1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α;

Απάντηση

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο x ∈ Α αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : \mathrm{A} \to \mathbf{R}$$

$$\mathrm{x} \to f(\mathrm{x})$$

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο των σημείων Μ(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο,

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο,

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f\left(x_0\right)$, όταν:

$$f\left(x\right) \leq f\left(x_0\right) \text{ για κάθε } x \in A$$

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, $f\left(x_0\right)$, όταν

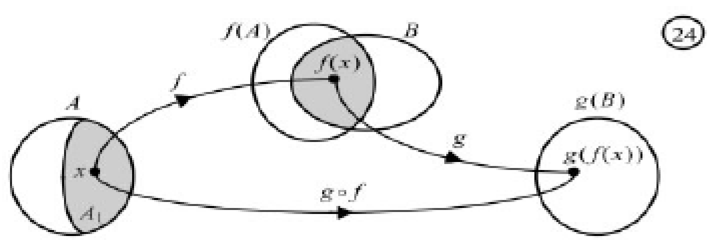
$$f\left(x\right) \geq f\left(x_0\right) \text{ για κάθε } x \in A$$

5. Αν $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathrm{B} \to \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο:

$$\left(gof\right)(x) = g(f\left(x\right)) \ .$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο:

$$A_1 = \{x \in A \,/\, f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**
- **γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται :

● **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

● **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι :

- **Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο;**
- **Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το το $f(x_0)$, όταν το $f(x_0)$ για κάθε x **∊** A .

8. Πότε μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1−1»;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

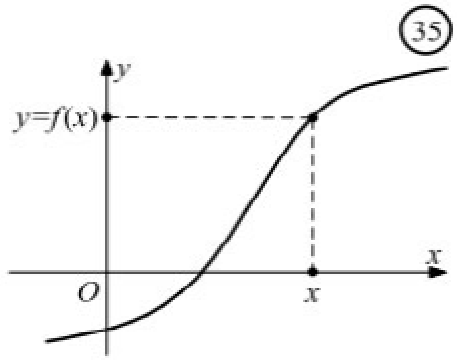
«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

που σημαίνει ότι: «τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες».

9. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f : A → **R**. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1**-**1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A) , της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x) = y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση g : f(A) → **R.**



με την οποία κάθε y ∊ f(A) αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x ∊ A για το οποίο ισχύει $g(y)=x$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$

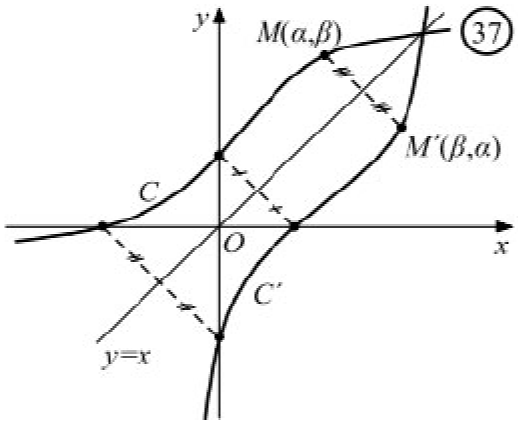
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f}^{-1}$. Επομένως έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

10. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C¨ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy.

11. Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

12. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

13. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

14. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής

- **σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);**
- **σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;**

Απάντηση

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

15. Πότε μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τινή της, στο σημείο x_0.

16. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α, β).

17. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

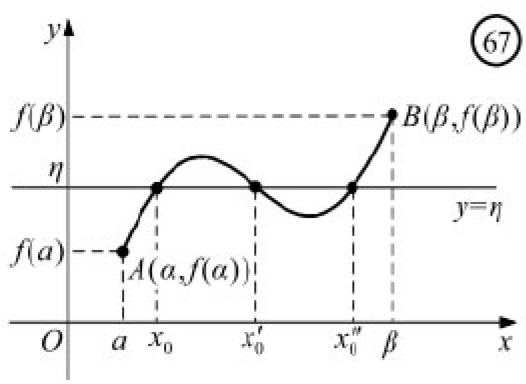
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και
- $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, πάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



18. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

19. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \ , \ \lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

21. Τι οναμάζεται ακολουθία;

Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

22. Πότε λέμε ότι μία ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε ν>ν_0 να ισχύει $|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$.

23. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο **R** τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

24. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

25. Εστω η σταθερή συνάρτηση f(x) = c, c ∈ R. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$. ■

26. Έστω η συνάρτηση f(x) = x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$. ■

27. **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{v}$, $v \in N-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^{v})'=vx^{v-1}$.**

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{v}-x_0^{v}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{v-1}+x^{v-2}x_0+\cdots+x_0^{v-1})}{x-x_0}=x^{v-1}+x^{v-2}x_0+\cdots+x_0^{v-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{v-1}+x^{v-2}x_0+\cdots+x_0^{v-1})=x_0^{v-1}+x_0^{v-1}+\cdots+x_0^{v-1}=vx_0^{v-1},$$

Δηλαδή: $(x^{v})'=vx^{v-1}$. ■

28. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

Δηλαδή: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

29. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

30. Έστω η συνάρτηση f(x) = $x^{-\nu}$, ν ∊ N^*. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη

Για κάθε x ∊ $\mathbf{R}^*$ έχουμε :

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}. \quad \blacksquare$$

31. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1 = R − {x | συνx = 0} και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη

Για κάθε x ∊ R_1 έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \quad \blacksquare$$

32. Η συνάρτηση $f(x)=x^{a}$, $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει: $f'(x)=\alpha x^{a-1}$, δηλαδή $\left(x^{a}\right)'=\alpha x^{a-1}$.

Απόδειξη

Αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

33. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln a$, δηλαδή $\left(a^{x}\right)'=\alpha^{x}\ln a$.

Απόδειξη

Αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως:

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha.$$

34. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^{*}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^{*}$ και ισχύει $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$.

Απόδειξη

— αν $x>0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$ ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

35. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y = f(x) ως προς το x στο σημείο x_0 όταν η συνάρτηση f είναι παραγωίσιμη στο x_0;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x , y συνδέονται με τη σχέση y = f(x) , όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

36. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

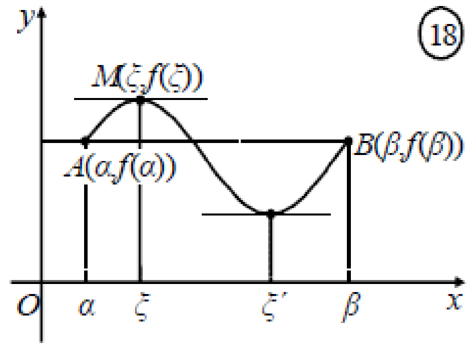
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



37. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

<u>Διατύπωση</u>

Αν μια συνάρτηση f είναι:

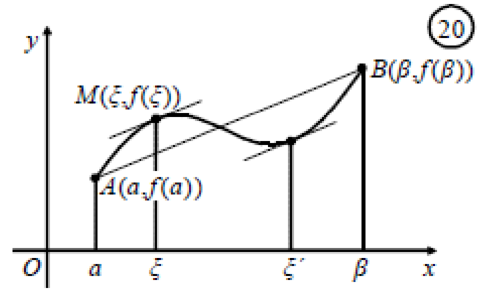
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο



σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.

38. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η είναι συνεχής στο Δ και**
- $f'(x) = 0$ **για κάθε εσωτερικό σημείο** x **του Δ,**

τότε να αποδείξετε ότι η είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad . \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είνα $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

39. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- **οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και**

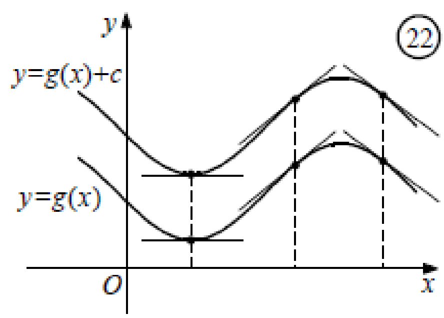
- $f'(x) = g'(x)$ **για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,**

Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■

40. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Η απόδειξη για τη γνησίως φθίνουσα είναι ανάλογη.

40. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.

41. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.

