

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Φυλλάδιο με θεωρία-ασκήσεις στις εξισώσεις 2ου βαθμού

Θεωρία

1. Η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού είναι $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$. Η παράσταση $ax^2 + bx + \gamma$ ονομάζεται τριώνυμο, ενώ οι αριθμοί a, b, γ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης.

2. Αν $b=0$ ή $\gamma=0$ (ελλιπές τριώνυμο), η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ παίρνει την μορφή $ax^2 + \gamma = 0$, ή $ax^2 + bx = 0$ αντίστοιχα, και λύνεται με **παραγοντοποίηση** (αν $a \cdot b = 0$, τότε $a = 0$ ή $b = 0$).

Π.χ. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α.1ος τρόπος: $x^2 - 9 = 0$

2ος τρόπος: $x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$ (χρήση ταυτότητας)

$x^2 = 9$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = \sqrt{9}$ ή $x = -\sqrt{9}$

$x = 3$ ή $x = -3$.

$x = 3$ ή $x = -3$.

β. $x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$ (κοινός παράγοντας)

$x = 0$ ή $x + 2 = 0$

$x = 0$ ή $x = -2$.

γ. $5x^2 = 20x$

$5x^2 - 20x = 0$ (μαζεύω όλους τους όρους της εξίσωσης στο ίδιο μέλος)

$5x(x - 4) = 0$

$5x = 0$ ή $x - 4 = 0$

$x = 0$ ή $x = 4$.

δ. $(x^2 - 4)(x^2 + x) = 0$ (αν η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$)

$x^2 - 4 = 0$ ή $x^2 + x = 0$

$x^2 = 4$ ή $x(x + 1) = 0$

$x = 2$ ή $x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = -1$.

3. Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ τότε για να λύσουμε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ υπολογίζουμε την διακρίνουσα : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

α) Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις (ρίζες) που δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

β) Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή λύση (ρίζα) που δίνεται από τον τύπο:

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

γ) Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει λύσεις (είναι αδύνατη).

ΠΡΟΣΟΧΗ: Γενικά, ένα τριώνυμο έχει λύσεις όταν $\Delta \geq 0$.

Δηλαδή, αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε

$\Delta > 0$	Η εξίσωση έχει δύο λύσεις άνισες
$\Delta = 0$	Η εξίσωση έχει μια διπλή λύση
$\Delta < 0$	Η εξίσωση είναι αδύνατη
$\Delta \geq 0$	Η εξίσωση έχει πραγματική λύση

Π.χ. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$$= \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

β) $(x+1)^2 - (x-1)(x+2) = -2x(x-3)$ (Αν η εξίσωση δεν έχει την μορφή που θέλουμε, εκτελούμε πράξεις μέχρι πάρει την μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$)

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - x^2 - 2x + x + 2 = -2x^2 + 6x$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + x + 2 + 2x^2 - 6x = 0$$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$.

$\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = 3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4}$

$$= \begin{cases} \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

4. Παραγοντοποίηση τριωνύμου: Αν $ax^2 + \beta x + \gamma$ ένα τριώνυμο με $\alpha, \beta, \gamma, \neq 0$ τότε:

α) Αν το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 , ισχύει $ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$.

β) Αν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα x_1 , ισχύει $ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)^2$

γ) Αν το τριώνυμο δεν έχει ρίζες, τότε δεν γράφεται σαν γινόμενο παραγόντων.

Π.χ. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

α) $x^2 - x - 2 = 0$

$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -2.$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$

$$= \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Επομένως ισχύει: $x^2 - x - 2 = 1(x-2)(x-(-1)) = (x-2)(x+1).$

β) $4x^2 - 4x + 1 = 0.$

$\alpha = 4, \beta = -4, \gamma = 1$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει διπλή λύση, την $x_1 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$

Επομένως ισχύει $4x^2 - 4x + 1 = 4(x - \frac{1}{2})^2.$

Ασκήσεις στις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x-2)(2x+8)=0$

β) $(3x-9)(8-4x)=0$

γ) $x^2-x=0$

δ) $x^2-1=0$

ε) $2x^2=-6x$

στ) $(x^2-4)(x^2+x)=0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2+5x-3=0$

β) $-x^2-x+6=0$

γ) $x^2-2x-3=0$

δ) $x^2+3=4x$

ε) $-5x+4=-x^2$

στ) $x^2=4x-4$

ζ) $2x^2-x=x^2+x-1$

η) $x^2-x+1=0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x(5x-13)=-6$

β) $x(3x+10)=3(x+2)$

γ) $(x-1)^2=4x-5(2x+1)$

δ) $(x-2)^2-(x-1)(x+1)=(x+3)^2-6x$

ε) $(x+4)^2-(x+2)^2=(x+3)^2$

4. Δίνεται η παράσταση $A(x) = (x+1)^2 - (x-1)(x+2) + 2x(x-3)$

α) Να αποδειχθεί ότι $A(x) = 2x^2 - 5x + 3$

β) Να λυθεί η εξίσωση $A(x) = 0$.

5. Δίνονται οι παραστάσεις $A(x) = (x+3)^2 - 2(x-1)(x+1) - (x-4)^2 - 7$ και $B(x) = (x-2)^2 - 4x(x-3) + x - 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $A(x) = -2x^2 + 14x - 12$.

β) Να αποδείξετε ότι $B(x) = -3x^2 + 9x - 6$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $A(x) = B(x)$.

6. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

α) $2x^2 + 3x - 5$

β) $3x^2 - 2x - 1$

γ) $x^2 + 5x + 4$

δ) $x^2 - 3x - 4$

ε) $4x^2 - 12x + 9$

στ) $4x^2 + 4x + 1$

7. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω ρητές παραστάσεις, και στη συνέχεια να απλοποιηθούν:

α) $A(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

β) $B(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{4 - x^2}$

γ) $\Gamma(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}$

δ) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 27}$

ε) $P(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2x - 2)^2 - (x - 4)^2 + 24 - 15x$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = 3x^2 - 15x + 12$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A(x) = \frac{3x^2 - 3x}{P(x)}$, και στη συνέχεια να απλοποιηθεί.

9. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 + 2x + \lambda$, με λ πραγματικό αριθμό.

α) Να βρεθεί το λ , ώστε το τριώνυμο να είναι 2ου βαθμού.

β) Να βρεθεί η διακρίνουσα του τριωνύμου.

γ) Να βρεθεί η τιμή του λ , ώστε το τριώνυμο να έχει διπλή λύση.

10. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

α) $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$

β) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$.