18-02-2022 ΜΑΘΗΜΑ: 4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
Άσκηση 1

$(3x^3 + 6x^2 - 17x + 20) : (x + 3)$

Διαιρετέος				διαιρέτης
$3x^3$	$+6x^2$	$-17x$	$+20$	$x + 3$
$-3x^3$ +	$-9x^2$			$3x^2 - 3x - 8$
$0x^3$	$-3x^2$	$-17x$		πηλίκο
	$+3x^2$	$+9x$		
	$0x^2$	$-8x$	$+20$	
		$+8x$	$+24$	
		$0x$	$+44$	
			υπόλοιπο	

1. $\dfrac{3x^3}{x} = 3x^2$

2. $\dfrac{-3x^2}{x} = -3x$

3. $\dfrac{-8x}{x} = -8$

- **<u>Ταυτότητα της διαίρεσης</u>**

$3x^3 + 6x^2 - 17x + 20 = (x + 3)(3x^2 - 3x - 8) + 44$

Ο βαθμός του υπολοίπου **44** είναι μικρότερος αυτού του διαιρέτη x +3

- **Υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή**

$x = -3 \iff x - (-3) = 0 \iff x+3 = 0$

$P(-3) = 3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 17(-3) + 20$

$= 3(-27) + 6 \cdot 9 - 17(-3) + 20$

$= -81 + 54 + 51 + 20 = 44$

Τυχαίο;;;

Διαιρετέος					διαιρέτης
x^4	$+0x^3$	$+0x^2$	$+0x$	-81	$x-3$
$-x^4$	$+3x^3$				$x^3+3x^2+9x+27$
$0x^3$	$+3x^3$	$+0x^2$			πηλίκο
$+$	$-3x^3$	$+9x^2$			
	$+0x^3$	$9x^2$	$+0x$		
		$-9x^2$	$+27x$		
			$27x$	-81	
			$-27x$	$+81$	
			$0x$	$+0$	

$$\frac{x^4}{x}=x^3$$

$$\frac{3x^3}{x}=3$$

$$\frac{9x^2}{x}=9$$

$$\frac{27x}{x}=27$$

υπόλοιπο *Τέλεια διαίρεση*

- **Ταυτότητα της διαίρεσης**

$$x^4-81=(x-3)(x^3+3x^2+9x+27)+0$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι:

➔ το δ(x) ***διαιρεί*** το Δ(x)

ή

➔ το δ(x) είναι ***παράγοντας*** του Δ(x)

ή

➔ το Δ(x) ***διαιρείται*** με το δ(x)

ή

➔ το δ(x) είναι διαιρέτης του Δ(x).

- **Υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή**
-

x = 3 <=> x - 3 = 0 <=> x-3 =0

P(3) = 3^4 – 81

Τυχαίο;;;
Το 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου και το υπόλοιπο = 0

= 81 -81 = 0

P(3) = 0 επειδή είναι τέλεια διαίρεση!

Το **υπόλοιπο υ** της **διαίρεσης** του **P(x)** με **x - ρ** (*1ου βαθμού*)

Μέθοδοι υπολογισμού

Με την κλασσική διαίρεση
Δ(x) = (x-ρ)π(x) +υ

Αντικατάσταση P(ρ)

Σχήμα Horner

Διαίρεση πολυωνύμου με x - ρ.

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x - ρ γράφεται.

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης **x - ρ** είναι 1ου βαθμού,

το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ.

Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

0

και, αν θέσουμε x = ρ. Επομένως

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon =$$

$$= 0 + \upsilon$$

$$= \upsilon$$

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου **P(x)** με το **x - ρ** είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για **x = ρ**. Είναι δηλαδή

$$\upsilon = P(\rho)$$

Θετικά της μεθόδου αντικατάστασης:

1. Απλή
2. Κατάλληλη για μικρούς αριθμούς: ± 1 ,0 ίσως και ± 2 .

Αρνητικά μεθόδου αντικατάστασης

Δεν είναι κατάλληλη για αριθμούς διαφορετικούς της περίπτωσης 2

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$

αν και μόνο αν

το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

=> Έστω ότι το $\mathbf{x - \rho}$ είναι *παράγοντας* του $P(x)$. Τότε

$$\mathbf{P(x) = (x - \rho)\pi(x)}$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$\mathbf{P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0},$$

που σημαίνει ότι το **ρ είναι ρίζα του P(x)**.

<= Αντιστρόφως:

Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$. Τότε από τη σχέση

$$\mathbf{P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)}$$

παίρνουμε

$$\mathbf{P(x) = (x - \rho)\pi(x),}$$

που σημαίνει ότι το $\mathbf{x - \rho}$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

∎

ΣΧΗΜΑ HORNER

Εφαρμόζεται μόνο για διαιρέτες της μορφής **x – ρ**

Όχι για περιπτώσεις όπως - x -ρ ,
2x +4, κ.τ.λ.

$(3x^3 + 6x^2 - 17x + 20) : (x + 3)$

Βαθμός Διαιρετέου: 3
Πλήθος όρων: 3+1 =4 =πλήθος στηλών

$3x^3$	**$+ 6x^2$**	**$- 17x$**	**+20**	**x-(-3)**
3	6	-17	20	**-3**
			υπολοιπο	

$3x^3$	**$+ 6x^2$**	**$- 17x$**	**+20**	**x-(-3)**
3	6	-17	20	**-3**
	3(-3)	(-3)[6+3(-3)]	(-3)[-17+(-3)[6+3(-3)]]	
3	6+3(-3)	-17+(-3)[6+3(-3)]	20+[(-3)[-17+(-3)[6+3(-3)]]]	

$3x^3$ $+ 6x^2$ $- 17x$ $+20$ $x-(-3)$

3	6	-17	20	**-3**
	-9	9 (-3)(-3)	24	
3	-3	-8	44	

Πηλίκο: **$3x^2 - 3x - 8$**

Υπόλοιπο: 44

3 επί (-3)= -9

Τοποθετούμε το -9
και το προσθέτουμε
με το 6

ΣΧΟΛΙΟ Στο παραπάνω παράδειγμα, αν αντί για το σχήμα Horner εκτελέσουμε τη διαίρεση, θα διαπιστώσουμε ότι οι πράξεις που απαιτούνται είναι αρκετά πιο επίπονες.

Το ίδιο θα συμβεί, αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το P(2) θέτοντας όπου x το 2.

Το σχήμα Horner είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις όπου
το ρ ή ο βαθμός του P(x) είναι μεγάλος αριθμός.

Για το λόγο αυτό, τόσο στις διαιρέσεις με το x - ρ όσο και στον υπολογισμό της τιμής P(ρ), θα χρησιμοποιούμε συνήθως το σχήμα Horner.