

Προσδιορισμός Παραμέτρων και επίλυση εξισώσεων -Ανισώσεων

Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 20x + \beta$ έχει παράγοντα το $x + 2$, ενώ διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -15 .

1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Λύση

Θυμόμαστε!

- Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$
- Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$, έχει υπόλοιπο $u = P(\rho)$

1. Το $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 20x + \beta$ έχει **παράγοντα** το $x + 2$, άρα ισχύει:

$$P(-2) = 0$$

$$2(-2)^3 + \alpha(-2)^2 - 20(-2) + \beta = 0 \Leftrightarrow 2(-8) + \alpha \cdot 4 + 40 + \beta = 0 \Leftrightarrow -16 + 4\alpha + 40 + \beta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = -24$$

$$4\alpha + \beta = -24 \quad *$$

• Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$, έχει υπόλοιπο $u = P(1) = -15$
 $2 \cdot 1^3 + \alpha \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 + \beta = -15 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + \alpha \cdot 1 - 20 + \beta = -15 \Leftrightarrow 2 + \alpha - 20 + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$

$$\alpha + \beta = 3 \quad **$$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta = -24 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = -24 \\ -\alpha - \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = -27 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 12 \end{cases}$$

Για $\alpha = -9$ και $\beta = 12$ το $P(x)$ γίνεται

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 20x + 12$$

2. Για την επίλυση εξίσωσης 3ου βαθμού και γνωρίζοντας την μία ρίζα του $p = 2$

‘Παρεμπιπτόντως, το $P(x)$ μπορεί να έχει το πολύ 3 ρίζες’

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner.

$2x^3$	$-9x^2$	$-20x$	$+12$	$x - (-2)$
2	- 9	- 20	12	- 2
	- 4	26	- 12	
2	- 13	6	0	

$$2x^2 - 13x + 6$$

$$\text{Οπότε } 2x^3 - 9x^2 - 20x + 12 = (x + 2)(2x^2 - 13x + 6)$$

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2-13x+6)=0 \Leftrightarrow$$

1^{ου} Βαθμού πολυωνυμική εξίσωση

$$x+2=0$$

$$x = -2$$

2^{ου} Βαθμού Τριωνύμου (Διακρίνουσα)

$$2x^2 - 13x + 6 = 0$$

ή

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= -13 \\ \gamma &= 6 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 121 > 0 \text{ δύο άνισες ρίζες}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm 11}{4} = \frac{24}{4} \quad \frac{2}{4}$$

$$x = -2$$

$$x_1 = 6$$

ή

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ακόμα $P(x) = (x+2) \cdot 2 \cdot (x-6) \left(x - \frac{1}{2}\right)$
 $= (x+2)(x-6)(2x-1)$

3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Με την βοήθεια του πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	- 2	$\frac{1}{2}$	6	$+\infty$
$x + 2$	-	○	+	+	+
$2x^2 - 13x + 6$	+	+	○	-	+
P(x)	-	○	+	○	+

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 6\right) \text{ τότε } P(x) < 0$$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12$ έχει παράγοντες τους $x + 1$ και $x - 2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

