

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με την βοήθεια τύπου

☞ Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου στην γενική μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσής $ax^2 + bx + c = 0$ ώστε να καταλήξουμε σε κάποιο τύπο.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Rightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Rightarrow$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac \Rightarrow$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = -4ac + b^2 \Rightarrow$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad (1)$$

Την παράσταση $b^2 - 4ac$ την ονομάζουμε **ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ** και την συμβολίζουμε με το Δ .

Άρα η παράσταση (1) γράφεται $(2ax + b)^2 = \Delta$ και ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $\Delta > 0$ έχουμε

$$2ax + b = \pm \sqrt{\Delta} \Rightarrow$$

$$2ax = \pm \sqrt{\Delta} - b \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Άρα η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις** τις

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ και την } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Αν $\Delta=0$ έχουμε

$$(2\alpha x + \beta)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2\alpha x + \beta = 0 \Rightarrow$$

$$2\alpha x = -\beta \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα** την $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

3. Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη** δηλαδή **δεν έχει λύσεις**.

☞ Για να λύσουμε την εξίσωση

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 (\alpha \neq 0)$, ακολουθούμε τα εξής:

→ Βρίσκουμε τα α, β, γ της εξίσωσης.

→ Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, όπου:

- Αν $\Delta > 0$ τότε οι λύσεις είναι $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta = 0$ τότε λύσεις είναι οι $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

☞ Παραγοντοποίηση τριωνύμου

- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\Delta > 0$ και ρίζες x_1, x_2 , μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε με βάση τον τύπο:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - x_1)(x - x_2)$$
- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\Delta = 0$ και διπλή ρίζα x_0 , μπορούμε να το

παραγοντοποιήσουμε με βάση τον τύπο:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - x_0)^2$$

- Αν το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\Delta < 0$ τότε δεν παραγοντοποιείται.

✎ Για το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$

1. με $\Delta > 0$ έχουμε δύο άνισες ρίζες.
2. με $\Delta = 0$ έχουμε μια διπλή ρίζα.
3. με $\Delta < 0$ δεν έχουμε ρίζες.
4. με $\Delta \geq 0$ έχουμε μία τουλάχιστον ρίζα.

Παραδείγματα:

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $x^2 - 5x + 6 = 0$

β) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

γ) $x^2 - 2x + 3 = 0$

➔ α) Έχουμε $a = 1$ $\beta = -5$ $\gamma = 6$ οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0 \text{ άρα έχουμε}$$

$$\text{δύο λύσεις τις } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \text{ δηλαδή}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

β) Έχουμε $\alpha = 25$ $\beta = -10$ $\gamma = 1$ οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 100 - 100 = 0 \text{ άρα}$$

$$\text{έχουμε μία διπλή ρίζα τη } x = \frac{-(-10)}{2 \cdot 25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

γ) Έχουμε $a = 1$ $\beta = -2$ $\gamma = 3$ οπότε:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.