Α.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Τέσσερις μαθητές, ο Κώστας, η Μαρία, η Ελένη και ο Γιώργος, πήγαν στο γήπεδο του σχολείου τους για να τρέξουν γύρω από αυτό. Ένας γύρος του γηπέδου είναι 400 μέτρα. Ο Κώστας έτρεξε το $\frac{1}{10}$ του γύρου, η Μαρία έτρεξε το $\frac{1}{4}$ του γύρου, η Ελένη έτρεξε μισό γύρο και ο Γιώργος έτρεξε το $\frac{1}{9}$ του γύρου.

➢ *Ποιό είναι το ακριβές μήκος σε μέτρα που έτρεξε το καθένα από τα παιδιά;*

Σκεφτόμαστε

Για να βρούμε πόσα μέτρα έτρεξε ο Κώστας διαιρούμε το 400 με το 10 και βρίσκουμε: 400 : 10 = 40 μέτρα. Με τον ίδιο τρόπο, για τη Μαρία βρίσκουμε: 400 : 4 = 100 μέτρα και για την Ελένη 400 : 2 = 200 μέτρα.
Όταν φτάσουμε στον Γιώργο, κάνοντας τη διαίρεση του 400 με το 9 παρατηρούμε ότι η διαίρεση δεν είναι τέλεια, αλλά δίνει πηλίκο 44 και υπόλοιπο 4. Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση, επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι πάντα το ίδιο, τα δεκαδικά ψηφία θα επαναλαμβάνονται και θα είναι όλα ίσα με 4. Έτσι, το πηλίκο θα είναι ο δεκαδικός αριθμός 44,44...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να βρεις, με όση ακρίβεια μπορείς, το πηλίκο της διαίρεσης 101 διά 44.

Σκεφτόμαστε

Βλέπουμε ότι η διαίρεση 101: 44 δεν είναι τέλεια. Δίνει ακέραιο πηλίκο 2 και υπόλοιπο 13.
Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση θα βρούμε τον δεκαδικό αριθμό 2,295454... με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τέτοια ώστε, μετά το δεύτερο δεκαδικό (το 9) να επαναλαμβάνονται συνεχώς τα ίδια δύο ψηφία (5 και 4), δηλαδή 545454...

101,00000...	44
130	2,295454...
420	
240	
200	
240	
....	

Μαθαίνουμε

- Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω τους ονομάζουμε **περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.**
- Το τμήμα των επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται **περίοδος.**

Γενικότερα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι:

► Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού και συμβολίζεται όπως φαίνεται στα παραδείγματα.

π.χ. $\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$ *και* $\frac{1.000.000}{7} = 142857,\overline{142857}$.

Προηγουμένως, είδαμε με ποιον τρόπο ένας ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί με τη μορφή περιοδικού δεκαδικού αριθμού.
Γεννιέται, όμως, το ερώτημα αν μπορούμε να κάνουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μπορούμε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό να τον γράψουμε με μορφή ρητού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν με κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί: (α) $0,\overline{2}$ και (β) $1,\overline{64}$.

Λύση

(α) Θέτουμε $x = 0,\overline{2}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x &= 0,222... \\ 10x &= 2,222... \\ 10x &= 2 + 0,222... \\ 10x &= 2 + x \\ 9x + x &= 2 + x \\ 9x &= 2 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$

(β) Αν $x = 1,\overline{64}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x &= 1,646464... \\ 100x &= 164,646464... \\ 100x &= 164 + 0,646464... \\ 100x &= 164 + x - 1 \\ 99x + x &= 163 \\ 99x &= 163 \\ x &= \frac{163}{99} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $1,\overline{64} = \frac{163}{99}$

Συμπεραίνουμε ότι:

► Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Βρες τη δεκαδική μορφή των ρητών: (α) $-\frac{15}{10}$, (β) $\frac{5}{8}$, (γ) $\frac{13}{14}$, (δ) $\frac{20}{11}$, (ε) $\frac{32}{31}$.*

2. *Βρες την κλασματική μορφή των αριθμών:*
(α) 57,92, (β) $2,\overline{8}$, (γ) $3,\overline{83}$, (δ) $7,4\overline{561}$, (ε) $15,3\overline{99}$.

