

# Αξιοσημείωτες ταυτότητες

➡ **Ταυτότητες** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών.

Παραδείγματα:

$$0 \cdot \chi = 0, 4\alpha = 2\alpha + 2\alpha, \psi + \omega = \omega + \psi$$

➡ ΚΑΠΟΙΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΕΙΝΑΙ:

1. **Τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων:**

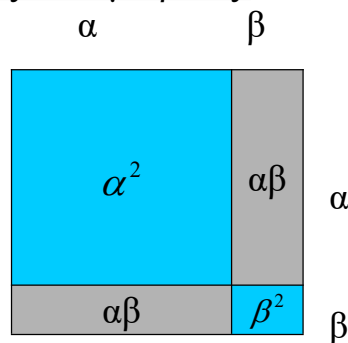
$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη:

1<sup>ος</sup> τρόπος- Αλγεβρικός:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) && [\text{ορισμος δυναμης } \alpha^2] \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 &= && [\text{επιμεριστικη ιδιοτητα}] \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &= && [\text{αναγωγη ομοιων ορων}] \end{aligned}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος-Γεωμετρικός:



Η απόδειξη ισχύει μόνο αν  $\alpha, \beta > 0$

Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $\alpha + \beta$ , οπότε

$$\text{το εμβαδόν του είναι: } E = (\alpha + \beta)^2 \quad (1)$$

Το εμβαδόν όμως του τετραγώνου προκύπτει όταν προσθέσουμε και τα εμβαδά των σχημάτων που το αποτελούν. Δηλαδή:

$$E = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) βλέπουμε ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

**2. Τετράγωνο διαφοράς δύο όρων:**

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = && [\text{ορισμός δύναμης } \alpha^2] \\ \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 &= && [\text{επιμεριστική ιδιότητα}] \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &&& [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]\end{aligned}$$

**3. Κύβος αθροίσματος δύο όρων:**

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta) = && [\text{ιδιότητα } \alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}] \\ (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta) &= && [\text{ταυτότητα } (\alpha + \beta)^2] \\ \alpha^3 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 + \beta^3 &= && [\text{επιμεριστική ιδιότητα}] \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 &&& [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]\end{aligned}$$

**4. Κύβος διαφοράς δύο όρων:**

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^3 &= (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \beta) = \\ (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - \beta) &= \\ \alpha^3 - \alpha^2\beta - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^2\alpha - \beta^3 &= \\ \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 &= \end{aligned}$$

**5. Άθροισμα κύβων δύο όρων:**

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= \\ \alpha^3 - \cancel{\alpha^2\beta} + \cancel{\alpha\beta^2} + \beta\alpha^2 - \cancel{\alpha\beta^2} + \beta^3 &= \\ \alpha^3 + \beta^3\end{aligned}$$

**6. Διαφορά κύβων δύο όρων:**

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \\ \alpha^3 + \cancel{\alpha^2\beta} + \cancel{\alpha\beta^2} - \alpha^2\beta - \cancel{\alpha\beta^2} - \beta^3 &= \\ \alpha^3 - \beta^3\end{aligned}$$

**7. Διαφορά τετραγώνων δύο όρων:**

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) &= \alpha^2 + \cancel{\alpha\beta} - \cancel{\alpha\beta} - \beta^2 = \\ \alpha^2 - \beta^2\end{aligned}$$

**8. Τετράγωνο αθροίσματος τριών όρων:**

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= [(\alpha + \beta) + \gamma]^2 = \\ (\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2 &= \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 =$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

### Παρατηρήσεις:

1. Έχουμε ότι:

$$(-\alpha + \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$$

$$(-\alpha - \beta)^2 = [-(\alpha + \beta)]^2 = (\alpha + \beta)^2$$

2. Καθεμία από τις παραπάνω ταυτότητες ισχύει αν αντί των  $\alpha, \beta$  έχουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση.

3. Να προσέχουμε ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha^2 + \beta^2 \quad (\alpha - \beta)^2 \neq \alpha^2 - \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 \neq \alpha^3 + \beta^3 \quad (\alpha - \beta)^3 \neq \alpha^3 - \beta^3$$

### Παραδείγματα:

$$\begin{array}{ccccccc} \blacksquare & (2\chi + 3\psi)^2 & = & (2\chi)^2 & + & 2(2\chi)(3\psi) & + & (3\psi)^2 & = & 4\chi^2 & + & 12\chi\psi & + & 9\psi^2 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$$

$$\blacksquare \quad (3\chi - 5\psi)^2 = (3\chi)^2 - 2 \cdot (3\chi) \cdot (5\psi) + (5\psi)^2 = 9\chi^2 - 30\chi\psi + 25\psi^2$$

$$\blacksquare \quad (\chi + 3\psi)(\chi - 3\psi) = \chi^2 - (3\psi)^2 = \chi^2 - 9\psi^2$$

- $\left(2\alpha + \frac{1}{2}\right)^3 = (2\alpha)^3 + 3 \cdot (2\alpha)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot (2\alpha) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$   
 $8\alpha^3 + 3 \cdot 4\alpha^2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2\alpha \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$   
 $8\alpha^3 + 6\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{8}$
- $(\chi\omega - 2)^3 = (\chi\omega)^3 - 3 \cdot (\chi\omega)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (\chi\omega) \cdot 2^2 - 2^3 =$   
 $\chi^3\omega^3 - 6\chi^2\omega^2 + 12\chi\omega - 8$
- $(\chi + 1)(\chi^2 - \chi + 1) = (\chi + 1)(\chi^2 - \chi \cdot 1 + 1^2) = \chi^3 - 1^3 = \chi^3 - 1$
- $(2\chi - 3\psi)(4\chi^2 + 6\chi\psi + 9\psi^2) = (2\chi - 3\psi)((2\chi)^2 + 2\chi \cdot 3\psi + (3\psi)^2) =$   
 $(2\chi)^3 - (3\psi)^3 = 8\chi^3 - 27\psi^3$
- $(\chi - \psi - 2\omega)^2 = \chi^2 + (-\psi)^2 + (-2\omega)^2 + 2\chi(-\psi) + 2(-\psi)(-2\omega) + 2\chi(-2\omega) =$   
 $\chi^2 + \psi^2 + 4\omega^2 - 2\chi\psi + 4\psi\omega - 4\chi\omega$

 Αν μας ζητούν να αποδείξουμε μια αλγεβρική σχέση, ακολουθούμε έναν από τους ακόλουθους τρόπους:  
1<sup>ος</sup> τρόπος: Παίρνουμε το μέλος στο οποίο εμφανίζονται οι περισσότερες πράξεις και προσπαθούμε να φτάσουμε στο άλλο μέλος.  
2<sup>ος</sup> τρόπος: Κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη ταυτόχρονα και πρέπει να φτάσουμε σε μια σχέση που ισχύει.  
3<sup>ος</sup> τρόπος: Παίρνουμε το 1<sup>ο</sup> μέλος, κάνουμε όσες πράξεις μπορούμε και σταματάμε. Παίρνουμε μετά το 2<sup>ο</sup> μέλος

και κάνουμε όσες πράξεις μπορούμε, ώστε να φτάσουμε  
στη σχέση στην οποία σταματήσαμε από το 1<sup>ο</sup> μέλος.