

1° ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2) : (x - \alpha)$.

Λύση

Βαθμός: 2

Πλήθος όρων: $2+1=3$ στήλες

$4x^2$	$- 8\alpha x$	$4\alpha^2$	$x - \alpha$
4	- 8α	$4\alpha^2$	α
	4α	$-4\alpha^2$	
4	-4α	0	

Στοιχεία Διαίρεσης	Βαθμός	
$\Delta(x) = 4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2$	2	
$\delta(x) = x - \alpha$	1	Παράγοντας: ναι
$\pi(x) = 4x - 4\alpha$	1	Παράγοντας: ναι
$\upsilon = 0$	0	

$$\text{Άρα } 4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2 = (x - \alpha)(4x - 4\alpha) + 0$$

$$4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2 = (x - \alpha)(4x - 4\alpha) = 4(x - \alpha)(x - \alpha)$$

2° ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$(x^n - \alpha^n) = (x - \alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + x^{n-3}\alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1})$$

Πρώτα θα κάνουμε εφαρμογή τριών γνωστών ταυτοτήτων

Όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο η προφανής ρίζα θα καθορίζει τον α διαιρέτη

$$\begin{array}{llll} x^2 - 9 & = & x^2 - 3^2 & = (x + 3) \cdot (x - 3) \\ x^3 + 8 & = & x^3 + 2^3 & = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2^2) \\ x^3 - 8 & = & x^3 - 2^3 & = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 2^2) \end{array}$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

Στοιχεία Διαίρεσης	Βαθμός	
$\Delta(x) = x^2 - 9$	2 άρα 2+1=3 όροι (στήλες)	
$\delta(x) = x-3^*$ ή $x + 3^{**}$	1	Παράγοντας: ναι
$\pi(x) = x+3$	1	Παράγοντας: ναι
$v = 0$	0	

*

x^2	$0x$	-9	$x - 3$
1	0	-9	3
	3	9	
1	3	0	υπόλοιπο
1x	+3	πηλίκο	

$$x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$$

**

x^2	$0x$	-9	$x + 3 = x - (- 3)$
1	0	-9	- 3
	3	9	
1	-3	0	υπόλοιπο
1x	-3	πηλίκο	

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x-3)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 2^2)$$

Στοιχεία Διαίρεσης	Βαθμός	
$\Delta(x) = x^3 - 8$	3 άρα $3+1=4$ όροι (στήλες)	
$\delta(x) = x - 2$	1	Παράγοντας: ναι
$\pi(x) = x^2 - 2x + 4$	2	Παράγοντας: ναι
$\upsilon = 0$	0	

x^3	$+ 0x^2$	$+ 0x$	-8	$x - 2$
1	0	0	-8	2
	2	4	8	
1	2	4	0	υπόλοιπο
$1x^2$	$+2x$	4		πηλίκο

Τελικά: $x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 2^2) + 0$

Ομοίως και η $x^3 + 8 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2^2)$.

Άρα για την

$$(x^n - \alpha^n) = (x - \alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + x^{n-3}\alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1})$$

Στοιχεία Διαίρεσης	Βαθμός	
$\Delta(x) = x^n - \alpha^n$	n άρα $n+1=$ όροι (στήλες)	
$\delta(x) = x - \alpha$	1	Παράγοντας: ναι
$\pi(x) = x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + x^{n-3}\alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}$	2	Παράγοντας: ναι
$\upsilon = 0$	0	

	x^v	$+ 0x^{v-1}$	$+ 0x^{v-2}$		$0x$	$- a^v$	$x - \alpha$
	1	0	0		0	$-a^v$	α
$0+\alpha=2$		α	α^2		a^{v-1}	a^v	
	1	α^1	α^2		a^{v-1}	0	υπόλοιπο
	$1x^{v-1}$	$+ \alpha x^{v-2}$	$+ \alpha^2 x^{v-3}$		$+ \alpha^{v-1}$	πηλίκο	

3. Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το $x - 1$ είναι παράγοντας του $g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$.