3. *Βρες μια άλλη δεκαδική μορφή των αριθμών: (α) $2,\overline{9}$, (β) $7,6\overline{9}$, (γ) $7,325\overline{9}$.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας, που έζησε στη Μεγάλη Ελλάδα το 490 - 430 π.Χ. διατύπωσε, μεταξύ άλλων, και το παρακάτω παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα: "Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ' αυτόν". Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο.

Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας υπολογιστής μολύνθηκε από κάποιο ιό, ο οποίος είχε την ιδιότητα να καταστρέφει τα ηλεκτρονικά αρχεία με τον εξής τρόπο:
Κάθε μολυσμένο αρχείο μόλυνε, πριν καταστραφεί, τρία άλλα αρχεία μέσα σε μία ώρα λειτουργίας του υπολογιστή.

➢ *Προσπάθησε να βρεις, πόσα μολυσμένα αρχεία υπάρχουν στο τέλος της 5ης ώρας.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Συμβολισμοί

- Το γινόμενο $\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \dots\ \cdot\alpha}^{\nu \text{ παράγοντες}}$ *(είτε ο α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός)*, συμβολίζεται με το α^ν και λέγεται **δύναμη** με **βάση** το **α** και **εκθέτη** το φυσικό **ν**>**1**.

$$\underbrace{\alpha}_{\text{βάση}}^{\overset{\text{εκθέτης}}{\nu}} = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \dots\ \cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Για **ν** = **1**, γράφουμε $\alpha^1 = \alpha$.
- Η **δύναμη** α^ν διαβάζεται και **νιοστή δύναμη του α**.
- Η **δύναμη** α^2 λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο.**
- Η **δύναμη** α^3 λέγεται **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.

Πρόσημο δύναμης

Παρατηρούμε ότι:

$(+2)^5 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = +32 > 0$

$(-2)^4 = \overbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}^{\text{άρτιο πλήθος}} = +16 > 0$

$(-2)^5 = \overbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}^{\text{περιττό πλήθος}} = -32 < 0$

Γενικά ισχύει ότι:

▶ Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
Αν **α** > 0, τότε $\alpha^\nu > 0$

▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
Αν **α** < 0 και **ν άρτιος**, τότε $\alpha^\nu > 0$

▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
Αν **α** < 0 και **ν περιττός**, τότε $\alpha^\nu < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι:

$$(-3)^3(-3)^5 = \underbrace{\overbrace{(-3)(-3)(-3)}^{3\text{ παράγοντες}}\overbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)}^{5\text{ παράγοντες}}}_{8\text{ παράγοντες}} = (-3)^8 = (-3)^{3+5}$$

Γενικά ισχύει ότι:

▶ Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$\boxed{\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}}$$

$$7^8 : 7^3 = \frac{7^8}{7^3} = \frac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{7\cdot7\cdot7} = 7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7 = 7^5 = 7^{8-3}$$

▶ Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\boxed{\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}}$$

$$(2\cdot7)^6 = (2\cdot7)(2\cdot7)(2\cdot7)(2\cdot7)(2\cdot7)(2\cdot7) = (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)(7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7) = 2^6\cdot7^6$$

▶ Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu}$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^5 = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9} = \frac{2^5}{9^5}$$

▶ Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}}$$

$$(8^3)^7 = 8^3\cdot8^3\cdot8^3\cdot8^3\cdot8^3\cdot8^3\cdot8^3 = 8^{3+3+3+3+3+3+3} = 8^{7\cdot3} = 8^{21}$$

▶ Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$\boxed{(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων: (α) -3^3, (β) $(-3)^3$, (γ) -3^4 ,(δ) $(-3)^4$.*

Λύση

(α) Η παράσταση θα είναι: $-3^3 = -3\cdot3\cdot3 = -27$

(β) Επειδή ο εκθέτης είναι περιττός, η δύναμη θα είναι αρνητικός αριθμός.
Άρα, θα είναι: $(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -3^3 = -27$.

