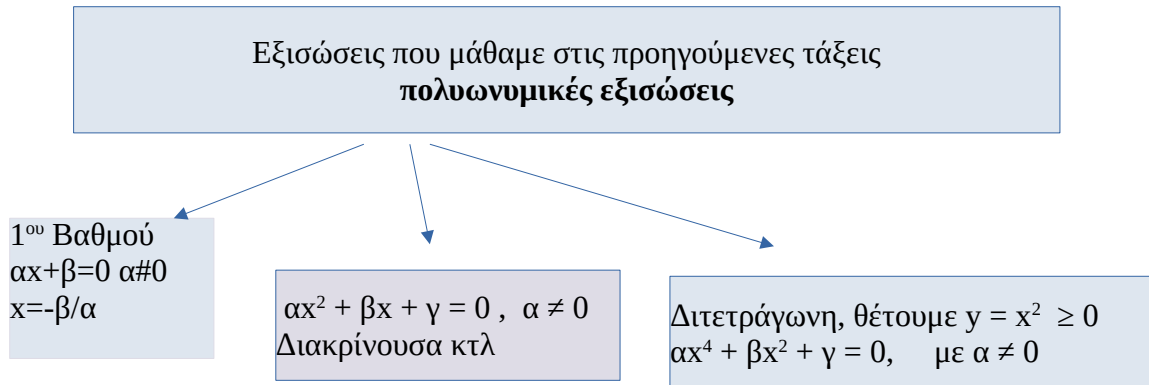


4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων



Ορισμός 1:

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0$$

Παραδείγματα πολυωνυμικών εξισώσεων

1. $2x + 4 = 0$
2. $x^2 + x - 2 = 0$
3. $2x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$
4. $-3x^6 + 5x^2 + 1 = 0$

Ορισμός 2:

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης: ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

δηλαδή κάθε αριθμό ρ , για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Για τις ασκήσεις

Για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 2, θα περιοριστούμε στην γνωστή μας παραγοντοποίηση.

Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \dots P_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P_1(x) = 0) \quad \text{ή} \quad P_2(x) = 0 \quad \text{ή} \dots \quad P_k(x) = 0$$

Ουσιαστικά «κατεβάζουμε» τον βαθμό του πολωνύμου

Ας λύσουμε την εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0$

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση η παραγοντοποίηση επιτυγχάνεται με κλασικές μεθόδους

$$x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

Σπάει σε δυο πολυωνυμικές εξισώσεις μια 1^{ου} και μια 2^{ου} βαθμού.

$$(x - 1)[x(x + 1) - 2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

Λύνουμε τη εξίσωση 2ου βαθμού

$$\{(x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0\}$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

Παράγοντας της μορφής $x - \rho$

Το θεώρημα που ακολουθεί μας βοηθά σε ορισμένες περιπτώσεις, στην εύρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακέραιων ριζών)

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$,

με ακέραιους συντελεστές

$$\{ \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{Z} \}.$$

Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_n \rho^n - \alpha_{n-1} \rho^{n-1} - \dots - \alpha_1 \rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1)$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1$ είναι ακέραιος.

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0 .



- Αυτό σημαίνει ότι αν το πολυώνυμο με *ακέραιους συντελεστές* έχει *ακέραια ρίζα*, τότε αυτή διαιρεί τον σταθερό όρο.
- Οπότε δοκιμάζοντας με αντικατάσταση το ± 1 (το οποίο θα είναι πάντα υποψήφια ρίζα)
και με Σχ. Horner τους υπόλοιπους διαιρέτες και με λίγη τύχη εν τέλει θα γίνει η παραγοντοποίηση. Μπορεί ένας αριθμός να είναι δυο και περισσότερες φορές ρίζα της εξίσωσης.
- Υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχουν έπειτα από δοκιμές (ατυχία!!) τελικά ακέραιες ρίζες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1^ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$.

Λύση:

$$1x^3 - 3x^2 + 1x + 2 = 0$$

ακέραιοι συντελεστές σταθερός ακέραιος όρος

Πιθανές ακέραιες ρίζες: Διαιρέτες του +2

$2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2)$ άρα δοκιμάζουμε τις $\pm 1, \pm 2$.

$1^{\text{ov}} P(1) = 1 - 3 + 1 + 2 = 1 \neq 0$ δεν είναι ρίζα	+(όταν αντικαθιστώ με το $x=1$ απλά προσθέτω τους συντελεστές) Δεν χρειάζεται να εκτελέσω Σχ. Horner
$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 2$ $= -1 - 3 \cdot 1 - 1 + 2 = -1 - 3 - 1 + 2 = -3 \neq 0$ δεν είναι ρίζα	Δεν χρειάζεται να εκτελέσω Σχ. Horner

x^3	$-3x^2$	$+x$	$+2$	$x-2$
1	-3	1	2	$\rho = 2$
	2	-2	-2	
1	-1	-1	0	

$$1x^2 \quad -1x \quad -1$$

Επομένως το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Συγκεκριμένα από το τελευταίο σχήμα έχουμε

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 & \Delta &= \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma \\ \beta &= -1 & &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) \\ \gamma &= -1 & &= 1 + 4 = 5 > 0 \end{aligned}$$

δύο άνισες λύσεις

$$x = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 2) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 0$$

ΣΧΟΛΙΟ Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν αληθεύει. Με άλλα λόγια μπορεί ένας ακέραιος ρ να είναι διαιρέτης του a_0 , χωρίς αυτός να είναι κατ' ανάγκη και ρίζα της εξίσωσης π.χ. ο $\rho = 1$.

2° Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4 = 0$.

Λύση:

$4 = 1 \cdot 4 = (-1) \cdot (-4) = 2 \cdot 2 = (-2)(-2)$ πάντα το ± 1 και το ± 0 ίδιος αριθμός.

Πιθανές ακέραιες ρίζες: Διαιρέτες του $+4 : \pm 1, \pm 2, \pm 4$ (6 στο πλήθος)

Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί, οι διαιρέτες 1, 2, και 4 αποκλείεται να είναι ρίζες της.

*** Ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Άρα αντικαθιστώντας τα με ρ θετικούς αριθμούς η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου είναι $\neq 0$.

Οπότε οι πιθανές ακέραιες ρίζες : -1 , -2, -4

$$P(-1) = (-1)^4 + 5(-1)^3 + 9(-1)^2 + 8(-1) + 4 = 1 - 5 + 9 - 8 = 1 \neq 0$$

x^4	$+ 5x^3$	$+ 9x^2$	$+ 8x$	$+ 4$	$x+2$	$P(-2) = 0$
1	5	9	8	4	$\rho = -2$	Άρα το -2 είναι ρίζα του P(x)
	-2	-6	-6	-4		
1	3	3	2	0		
$1x^3$	$+ 3x^2$	$+ 3x$	$+ 2$			

$$(x + 2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 0$$

Ξανά δοκιμάζουμε το - 2

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \quad x+2$$

1	3	3	2	$\rho = -2$
	-2	-2	-2	
1	1	1	0	

$$x^2 + x + 1$$

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4 = (x+2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = (x+2)(x+2)(x^2 + x + 1) =$$

$$(x+2)^2(x^2 + x + 1) = 0$$

$\Delta = -3 < 0$ αδύνατη εξίσωση
 μη παραγοντοποιήσιμη