Λύση:

$x - 1$ παράγοντας του $g(x)$ αν και μόνο αν $g(1) = 0$

1^{ος} τρόπος

Με αντικατάσταση $x - 1$, συμφέρει γιατί το 1 είναι 'βατός' αριθμός

$$g(1) = k^2 \cdot 1^4 + 3 \cdot k \cdot 1^2 - 4 = 0$$

$$k^2 + 3 \cdot k - 4 = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$k = -4 \text{ ή } k = 1$$

2^{ος} τρόπος : Με σχήμα Horner

g 4^{ου} βαθμού άρα $4+1 = 5$ στήλες

$$k^2x^4 + 0x^3 + 3kx^2 + 0x - 4 \quad x - 1$$

k^2	0	$3k$	0	-4	1
-------	---	------	---	----	---

	k^2	k^2	$k^2 + 3k$	$k^2 + 3k$	
k^2	k^2	$k^2 + 3k$	$k^2 + 3k$	$k^2 + 3k - 4$	→ υπόλοιπο $\nu=0$
k^2x^3	$+k^2x^2$	$+(k^2 + 3k)x$	$+k^2 + 3k$	← πηλίκο	

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλικά και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(-x^3 + 75x - 250) : (x + 10)$

$-x^3$	$+ 0x^2$	$+ 75x$	-250	$x + 10$
-1	0	75	-250	- 10
	10	-100	250	
-1	10	- 25	0	→ υπόλοιπο
$-1x^2$	$+10x$	-75	πηλίκο	

$$\Delta(x) = -x^3 + 75x - 250$$

$$\delta(x) = x + 10$$

$$\pi(x) = -x^2 + 10x - 75$$

$$v = 0$$

$$\text{ii) } (x^3 + 512) : (x + 8)$$

x^3	$+ 0x^2$	$+ 0x$	512	$x + 8$
1	0	0	512	- 8
	- 8	64	- 512	
1	- 8	64	0	υπόλοιπο
$1x^2$	$- 8x$	64	πηλίκο	

$$\Delta(x) = x^3 + 512$$

$$\delta(x) = x + 8$$

$$\pi(x) = x^2 - 8x + 64$$

$$v = 0$$

$$x^3 + 512 = (x + 8)(x^2 - 8x + 64) + 0$$

$$x^3 + 512 = (x + 8)(x^2 - 8x + 64)$$

$$\text{iii) } (x^5 + 1) : (x - 1)$$

x^5	$+ 0x^4$	$+ 0x^3$	$+ 0x^2$	$0x$	$+ 1$	$x - 1$
1	0	0	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	2	υπόλοιπο
$1x^4$	$+ 1x^3$	$+ 1x^2$	$1x$	1	πηλίκο	

$$\Delta(x) = x^5 + 1$$

$$\delta(x) = x - 1$$

$$\pi(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$v = 2$$

$$\text{iv) } -3x^4 : (x - 2)$$

$-3x^4$	$+0x^3$	$+0x^2$	$+0x$	0	$x - 2$
-3	0	0	0	0	2
	-6	-12	-24	-48	
-3	-6	-12	-24	-48	υπόλοιπο
$-3x^3$	$-6x^2$	$-12x$	-24	πηλίκο	

$$\Delta(x) = -3x^4$$

$$\delta(x) = x - 2$$

$$\pi(x) = -3x^3 - 6x^2 - 12x - 24$$

$$v = -48$$

$$-3x^4 = (x - 2)(-3x^3 - 6x^2 - 12x - 24) - 48$$

$$v) (4x^3 + 16x^2 - 23x - 15) : (x + \frac{1}{2})$$

$4x^3$	$+ 16x^2$	$-23x$	-15	$x + \frac{1}{2}$
4	16	- 23	- 15	$-\frac{1}{2}$
	- 2	-7	15	
4	14	-30	0	υπόλοιπο
$4x^2$	$+14x$	-30	πηλίκο	

