

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.13 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{x}$ ισχύει η ισότητα: $\frac{1}{3}(\vec{x} - 2\vec{\alpha}) + \frac{1}{6}(\vec{\beta} - \vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{x} - 4\vec{\alpha} + \vec{\beta})$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.14 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ και $\vec{y}$ επαληθεύουν τις ισότητες: $4\vec{x} + 5\vec{y} = 11\vec{\beta} - 22\vec{\alpha}$ και $6\vec{x} - 4\vec{y} = 36\vec{\alpha} - 18\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι αντίρροπα.

1.15 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ και $\vec{y}$ ισχύουν οι ισότητες: $5(\vec{x} - 2\vec{\beta}) = 3\vec{y} - 4\vec{\alpha}$ και $2(3\vec{y} + 7\vec{\alpha}) = 35\vec{\beta} - \vec{x}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι ίσα.

1.16 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{OF} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι το μέσο του AF .

1.17 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{OF} = -5\vec{\alpha} + 13\vec{\beta} - 10\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, F είναι συνευθειακά.

1.18 Για τα σημεία O, M, A, B, F ισχύει η ισότητα: $\vec{MF} + 3\vec{MO} + \vec{AO} + 4\vec{OB} = 4\vec{MA}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, F είναι συνευθειακά.

1.19 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία E, Z στις πλευρές $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα ώστε $\vec{AE} = \kappa \cdot \vec{AB}$ και $\vec{\Delta Z} = \kappa \cdot \vec{\Delta\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των $A\Delta, EZ$ και $B\Gamma$ είναι συνευθειακά.

1.20 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της AB . Στην $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $BE = 3B\Gamma$ και στην AF σημείο Z ώστε $AZ = \frac{3}{5} \cdot AF$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta Z}$ και $\vec{\Delta E}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AF} = \vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

1.21 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε το μέσο E της διαμέσου του $B\Delta$ και το σημείο Z της $B\Gamma$ ώστε $Z\Gamma = 3BZ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AE} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{4} \cdot \vec{AF}$.

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{AZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AF}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $EZ \parallel AB$.

δ) Ποια σχέση έχουν τα μήκη των τμημάτων AB και EZ .

1.22 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Στη διαγώνιο AF παίρνουμε σημείο E ώστε $AE = \frac{1}{4} \cdot AF$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z ώστε $BZ = \frac{2}{3} \cdot B\Gamma$ και στην προέκταση της πλευράς $\Delta\Gamma$ σημείο P ώστε $GP = \frac{3}{5} \cdot \Delta\Gamma$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{AE}, \vec{AZ}$ και $\vec{AP}$, ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{EZ}$ και $\vec{EP}$, ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Z, P είναι συνευθειακά.

1.23 Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{2}$. Να αποδείξετε ότι: i) $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$ ii) $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha}$.

1.24 Θεωρούμε τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Έστω $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ δεν είναι παράλληλα.

β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

1.25 Δίνεται ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η ισότητα: $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MF} - \vec{MD}|$.

Συντεταγμένες στο επίπεδο

1.26 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 + 3\lambda - 4)\vec{i} + (2\lambda^2 + 11\lambda + 12)\vec{j}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον λ ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

i) να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

ii) να είναι μη μηδενικό και παράλληλο στον άξονα $x'x$.

iii) να είναι μη μηδενικό και παράλληλο στον άξονα $y'y$.

1.27 Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa^2 - \kappa + 4)\vec{i} + (5 - \kappa)\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (\kappa + 12)\vec{i} - (3\kappa - 1)\vec{j}$, να είναι ίσα.

1.28 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2, 5)$, $B(-4, 1)$, $\Gamma(2, -1)$ και $\Delta(8, 3)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Έπειτα να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του.

1.29 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(5, 0)$, $\Gamma(4, -5)$.

α) Να βρεθεί σημείο Δ , ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου K του $AB\Gamma\Delta$.

1.30 Για ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δίνονται οι κορυφές $A(-2, 3)$, $B(5, 7)$ και το κέντρο του $K(1, 2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Γ και Δ .

1.31 Δίνονται τα σημεία $A(-2, -3)$, $B(6, 1)$, $\Gamma(-1, 2)$ και $\Delta(4, -3)$. Να αποδείξετε ότι το μέσο του τμήματος AB είναι σημείο της ευθείας $\Gamma\Delta$.

1.32 Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (6, -13)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (4, -5)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

1.33 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-13, 19)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις παράλληλες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (\frac{3}{2}, 4)$ και $\vec{\beta} = (-5, 2)$.