(γ) Η παράσταση θα είναι: $-3^4 = -3\cdot3\cdot3\cdot3 = -81$

(δ) Επειδή ο εκθέτης είναι άρτιος, η δύναμη θα είναι θετικός αριθμός.
Άρα, θα είναι: $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +3^4 = +81$

2. *Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $Π=(-2)^3\cdot3-3^4+(-2)^4:16+[-1-(-1)^7\cdot8]$.*

Λύση

Η σειρά των πράξεων είναι η εξής: **1ο** Δυνάμεις, **2ο** Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, **3ο** Προσθέσεις και αφαιρέσεις.
Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.
Άρα: $Π = (-2)^3\cdot3-3^4+(-2)^4:16+[-1-(-1)^7\cdot8] = (-8)\cdot3-81+(+16):16+[-1+8] =$
$= -24-81+1+7 = -97$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) *Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι .... αριθμός.*
(β) *Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη .... είναι θετικός αριθμός.*
(γ) *Δύναμη με βάση .... αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.*
(δ) *Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το .... των εκθετών.*
(ε) *Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη ....*
(στ) *Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε .... του γινομένου στον εκθέτη αυτό.*
(ζ) *Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε .... του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.*
(η) *Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο .... των εκθετών.*

2. *Βρες με ποιο στοιχείο της 2ης και της 3ης γραμμής αντίστοιχα είναι ίσο κάθε στοιχείο της 1ης γραμμής του παρακάτω πίνακα.*

$3+5^2$	$(3+5)^2$	$3\cdot5^2$	$(3\cdot5)^2$	$3-5^2$	$(3-5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$
Διαφορά των 3 και 5^2	*Άθροισμα των 3 και 5^2*	*Γινόμενο των 3 και 5^2*	*Πηλίκο των 3^2 και 5*	*Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5*	*Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5*	*Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5*	*Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5*
75	4	28	64	0,36	225	1,8	–22

3. *Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων: $A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$,*

$B = 32\cdot5^4 - 25\cdot4^5 + 87{,}5\cdot4^3$, $\quad Γ = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$.

Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Σύμφωνα με τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με την ίδια βάση, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι:

$\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$, *γνωρίζουμε ότι είναι και* $\frac{5^7}{5^7} = 1$ *επομένως,* $5^0 = 1$.

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

- **Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.**

$$\boxed{\alpha^0 = 1}$$

Επίσης, θα είναι:

$\frac{5^7}{5^8} = 5^{7-8} = 5^{-1}$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^7}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$,άρα $5^{-1} = \frac{1}{5}$

$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^6}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$,άρα $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

κ.ο.κ.

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

- Η **δύναμη κάθε αριθμού**, διάφορου του μηδενός, με **εκθέτη αρνητικό** είναι ίση με κλάσμα που έχει **αριθμητή τη μονάδα** και **παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη**.

$$\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu}$$

Επειδή τα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί,

όπως και τα **α** και $\frac{1}{\alpha}$ στην προηγούμενη σχέση,

εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu}$$

- Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: (α) $(-2)^{-5}$, (β) -3^{-3}, (γ) $(-234567)^0$.

Λύση

(α) $(-2)^{-5}=\frac{1}{(-2)^5}=\frac{1}{-32}=-\frac{1}{32}$, (β) $-3^{-3}=-\frac{1}{3^3}=-\frac{1}{27}$, (γ) $(-234567)^0=1$

2. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $[(-3)^3]^2$, (β) $3^3 : 3^{-2}$, (γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^6$, (δ) $\frac{12^{-3}}{3^{-3}}$.