$$4 \cdot (-\frac{1}{2}) = -2$$

$$14 \cdot (-\frac{1}{2}) = -7$$

$$-30 \cdot (-\frac{1}{2}) = 15$$

$$\Delta(x) = 4x^3 + 16x^2 - 23x - 15$$

$$\delta(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$\pi(x) = 4x^2 + 14x - 30$$

$$v = 0$$

Τελικά ο αλγόριθμος της διαίρεσης

$$4x^3 + 16x^2 - 23x - 15 = (x + \frac{1}{2})(4x^2 + 14x - 30) \quad \text{Παραγοντοποιώντας το πηλίκο}$$

$$= (x + \frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot (2x^2 + 7x - 15) = (2x + 1)(2x^2 + 7x - 15)$$

Το τελευταίο είναι μια ευκαιρία να προσαρμόσουμε περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν πληρούνται άμεσα οι προϋποθέσεις του Σχήματος **Horner** όπως πχ:

$$(4x^3 + 16x^2 - 23x - 15) : (2x + 1)$$

Παίρνουμε τον διαιρέτη και βγάζουμε κοινό παράγοντα τον συντελεστή του x

$$2(x + \frac{1}{2}).$$

εφαρμόζουμε το Σχήμα Horner για $x + \frac{1}{2}$ και ύστερα αποσπούμε από το πηλίκο $\pi(x)$ τον συντελεστή.

2η Περίπτωση όχι άμεσης εφαρμογής του Σχήματος *Horner*

$$2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 : (x - 1)(x - 2)$$

$2x^4$	$-6x^3$	$+5x^2$	$-3x$	$+2$	$x - 1$
2	-6	5	-3	2	1
	2	-4	1	-2	
2	-4	1	-2	0	υπόλοιπο
$2x^3$	$-4x^2$	$1x$	-2	πηλίκο	

$$2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2) *$$

$2x^3$	$-4x^2$	$+1x$	-2	$x - 2$
2	-4	1	-2	2
	4	0	-2	
2	0	1	0	υπόλοιπο
$1x^2$	$+0x$	$+1$	πηλίκο	

$$2x^3 - 4x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1) **$$

* και **

$$2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$$

$$x^3 - 7x + 6 : (x - 1)(x + 2)$$

Άσκηση σελ 139

2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2) : (x + 1)$.

Λύση

Μας συμφέρει να λύσουμε την άσκηση με την μέθοδο της αντικατάστασης, λόγω μεγάλου βαθμού, άρα και στηλών στο σχήμα Horner

$$P(\rho) = \upsilon = 14$$

$$P(-1) = 18(-1)^{80} - 6(-1)^{50} + 4(-1)^{20} - 2 = 18 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 = 18 - 6 + 4 - 2 = 14$$

5. Αν $P(x) = -2x^3 - 2x^2 - x + 2409$ να βρείτε το $P(-11)$.

Σε αυτήν την άσκηση σε αντίθεση με τη 2 δεν μας συμφέρει το σχήμα Horner και όχι η αντικατάσταση

$P(-11) = \upsilon$ διότι το $\rho = -11$ είναι σχετικά μεγάλος αριθμός. (δοκιμάστε το!)

$-2x^3$	$-2x^2$	$-1x$	$+2409$	$x + 11$
-2	-2	-1	2409	- 11
	22	-220	2431	
-2	20	- 221	4840	υπόλοιπο
$-2x^2$	$+20x$	-221	πηλίκο	

$$\Delta(x) = -2x^3 - 2x^2 - x + 2409$$

$$\delta(x) = x + 11$$

$$\pi(x) = -2x^2 + 20x - 221$$

$$\upsilon = 4840$$

$$-2x^3 - 2x^2 - x + 2409 = (x + 11)(-2x^2 + 20x - 221) + 4840$$