογωνίου τριγώνου:

Το 1^ο χωράφι έχει πλευρά 500 m.

Το 2^ο χωράφι έχει πλευρά 400 m.

Το 3^ο χωράφι έχει πλευρά 300 m.

❖ Πως πρέπει να μοιραστεί δίκαια η περιουσία;

- Το εμβαδόν E_1 του 1^{ου} χωραφιού $\rightarrow E_1 = 500^2 = 250.000 \text{ m}^2$ ή 250 στρέμ.
- Το εμβαδόν E_2 του 2^{ου} χωραφιού $\rightarrow E_2 = 400^2 = 160.000 \text{ m}^2$ ή 160 στρέμ.
- Το εμβαδόν E_3 του 3^{ου} χωραφιού $\rightarrow E_3 = 300^2 = 90.000 \text{ m}^2$ ή 90 στρέμ.

Παρατήρηση:

① Υπάρχει τουλάχιστον 1 ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, για το οποίο ισχύει:

Γεωμετρική Ερμηνεία του Πυθαγορείου Θεωρήματος

$$E_1 = E_2 + E_3$$

$$250.000 = 160.000 + 90.000$$

$$500^2 = 400^2 + 300^2$$

② Υπάρχουν και άλλα ορθογώνια τρίγωνα με την παραπάνω ιδιότητα;

Μέθοδος: Δοκιμή

Μήκη	(6,8,10)	(9,12,15)	(8,15,17)	(10, 24, 26)
Πλευρών				
Ορθογωνίου				
Τριγώνου				
	$6^2 + 8^2 = 10^2$	$9^2 + 12^2 = 15^2$	$8^2 + 15^2 = 17^2$	$10^2 + 24^2 = 26^2$
	$36 + 64 = 100$	$81 + 144 = 225$	$64 + 225 = 289$	$100 + 476 = 576$

③ Προσπάθεια Γενίκευσης:

Μήπως η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για όλα τα ορθογώνια τρίγωνα;

④ Εικασία: Πυθαγόρειο Θεώρημα:

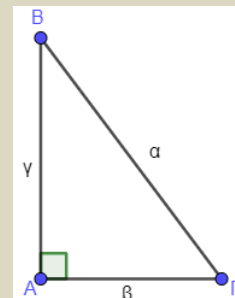
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι **μία σχέση** που συνδέει τις **κάθετες πλευρές** με την **υποτείνουσα** ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Συγκεκριμένα ισχύει:

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Π.Θ.)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο:

- Το τετράγωνο της υποτείνουσας: (α^2)
- Ισούνται: (=)
- Με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών: ($\beta^2 + \gamma^2$)
- Δηλαδή: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
 - $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$
 - $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

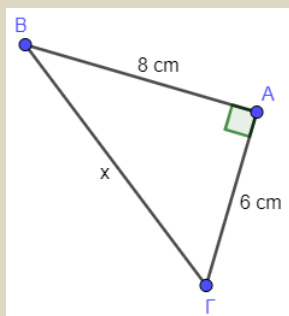


2ο 1^η Χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος: Υπολογισμός Αποστάσεων:

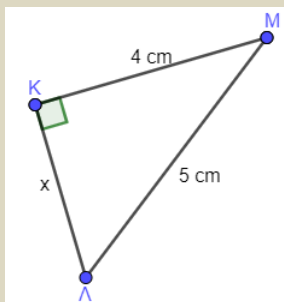
Παράδειγμα 1:

Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα να υπολογίσετε το μήκος x της άγνωστης πλευράς του:

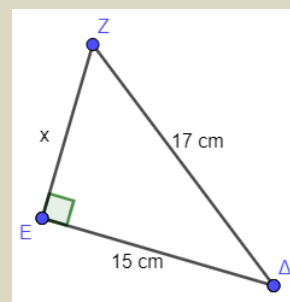
①



②



③



Λύση

①

➤ ΑΒΓ Ορθογώνιο τρίγωνο με **υποτείνουσα** την ΒΓ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

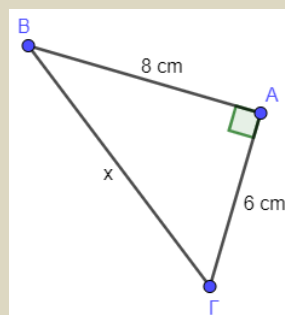
$$\text{➤ } ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x^2 = 36 + 64$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10 \text{ cm}$$



②

➤ ΚΛΜ Ορθογώνιο τρίγωνο με **υποτείνουσα** την ΛΜ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\text{➤ } ΛΜ^2 = ΚΛ^2 + ΚΜ^2$$

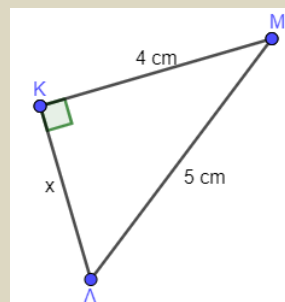
$$5^2 = x^2 + 4^2$$

$$5^2 - 4^2 = x^2$$

$$x^2 = 25 - 16$$

$$x^2 = 9$$

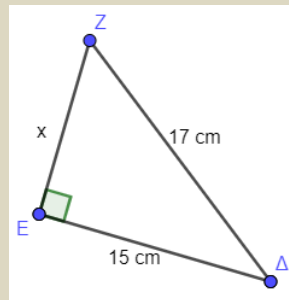
$$x = 3 \text{ cm}$$



③

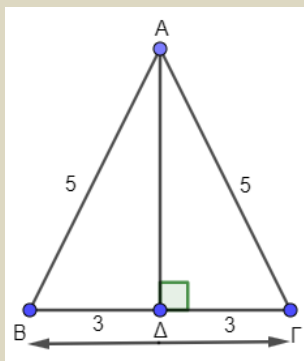
ΔΕΖ Ορθογώνιο τρίγωνο με **υποτείνουσα** την **ΔΖ**. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\begin{aligned} \triangleright \Delta Z^2 &= \Delta E^2 + EZ^2 \\ 17^2 &= 15^2 + x^2 \\ 17^2 - 15^2 &= x^2 \\ x^2 &= 289 - 225 \\ x^2 &= 64 \\ x &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$