Λύση

(α) $[(-3)^3]^2 = (-3)^{3\cdot 2} = (-3)^6 = 729$

(β) $3^3 : 3^{-2} = 3^{3-(-2)} = 3^{3+2} = 3^5 = 243$

(γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^6 = (-2)^{4+6} = (-2)^{10} = 1024$

(δ) $\frac{12^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

3. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}.

Λύση

$10^{-1}=\frac{1}{10^1}=\frac{1}{10}=0{,}1$

$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$

$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$

$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}=0{,}0001$

$10^{-5}=\frac{1}{10^5}=\frac{1}{100000}=0{,}00001$

$10^{-6}=\frac{1}{10^6}=\frac{1}{1000000}=0{,}000001$

$10^{-7}=\frac{1}{10^7}=\frac{1}{10000000}=0{,}0000001$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

α	β	γ	$(\alpha+\beta)^2$	$(\alpha\beta)^2$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$	$(-\alpha)^{-2}$	$(\gamma\beta)^{-1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$					
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$					
10	-10	$0{,}01$					

2. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = (-1)^{-3}+(-1)^{-2}+(-1)^{-1}+(-1)^{0}+(-1)^{1}+(-1)^{2}$,

$B = [(-2)^2]^5[(-3)^2]^{-2}+[(-23{,}5)^2(23{,}5)^{-2}]^5$, $\quad \Gamma = \dfrac{(-6)^{-5}}{12^{-5}}+\dfrac{16^{-4}}{(-32)^{-4}}-\dfrac{5^{-3}}{(-10)^{-3}}$.

3. Βρες ποιος από τους αριθμούς: $\frac{1}{10}$, $10^3\cdot5\cdot2$, $\frac{1}{10^3}$, 10^3+10^2, δεν είναι δύναμη του 10.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	0,001	0,01	0,1	–10	–100	$2\cdot10^4$	$5\cdot10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$
x^{-3}										
x^{3}										
x^{-1}										

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

•	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
10^{-3}							
10^{-2}							
10^{-1}							
10^{0}							
10^{1}							
10^{2}							
10^{3}							

Α.7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η διάμετρος ενός ατόμου υδρογόνου είναι 0,00000000016 cm.

➢ *Μπορείς να διαβάσεις και να θυμηθείς εύκολα αυτόν τον αριθμό;*

Παρατηρούμε ότι υπάρχει, αρκετή δυσκολία στη γραφή και των αριθμών που εκφράζουν πολύ μικρά μεγέθη. Όμως, η κατάλληλα προσαρμοσμένη χρήση της "τυποποιημένης μορφής" των αριθμών, που μάθαμε στην παράγραφο 3.4., για τη γραφή των πολύ μεγάλων αριθμών, μπορεί να βοηθήσει στην αντιμετώπιση και της γραφής των πολύ μικρών αριθμών.

Μαθαίνουμε

- Όπως οι πολύ μεγάλοι, έτσι και οι πολύ μικροί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή: $\alpha \cdot 10^{-\nu}$, όπου α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 και ν φυσικό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να εκφραστεί με τυποποιημένη μορφή το βάρος ενός μορίου νερού, που είναι: 0,00000000000000000000000029 gr.*

Λύση

Για να εκφράσουμε το βάρος ενός μορίου νερού με την τυποποιημένη μορφή πρέπει να βρούμε εκείνη τη δύναμη του 10 που, όταν πολλαπλασιάσει έναν δεκαδικό αριθμό με ένα μόνο ακέραιο ψηφίο, δίνει ξανά το παραπάνω βάρος. Δηλαδή:

$$\underbrace{0{,}0000000000000000000000029\ gr}_{23\ \text{θέσεις}} = 2{,}9 \cdot 10^{-23}$$

Για να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν (ο οποίος με αρνητικό πρόσημο είναι εκθέτης του 10) μετράμε πόσες θέσεις προς τα δεξιά πρέπει να μετακινηθεί η υποδιαστολή (ώστε να προκύψει ο δεκαδικός αριθμός α που έχει ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10).