1.34 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6 + \lambda, 1 - \lambda)$ και $\vec{\beta} = (8, 4 - \lambda)$ να είναι παράλληλα.

1.35 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 - \kappa, \kappa)$ και $\vec{\beta} = (\kappa - 5, 6)$ να είναι αντίρροπα.

1.36 Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -1)$ και $\vec{\beta} = (1, \lambda)$ είναι μη συγγραμμικά και μετά να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda^3, 1)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.37 Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι ισότητες: $3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = (4, 15)$ και $2\vec{\beta} - 4\vec{\alpha} = (-20, 2)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (4, 1)$ και $\vec{\beta} = (-2, 3)$.

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-24, 1)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.38 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$ καθώς και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει αυτό με τον άξονα $x'x$.

1.39 Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , δίνονται τα σημεία $B(-3, -3)$ και $\Gamma(3, 9)$.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου A για το οποίο ισχύει: $\vec{AG} = -2\vec{AB}$.

ii) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{AO}$ με τον άξονα $x'x$.

1.40 Δίνονται τα σημεία $A(1, -\frac{3}{2})$, $B(2, -1)$ και $M(a, \frac{a-4}{2})$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και M είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε την τιμή του a ώστε $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{OM}$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

1.41 Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-5, 3)$. Να βρείτε:

α) Σημείο P του άξονα $x'x$, τέτοιο ώστε $(PA) = (PB)$.

β) Το μήκος του ύψους PK .

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου PAB .

1.42 Δίνονται τα σημεία $A(2\lambda, -1)$, $B(3\lambda - 1, \lambda - 2)$ και $\Gamma(4, -5)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες σχηματίζεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου BM , ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι αυτή δεν έχει ελάχιστη τιμή.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1.43 Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι 150° , να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

1.44 Αν $|\vec{\beta}| = 1$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{7}$, να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$.

1.45 Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και η γωνία των διανυσμάτων $4\vec{\alpha}$ και $-2\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{4}$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

1.46 Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα $3, 2\sqrt{3}$ αντίστοιχα και η γωνία που σχηματίζουν είναι $\frac{5\pi}{6}$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

γ) Να υπολογίσετε το $\vec{u}\vec{v}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αμβλεία.

1.47 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν μέτρα $2, 1$ αντίστοιχα. Η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Αν $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε:

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

β) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma}\vec{\delta}$.

γ) Το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

δ) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

1.48 Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{w} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

1.49 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \iff (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$;

1.50 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης αν τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά;

1.51 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 1. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{BF}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$

iii) $\vec{B\Delta} \cdot \vec{\Delta\Gamma}$

iv) $\vec{AF} \cdot \vec{\Delta\Delta}$

1.52 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις: $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$. Να αποδείξετε ότι τα δύο διανύσματα είναι αντίρροπα.

1.53 Να αποδείξετε ότι είναι κάθετα τα διανύσματα:

i) $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$ ii) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ και $\vec{\alpha}$

1.54 Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - (-3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 1)$.

1.55 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(2, -5)$ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

1.56 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(4, 1)$. Να βρείτε στον οριζόντιο άξονα $x'x$ σημείο M ώστε $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

1.57 Οι κορυφές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $A(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(0, 2)$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου.

1.58 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, 2)$ και $\vec{u} = (3, 14)$. Να βρείτε τις δύο κάθετες συνιστώσες στις οποίες αναλύεται το $\vec{u}$ εκ των οποίων η μια είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

1.59 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{w} = (3a, 2 - a^2)$, $a \in \mathbb{R}$, σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης προς το διάνυσμα $\vec{u} = (a, 1)$ και μιας κάθετης προς αυτό.

1.60 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 6)$ και $\vec{\beta} = (-1, 2)$.

i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ αν $(\vec{u} - \vec{\alpha}) \parallel \vec{\beta}$ και $(\vec{u} + \vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$.

1.61 Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 3$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -7$.

1.62 Αν για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \frac{3}{2}$.

1.63 Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $5\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4\vec{\beta}\vec{\gamma} + 3\vec{\gamma}\vec{\alpha} = 3$.

ii) Να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

1.64 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

1.65 Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 4$ και $|\vec{\beta}| = 2$.

1.66 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}$. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης, αν τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά;

1.67 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$. Για ένα διάνυσμα $\vec{x}$ δίνεται ότι $\vec{x} // (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$.

i) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) να βρείτε τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{x})}$.