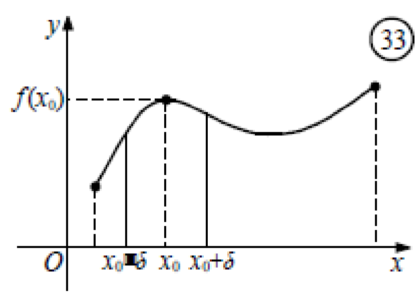
42. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Απάντηση

<u>Διατύπωση</u>

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $$f'(x_0)=0$$

<u>Απόδειξη</u>



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε:

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$,

οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

43. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,\ x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0,\ \beta)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο $(\alpha,\ x_0)$ και $f'(x)>0$ στο $(x_0,\ \beta)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

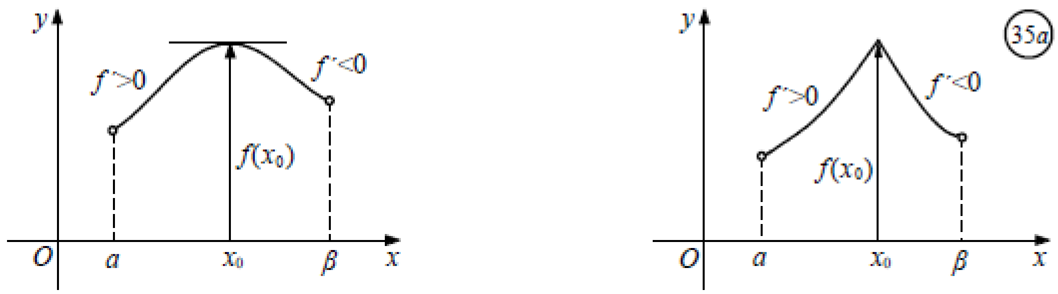
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\ x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \qquad (2)$$



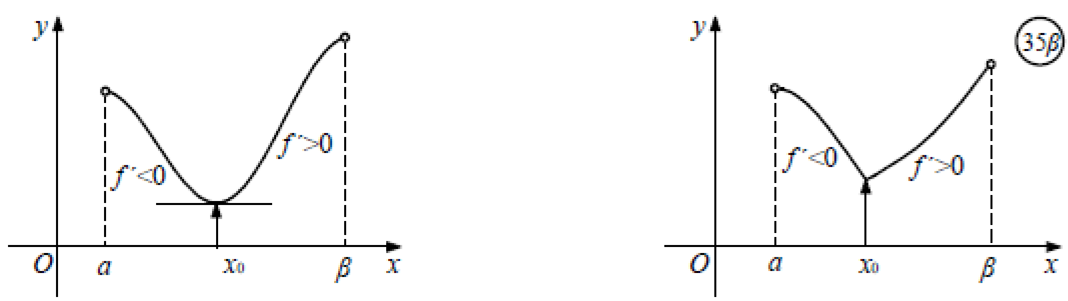
35α

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

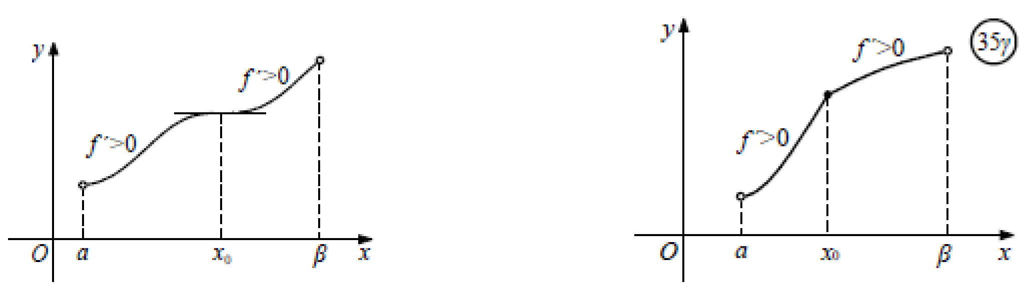
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



35β

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



35γ

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

44. Πότε λέμε ότι:

Α. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο *Δ*;

Β. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο *Δ*;

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα Δ και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ.

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ.

45. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f με την κυρτότητά της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

46. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο $(x_0,\ \beta)$, ή αντιστρόφως,

και

- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

47. Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ποια είναι η τιμή της $f''(x_0)$;

Απάντηση

Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

48. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

49. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απάντηση

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

50. Πότε λέμε ότι ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

51. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital

Απάντηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$