2. *Να εκφραστούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:*
(α) 0,123456789, (β) 0,00000003598, (γ) 0,000008:1000000

Λύση (α) $0{,}123456789 = 1{,}23456789 \cdot 10^{-1}$, (β) $0{,}00000003598 = 3{,}598 \cdot 10^{-8}$,
(γ) $0{,}000008:1000000 = 0{,}000000000008 = 8 \cdot 10^{-12}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:*
(α) Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι 384.400.000 m.
(β) Η ηλικία της Γης είναι 4.500.000.000 έτη.
(γ) Η απόσταση Γης - Ήλιου είναι 149.600.000 km.

2. *Η μάζα του ατόμου του υδρογόνου είναι $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ gr.*
Να βρεις πόσα άτομα περιέχει 1 gr υδρογόνου.

3. *Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:*
(α) Η διάμετρος ενός πυρήνα ατόμου είναι 0,00000000000001 cm.
(β) Το βάρος ενός μορίου αλατιού είναι 0,00000000000000000000000097 gr.

Ανακεφαλαίωση

Ακέραιοι αριθμοί:	...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,.....
Ρητοί αριθμοί:	Φυσικοί, Κλάσματα, Δεκαδικοί (Θετικοί και Αρνητικοί)
Ομόσημοι ρητοί αριθμοί:	Έχουν το ίδιο πρόσημο
Ετερόσημοι ρητοί αριθμοί:	Έχουν αντίθετο πρόσημο
Απόλυτη τιμή ρητού $\lvert α \rvert$:	Εκφράζει την απόσταση σημείου με τετμημένη α από την αρχή Ο του άξονα των ρητών
Αντίθετοι ρητοί αριθμοί:	Οι ετερόσημοι με ίδια απόλυτη τιμή

Αν $α > 0$, τότε $\lvert α \rvert = α$ και αν $α < 0$, τότε $\lvert α \rvert = -α$

Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- $α+β = β+α$ *(Αντιμεταθετική)*
- $α+(β+γ)=(α+β)+γ$ *(Προσεταιριστική)*
- $α+0=0+α=α$
- $α+(-α)=(-α)+α=0$ (α και –α, αντίθετοι)

Αφαίρεση

- $α-β=α+(-β)$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- $α \cdot β = β \cdot α$ *(Αντιμεταθετική)*
- $α \cdot (β \cdot γ)=(α \cdot β) \cdot γ$ *(Προσεταιριστική)*
- $α \cdot 1=1 \cdot α=α$
- $α \cdot \frac{1}{α} = \frac{1}{α} \cdot α=1$ (α και $\frac{1}{α}$ αντίστροφοι)
- $α \cdot 0=0$

Διαίρεση

- $α : β = \frac{α}{β} = α \cdot \frac{1}{β}$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $α \cdot (β+γ)=α \cdot β+α \cdot γ$

Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση: $α \cdot (β-γ)=α \cdot β-α \cdot γ$

Προτεραιότητα Πράξεων

❶ Δυνάμεις → ❷ Πολλαπλασιασμοί & Διαιρέσεις → ❸ Προσθέσεις & Αφαιρέσεις

Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ορισμοί

$α^ν = α \cdot α \cdot α \cdot ... \cdot α$ (ν φορές)

Το α λέγεται **βάση** και το ν **εκθέτης**

$α^0 = 1$ και $α^1 = α$

$α^{-ν} = \frac{1}{α^ν}$ ή $α^{-ν} = \left(\frac{1}{α}\right)^ν$

$\left(\frac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\frac{β}{α}\right)^ν$

Ιδιότητες των δυνάμεων

- $α^μ α^ν = α^{μ+ν}$
- $α^μ : α^ν = α^{μ-ν}$
- $(αβ)^ν = α^ν \cdot β^ν$
- $\left(\frac{α}{β}\right)^ν = \frac{α^ν}{β^ν}$
- $(α^μ)^ν = α^{μν}$