1.68 i) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha}^2 = 3\vec{\beta}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

ii) Αν για τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει η ισότητα $\vec{\gamma}^2 = -8\vec{\beta}(\vec{\gamma} + 2\vec{\beta})$ τότε $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$.

iii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

1.69 Τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ έχουν μέτρα 3, 1 και 2 αντίστοιχα. Είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, \widehat{(\vec{\beta}, \vec{\gamma})} = 30^\circ$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})} = 120^\circ$.

i) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - 3\sqrt{3}\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$.

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

1.70 Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το διάνυσμα $\vec{w}$ που έχει μέτρο 3. Δίνεται ακόμα ότι $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \widehat{(\vec{w}, \vec{\alpha})} = 60^\circ$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.71 Αν $\vec{PA} + \vec{PB} - 2\vec{PT} = \vec{0}$ και $|\vec{PA}| = 6, |\vec{PB}| = |\vec{PT}| = 2\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι:

i) Το σημείο T είναι το μέσο του τμήματος AB .

ii) $\widehat{APB} = 90^\circ$.

iii) Το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{PB} + \vec{PT}$ είναι κάθετο στο $\vec{AT}$.

1.72 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το μέσο E της $\Gamma\Delta$ και το σημείο Z της AG ώστε $AZ = \frac{1}{3} \cdot \vec{AT}$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{AD} = \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 1$ και $\hat{A} = 120^\circ$, τότε:

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{EZ}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{EZ}$.

iii) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{EZ}$.

iv) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{EZ}$.

1.73 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση: $(\vec{\alpha}\vec{x})\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x}$.

i) Να αποδείξετε ότι $(\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1)(\vec{\alpha}\vec{x}) = \vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

ii) Αν $\vec{\beta}\vec{\alpha} \neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

1.74 Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 60^\circ$ και το μήκος της AG είναι τα $3/5$ του μήκους της AB . Στις πλευρές AB και AG παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και E ώστε $A\Delta = \frac{1}{5}AB$ και $AE = \frac{1}{3}AG$. Προεκτείνουμε την $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία Δ, E και Z είναι συνευθειακά.

ii) $BE \perp \Gamma\Delta$

iii) $|\vec{BE}| = \sqrt{3}|\vec{\Gamma\Delta}|$.

1.75 Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y) = 8x + 9y$ με $4x^2 + 9y^2 = 36$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της F , καθώς και τις τιμές των x, y για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Εξίσωση ευθείας

2.1 Δίνονται τα σημεία $A(-1, -3)$, $(0, 2)$, $\Gamma(8, 3)$ και $\Delta(3, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα παραπάνω σημεία είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τραπεζίου.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου του.

2.2 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-10, 2)$, $(6, 4)$. Το ορθόκεντρό του είναι το $H(5, 2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ και τις εξισώσεις των πλευρών του.

2.3 Να βρείτε την εξίσωση της συμμετρικής της ευθείας $(\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x + 3$ ως προς την ευθεία $(\eta) : y = x + 1$.

2.4 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $(3, 4)$, $\Gamma(7, -1)$ και $\Delta(-3, -6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που διέρχεται από το μέσο M της $B\Delta$ και είναι κάθετη στην $A\Delta$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 που διέρχεται από το μέσο N της $A\Gamma$ και είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και η μεσοκάθετος της $\Gamma\Delta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.5 Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = -\frac{1}{3}x - 3$ και τα σημεία $A(-5, 2)$ και $B(3, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε) .

β) Ποιές είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών (ε) και (ζ) ;

γ) Βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) .

δ) Να βρείτε σημείο P της ευθείας (ε) ώστε το άθροισμα $(AP) + (PB)$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

2.6 Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$ του καρτεσιανού επιπέδου xOy .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία $O\Delta$.

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε) . Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

2.7 Να σχεδιάσετε τις γραμμές που παριστάνουν οι επόμενες εξισώσεις:

α) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4xy + 4 = 0$

β) $|2x - 3| = |1 - y|$

γ) $2y^2 + y - 3 = 0$

δ) $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$

ε) $x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 4 = 0$

στ) $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$

2.8 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των δύο ευθειών.

