3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

60. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Σχόλια :

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

61. Θεώρημα (2001 Β΄, 2003, 2015 Β΄)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c \in R$,είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c \in R$.

Απόδειξη :

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε : $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η f έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, διότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό.

  Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής, αλλά έχει παράγουσα στο $\Re$ την $F(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$
- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

62. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων.

Απάντηση :

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x)=0$	$F(x)=c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=1$	$F(x)=x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=x^{\alpha}$	$F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\ ,\ c\in\Re\ ,\ \alpha\neq-1$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\varphi x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\varphi x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\alpha^x$	$F(x)=\dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c\ ,\ c\in\Re$

Σχόλια :

- Οι τύποι αυτού του πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.
- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :

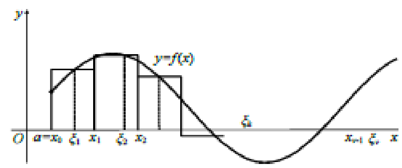
    i. Η συνάρτηση F+G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f+g

    ii. Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

63. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Απάντηση :

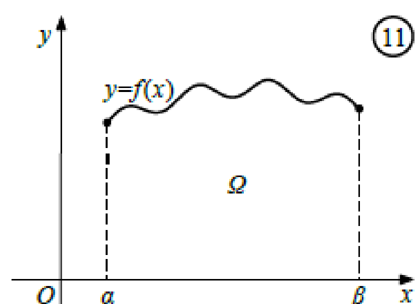


Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα

$\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.

Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή : $\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$

Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος :



Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11).

Δηλαδή : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.

Επομένως,

$$\boxed{\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0.}$$

64. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι :

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f,g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in R$. Τότε ισχύουν:

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

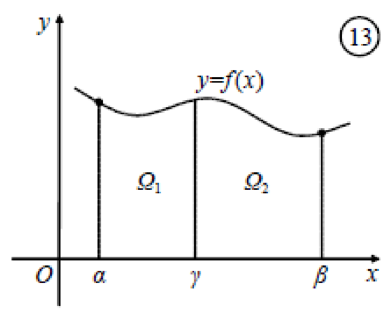
$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3+7=4 .$$

Σημείωση :

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

αφού $E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$

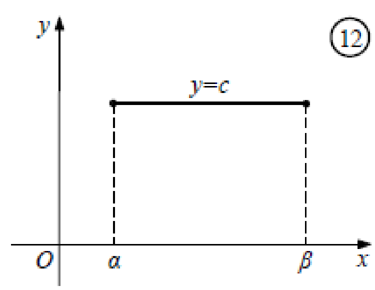
και $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.



δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ ..

ε) Αν $c > 0$, τότε το $\int_\alpha^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).

Δηλ. $\boldsymbol{\int_\alpha^\beta c\, dx = c(\beta - \alpha)}$.



3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

65. Έστω $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ. Ποια είναι η σχέση της F με την f ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού) (2002, 2008 Β΄, 2010, 2013)

66. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε :

$G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε : $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$.

67. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση :

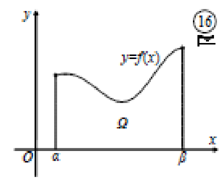
α) Ισχύει ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

68. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, όταν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής .

Απάντηση :

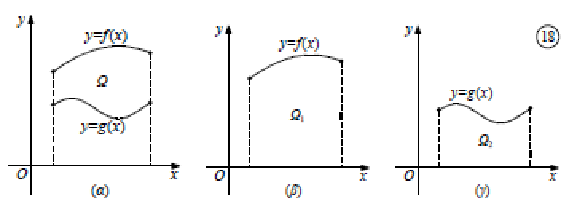


Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

69. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, όταν $f(x)\ge g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς.

Απάντηση :

Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g, στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\ge g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι $E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

70. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

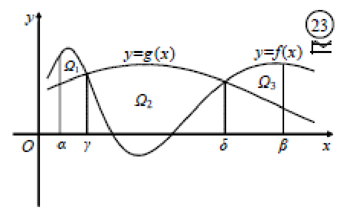
Απόδειξη :

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in R$ τέτοιος, ώστε $f(x)+c \geq g(x)+c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'.

Επομένως, θα έχουμε: $E(\Omega)=E(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$. Άρα $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$.

71. Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$.

Απόδειξη :



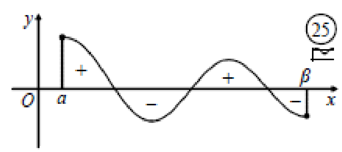
Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|\,dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|\,dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$

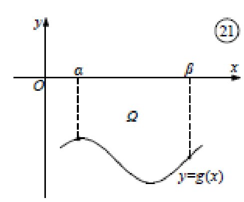
Σχόλιο



Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25).

72. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με: $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

Απόδειξη :



Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$.

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε:

$E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$