Παράδειγμα 2:

Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι **ισοσκελές** με ΑΒ=ΑΓ=5 cm και ΒΓ= 6 cm. Να βρείτε τον αριθμό **ΑΔ²**.



Λύση

Παρατήρηση:

Να θυμηθούμε ότι: το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος.

- Συνεπώς: ΒΔ=ΔΓ= 3 cm.

Το **ΑΔΓ** είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ, έτσι σύμφωνα, με το **Π.Θ.** :

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$$

$$5^2 = ΑΔ^2 + 3^2$$

$$25 = ΑΔ^2 + 9$$

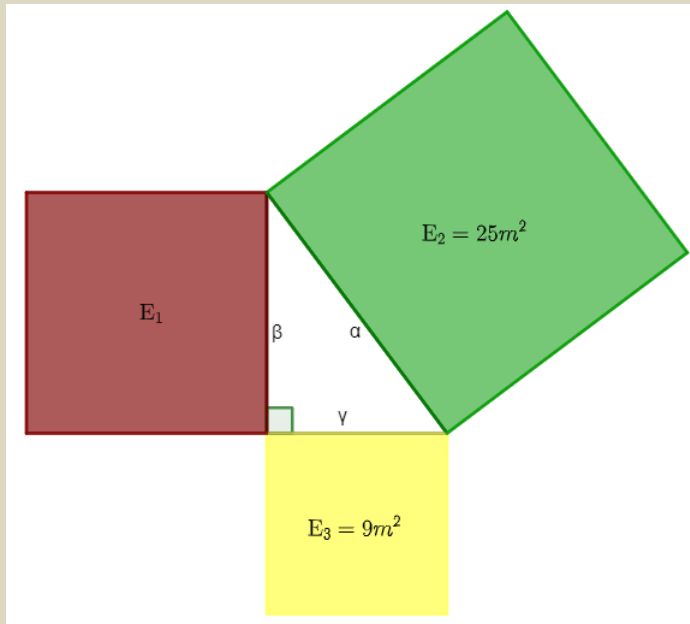
$$25 - 9 = ΑΔ^2$$

$$ΑΔ^2 = 16$$

3ο 2^η Χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

**Σχέση Εμβαδών τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές
Ορθογωνίου τριγώνου:**

Άσκηση 1 / Σελίδα 130 Σχολικού βιβλίου



**Να βρείτε το εμβαδόν του
κόκκινου τετραγώνου στο
παρακάτω σχήμα:**

$$E_2 = E_1 + E_3$$

$$25 = E_1 + 9$$

$$E_1 = 25 - 9$$

$$E_1 = 16m^2$$

4ο 3^η Χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος: Έλεγχος Ορθής Γωνίας:

- Μέσα από τη σχέση των αποστάσεων των κορυφών ενός τριγώνου ελέγχουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (Α.Π.Θ.)

Υπόθεση: Αν σε ένα τρίγωνο:

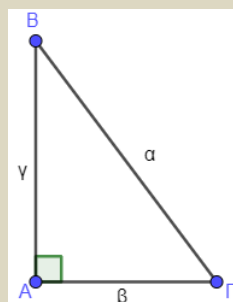
το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς

είναι ίσο

με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων 2 πλευρών,

Συμπέρασμα: Τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Υπόθεση: Υ	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
Συμπέρασμα: Σ	$\hat{A} = 90^\circ$



Ενώ στο Π.Θ. Έχουμε ότι:

Υπόθεση: Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο:

Συμπέρασμα: Τότε το τετράγωνο της υποτεινουσας

είναι ίσο

με το άθροισμα των τετραγώνων των 2 καθέτων πλευρών του.

Υπόθεση: Υ	$\hat{A} = 90^\circ$
Συμπέρασμα: Σ	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

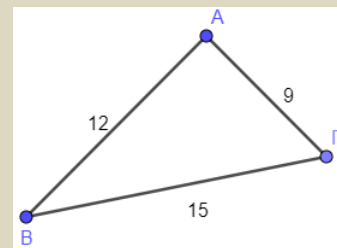
Παράδειγμα 1:

Να εξετάσετε αν το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο .

Λύση

Θα **συγκρίνουμε**:

- το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς $BΓ^2$,
- με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.
- $BΓ^2 = 15^2 = 225$
- $AB^2 + ΑΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$



Επομένως:

Σύμφωνα με το **Αντίστροφο** του Πυθαγορείου Θεωρήματος (**Α.Π.Θ**):

$$AB^2 + ΑΓ^2 = BΓ^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ.$$

Αναμενόμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα:

- Να **διατυπώνουμε** τη σχέση των εμβαδών τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου (**Γεωμετρική Ερμηνεία του Π.Θ**).
- Να **υπολογίζουμε** αποστάσεις κάνοντας χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.
- Να **ελέγχουμε** αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο. (**Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος**)
- Να **επιλύουμε** προβλήματα κάνοντας χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.