2.9 Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x + 2y + 3) + \lambda(y - x) - 2x - y - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση, διέρχονται από το ίδιο σημείο P , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Για ποιά τιμή του λ η ευθεία που προκύπτει είναι παράλληλη στον άξονα $x'Ox$, για ποιά τιμή είναι παράλληλη στον

άξονα $y'y$ και για ποιά τιμή είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων;

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P και τέμνει τους ημιάξονες Ox' και Oy' στα σημεία A και B ώστε το P να είναι το μέσο του τμήματος AB . Για ποιά τιμή του λ προκύπτει η εξίσωση της προηγούμενης ευθείας;

2.10 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \sin^2 \frac{\theta}{2} + y \eta \mu^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta - 1 = 0$, με $\theta \in [0, \pi]$, παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

2.11 Στους ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε τα σημεία A και Γ έτσι ώστε $OA + O\Gamma = 5$. Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο $OAB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που φέρνουμε κάθετα από το B προς την $A\Gamma$, διέρχεται από σταθερό σημείο.

2.12 Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda - 1)x - \lambda y + 1 - 5\mu = 0$ (1) και $(\mu^2 - 2\mu)x + \mu y + 3\lambda + 7 = 0$ (2), όπου λ, μ ακέραιοι. Να υπολογίσετε:

α) Τις τιμές των λ, μ ώστε οι δύο εξισώσεις να παριστάνουν ευθείες.

β) Τις τιμές των λ, μ ώστε οι δύο ευθείες να τέμνονται στο σημείο $A(-4, 1)$.

γ) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις που προκύπτουν από τις παραπάνω τιμές των λ και μ .

2.13 Αν οι κορυφές ενός τριγώνου βρίσκονται στην υπερβολή $y = \frac{1}{x}$, να αποδειχθεί ότι και το ορθόκεντρό του βρίσκεται πάνω σε αυτήν.

Εμβαδόν τριγώνου

2.14 Δίνονται η ευθεία $(\varepsilon) : 6x - 8y = 7$ και το σημείο $A(-1, 2)$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην (ε) .

β) Την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των (ε) και (ζ) .

γ) Την απόσταση των ευθειών (ε) και (ζ) .

2.15 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(7, 6)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(4\lambda - 1, 3\lambda + 2)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της κορυφής Γ .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό.

2.16 Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $\Gamma(3, -1)$ είναι διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του κέντρου του.

β) Οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του Δ .

γ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

2.17 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + x - y = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 , των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

β) Να βρείτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και τον άξονα $x'x$.

2.18 Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(0, 2)$ και $\Delta(0, 4)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M ώστε τα τρίγωνα MAB και $M\Gamma\Delta$ να έχουν ίσα εμβαδά.

2.19 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, 4)$, $B(-2, -2)$ και $\Gamma(3, 0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM του τριγώνου.

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής P των ευθειών BM και $A\Delta$.

δ) Να αποδείξετε ότι $(APM) = \frac{3}{23} \cdot (AB\Gamma)$.

2.20 Δίνονται δύο ευθείες με εξισώσεις $x + \mu y + 1 = 0$ και $2\mu x + 2y + \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ για τις οποίες οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση $2\sqrt{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ο Κύκλος

3.1 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-3, 2)$ και αποκόπτει από την ευθεία $(\varepsilon) : x - 2y = 3$ χορδή μήκους 6.

3.2 Δίνεται ο κύκλος $(C) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του η οποία έχει μέσο το σημείο M .

3.3 Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 2)$, $(-3, -1)$ και $\Gamma(1, 3)$.

3.4 Δίνεται ο κύκλος $(C) : (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

3.5 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon) : 4x - 3y = 4$ και είναι ομόκεντρος με τον κύκλο $(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$.

3.6 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 3)$ και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $(\varepsilon) : 3x - y = 2$.

3.7 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ και το σημείο $P(-3, -8)$.

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων του C που διέρχονται από το P .

β) Να βρεθεί η γωνία των εφαπτόμενων.

3.8 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x \sin \theta - 2y \eta \mu \theta - 1 = 0$, με $0 \leq \theta < 2\pi$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε την ακτίνα και το κέντρο.

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο.

γ) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου στο σημείο $M(1, 2)$.

3.9 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda : x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2(\lambda + 1)y + 4\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές της πραγματικής παραμέτρου λ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

3.10 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\mu - 1)x - \mu y - 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C , για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ .

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(1, -1)$ ανήκει στον κύκλο C .

γ) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η χορδή που ορίζει η ευθεία $(\varepsilon) : x - 2y - 2 = 0$ στον κύκλο C φαίνεται από το P υπό ορθή γωνία.