(όπου: α, β ≠0 και μ, ν φυσικοί αριθμοί)

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

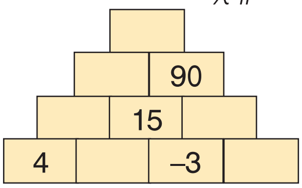
Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

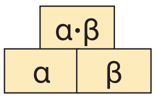
Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1. 7,2 + (–5) = 2,2		
2. –1,2 – 0,2 = –1		
3. –2,2 + 2,2 = –4,4		
4. 7,8 – 8 = 0,2		
5. 3,5 – 9 = –5,5		
6. 3,5 – 4,5 = –1		
7. 6 – 15 = –11		
8. 3 – 8,4 = –5,4		
9. 6 – 17 = –9		
10. 59 – 64 = –5		

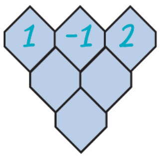
Β. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

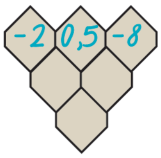
1. *Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:*
   (α) (...8)+(...3)+(...6)+(...5)=+4 (β) (...8)+(...3)+(...6)+(...5)=–10.
   (γ)(...3,7)+(....14,8)+(...5,2)+(...16,3)=0 (δ) (...3,7)+(...14,8)+(...5,2)+(...16,3)=–10,4.
2. *Βρες ποιο από τα Α, Β, Γ, Δ και Ε είναι το μεγαλύτερο, αν γνωρίζεις ότι:*
   Α + (–1) = Β + 3 = Γ + (–3) = Δ + 4 = Ε + (–5).
3. *Βρες τα αθροίσματα:*
   (α) 1+(–2)+3+(–4)+ ... +49+(–50), (β) 1+(–2)+3+(–4)+ ... +(–198)+199.
4. *Βάλε τα γράμματα Α, Ε, Ι, Κ, Ο, Π, Ρ, Υ και Ω με αύξουσα σειρά και γράψε τη λέξη που βρήκες, όταν:* Α = 4+(–1,5), Ε = –0,8+(–4,8), Ι = –0,8+4,8, Κ = 4+1,5, Ο = 0,8+4,8, Π = 0,8+(–0,8), Ρ = 0,8+(–4,8), Υ = –4+(–1,5), Ω = –4+1,5.
5. *Πολλαπλασίασε ανά δύο τους τρεις ρητούς –6,5, 3,5 και –4,5 με όλους τους δυνατούς τρόπους. (α) Πόσοι τρόποι υπάρχουν; (β) Ποιος από τους τέσσερις ρητούς 29,25, –15,75, –22,75 και 15,75 ως αποτέλεσμα των πολλαπλασιασμών αυτών είναι λάθος;*
6. *Συμπλήρωσε τα κενά στο σχήμα:* *Αν γνωρίζεις ότι:*

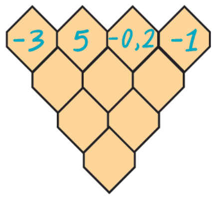




7. *Συμπλήρωσε τα κενά στα σχήματα, αν γνωρίζεις ότι:*







Γ. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

Αντιστοίχισε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης στο στοιχείο της δεύτερης στήλης που βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα.

(α)

(+14)+(–17)	(+3)+(–23)
(–12)+(–8)	(+11)+(–11)
(+11)+(–9)	(–22)+(+19)
(–5)+(+25)	(–19)+(+21)
(–16)+(+16)	(+37)+(–17)

(β)

(+13)–(–18)	(+3)–(+7)
(+11)–(+3)	(+13)–(+13)
(–5)–(+25)	(–37)–(–7)
(–16)–(–16)	(+17)–(+9)
(–12)–(–8)	(–2)–(–33)

(γ)

(–2)·0,5·9·10	900
2·5·(–0,9)·(–10)	–900
2·(–5)·(–9)·(–10)	9
–2·5·9·(–10)	–90
0,2·(–5)·(–0,9)·10	90