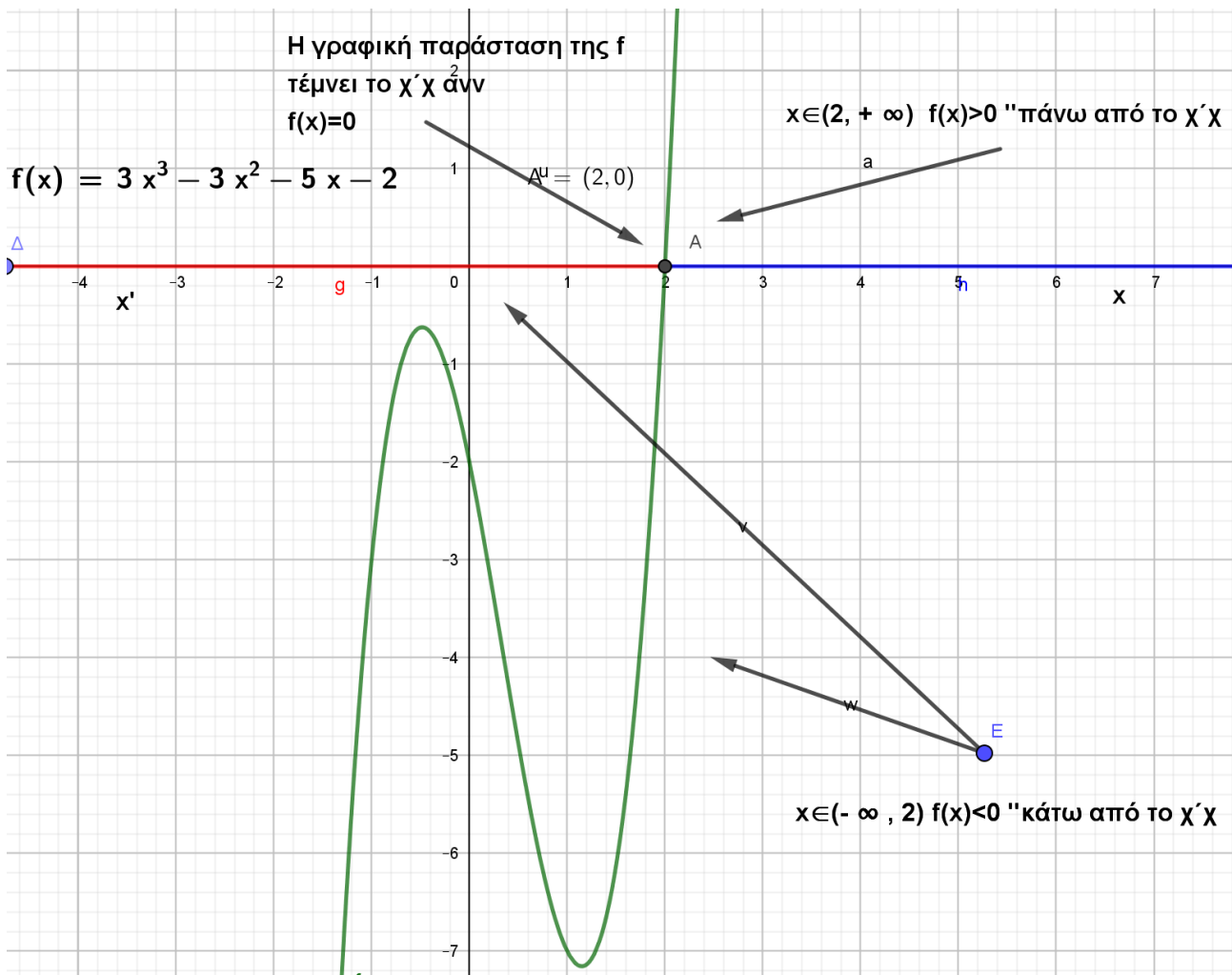
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5179>

3. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες, η εξίσωση $x^3 - x^2 + kx + 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5245>

5. Αν $P(x) = x^6 - 5x^4 - 10x^2 + k$, να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Για αυτές τις τιμές του k να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Σημεία Τομής και Σχετική Θέση γραφικής Παράστασης Πολυωνυμικής συνάρτησης με τον άξονα $x'x$.



Έστω C_f η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Για να βρούμε τα σημεία τομής της Cf $x'x$ λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0$$

Οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ της παραπάνω εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$. Τα ζητούμενα σημεία είναι τα:

$$A(\rho_1, 0), B(\rho_2, 0), \dots, \Delta(\rho_v, 0).$$

Το πλήθος αυτών των ριζών δεν ξεπερνά τον βαθμό του πολυωνύμου

Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία :

- η Cf **βρίσκεται πάνω από τον άξονα** $x'x$, λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) > 0$
- η Cf **βρίσκεται κάτω από τον άξονα** $x'x$, λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) < 0$
- η Cf **δε βρίσκεται πάνω από τον άξονα** $x'x$, λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) \leq 0$
- η Cf **δε βρίσκεται κάτω από τον άξονα** $x'x$, λύνουμε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης καθεμιάς από τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$,

Λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες : $\pm 1, \pm 2$

$$f(1) = 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 2 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 2 = 3 - 3 - 5 - 2 = -7 \neq 0 \quad \text{δεν είναι ρίζα.}$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 2 = 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) - 2 = -3 - 3 + 5 - 2 = -3 \neq 0 \quad \text{δεν είναι ρίζα.}$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 2 = 24 - 12 - 10 - 2 = 0 \quad \text{είναι ρίζα.}$$

$3x^3$	$-3x^2$	$-5x$	-2	$x - 2$	
3	-3	-5	-2	2	
	6	6	2		$3x^3 - 3x^2 - 5x - 2 =$
3	3	1	0		$(x - 2)(3x^2 + 3x + 1) = 0$
$3x^2$	$+3x$	$+1$		$x - 2 = 0$ ή $3x^2 + 3x + 1 = 0$	
		$x=2$		$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 9 - 12 = -3 < 0$ αδύνατη	

Πίνακας Προσήμων

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x - 2		-		+	
$3x^2 + 3x + 1$		+		+	
f(x)		-		+	

$$A=3>0 \quad \text{άρα } 3x^2+3x+1>0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

➤ η Cf **βρίσκεται πάνω από τον άξονα** $x'x$, λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) > 0$ για $x \in (2, +\infty)$

➤ η Cf **βρίσκεται κάτω από τον άξονα** $x'x$, λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 2)$

Σημεία Τομής και Σχετική Θέση γραφικών Παραστάσεων Πολυωνυμικών δυο συναρτήσεων .