3.11 Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C και τη γραμμή στην οποία κινείται το κέντρο του, για τις διάφορες τιμές του λ .

γ) Τις τιμές του λ , ώστε η ευθεία $\varepsilon : x - y - 2 = 0$ να εφάπτεται του κύκλου C .

3.12 Θεωρούμε τις εξισώσεις $C : x^2 + y^2 + \lambda x + y - 1 = 0$, $\varepsilon : y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση C παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του λ .
γ) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία A και B .
δ) Αν $(AB) = \sqrt{6}$, να βρείτε την τιμή του λ .

3.13 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2kx + k^2 - 2 = 0$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει πάντα κύκλο. Μετά να βρείτε την ακτίνα του και το γεωμετρικό τόπο του κέντρου του.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : x - y = 3$ είναι κοινή εφαπτομένη σε δύο κύκλους, που προκύπτουν από την εξίσωση.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτόμενης που διέρχεται από το σημείο στο οποίο η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

3.14 Δίνονται οι γραμμές $C_\lambda : x^2 + y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y + 5\lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οι C_λ είναι κύκλοι οι οποίοι είναι ίσοι.
ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων.
iii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ εφάπτονται δύο ευθειών των οποίων να βρεθούν οι εξισώσεις.

3.15 Θεωρούμε την εξίσωση $C_\lambda : x^2 + y^2 + (\mu - 1)x + \mu y - \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του μ , η εξίσωση παριστάνει κύκλο.
ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.
iii) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η κοινή χορδή των κύκλων.

3.16 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $P(t, \frac{t+5}{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου.
β) Αν από το P φέρουμε τις εφαπτόμενες PA και PB του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AB διέρχονται από σταθερό σημείο.

3.17 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2 + y^2$, αν ισχύει ότι $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 196$.

Η Παραβολή

3.18 α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_1 που διέρχεται από το σημείο $M(1, -2)$ και έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$, καθώς και την εξίσωση της παραβολής C_2 που διέρχεται από το σημείο $N(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ και έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

- β)** Να βρείτε τα σημεία τομής των C_1, C_2 και την εξίσωση της ευθείας ε στην οποία ανήκουν.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία E_1E_2 (E_1, E_2 είναι οι εστίες των παραβολών) είναι κάθετη στην ε και το σημείο τομής των διευθετούσών τους δ_1, δ_2 ανήκει στην ε .

3.19 Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και η παραβολή $C_2 : y^2 = 3x$.

- α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο και στην παραβολή.
β) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο του άξονα $x'x$.
γ) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων.

3.20 Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 2px$, $p > 0$. Έστω A σημείο της παραβολής και $y = \lambda x$, $\lambda > 0$ είναι η εξίσωση της ευθείας OA . Θεωρούμε σημείο B της παραβολής με $OA \perp OB$.

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OB .
β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των A, B ως συνάρτηση του λ .
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .
δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο για τις διάφορες τιμές του λ .

Η Έλλειψη

3.21 Δίνονται τα σημεία $E(\sqrt{3}, 0)$ και $E'(-\sqrt{3}, 0)$.

- α)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(ME) + (ME') = 4$.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ ανήκει στην καμπύλη του προηγούμενου ερωτήματος και μετά να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης στο Γ .
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 3$.

3.22 Δίνονται δύο κωνικές τομές: η παραβολή $C_1 : y^2 = 2px$ και η έλλειψη $C_2 : 4x^2 + 2y^2 = 3p^2, p > 0$.

α) Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_1, C_2 στα σημεία τομής τους είναι κάθετες.

3.23 Δίνονται τα σημεία $K \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}, 0 \right)$ και $L \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, 0 \right)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $(MK) + (ML) = 6$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Sigma(-2, 1)$ ανήκει στην προηγούμενη καμπύλη και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο Σ .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία $K\hat{\Sigma}L$.

Η Υπερβολή

3.24 Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ και η ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y - 6 = 0$.

3.25 Θεωρούμε την έλλειψη $C_1 : x^2 + 4y^2 = 4$ και την υπερβολή $C_2 : x^2 - 2y^2 = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι C_1, C_2 έχουν τις ίδιες εστίες.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής τους.

3.26 Θεωρούμε την υπερβολή $C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και την εφαπτόμενη αυτής ε στο σημείο της P . Έστω A, B τα σημεία τομής της ε με τις ασύμπτωτες της υπερβολής. Να αποδείξετε ότι:

α) Το P είναι το μέσο του AB .

β) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, όταν το P κινείται στην C .