Έστω C_f και C_g οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων f και g .

- Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και C_g , λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

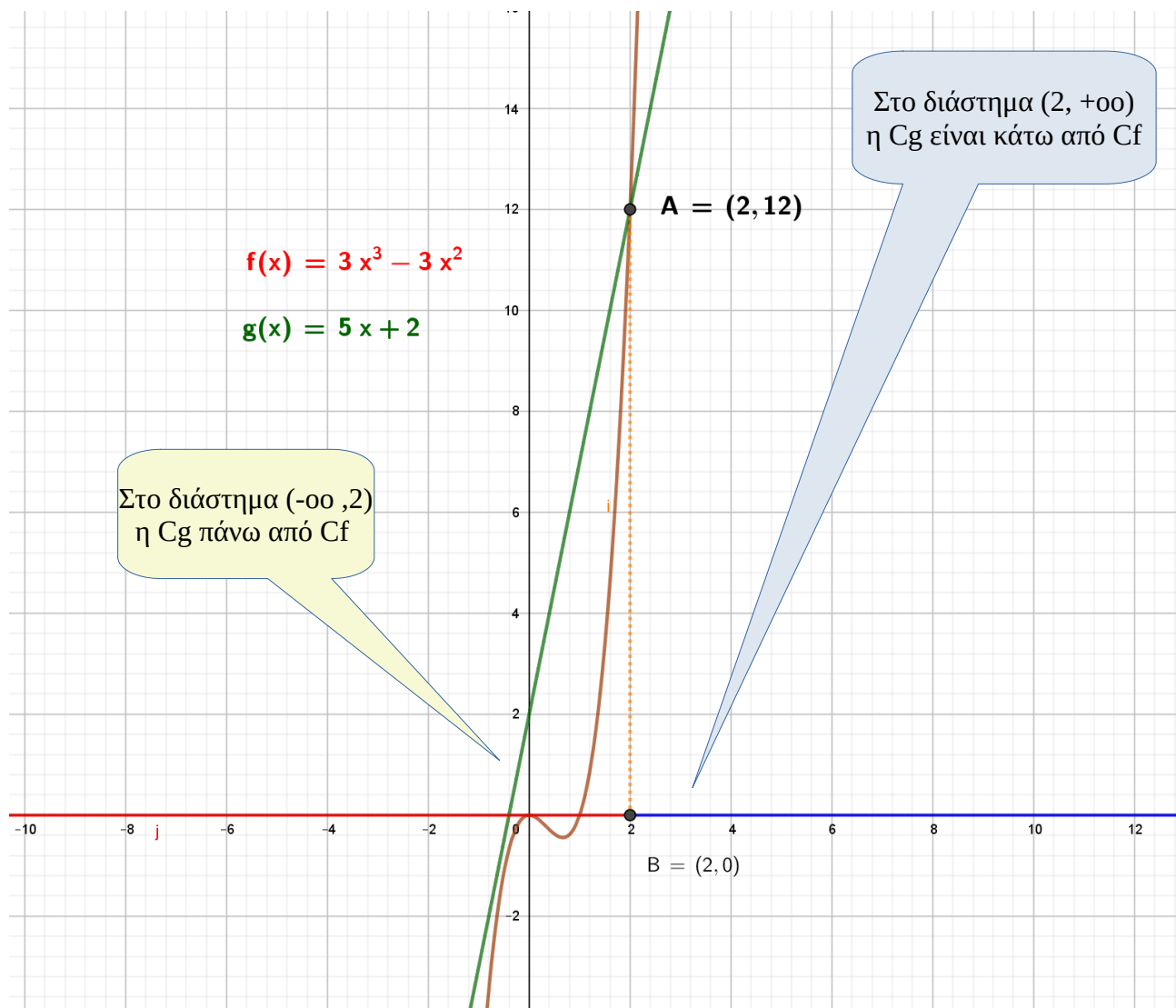
το οποίο μας οδηγεί στην εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, αν υπάρχουν, είναι οι **τετμημένες** των σημείων τομής.

- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία:
 - η C_f **βρίσκεται πάνω από την C_g** , λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) > g(x)$
 - η C_f **βρίσκεται κάτω από την C_g** , λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) < g(x)$
 - η C_f **δε βρίσκεται πάνω από την C_g** , λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) \leq g(x)$
 - η C_f **δε βρίσκεται κάτω από την C_g** , λύνουμε την ανίσωση
 $f(x) \geq g(x)$

Να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f και g αντίστοιχα. $f(x) = 3x^3 - 3x^2$ και $g(x) = 5x + 2$



Ισοδύναμα

