1 Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Οι πραγματικοί αριθμοί

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

$\mathbb{N}$

Άρτιοι (ή Ζυγοί) : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
Περιττοί (ή Μονοί) : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : ... , –5, –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...

$\mathbb{Z}$

Θετικοί : +1, +2, +3, +4, +5, ...
Αρνητικοί : –1, –2, –3, –4, –5, ...

Δηλαδή, ακέραιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί (που τώρα μπορούμε να τους λέμε απλά θετικούς) μαζί με τους αρνητικούς αριθμούς.

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : Λέγονται όσοι αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν κλάσμα.

$\mathbb{Q}$

Πχ. $-\frac{10}{7}$ $\quad 5 = \frac{5}{1}$ $\quad 3{,}75 = \frac{375}{100}$ $\quad 1{,}666... = \frac{15}{9}$

Δηλαδή, ρητοί είναι οι ακέραιοι μαζί με όλα τα γνωστά μας κλάσματα, αλλά και τους δεκαδικούς που είναι **απλοί** ή **περιοδικοί**.

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : Λέγονται όσοι αριθμοί δεν είναι ρητοί.

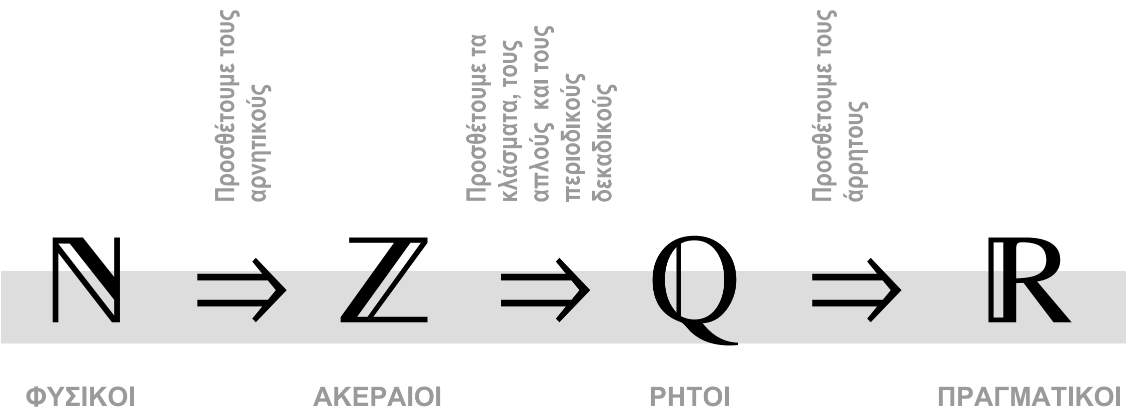
Πχ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$ (αλλά όχι πχ. το $\sqrt{9} = 3$)

Αν γράψουμε έναν άρρητο αριθμό σα δεκαδικό, τότε αυτός θα έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, χωρίς φαινομενικά καμία «περιοδικότητα» ή «λογική».

$\mathbb{R}$

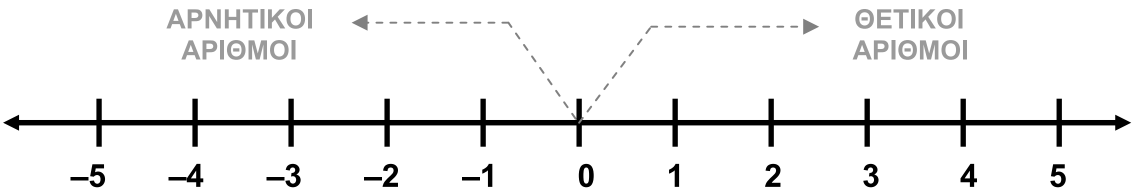
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : Λέγονται όλοι οι προηγούμενοι αριθμοί μαζί!

Σχηματικά, μπορούμε να δούμε πώς «χτίσαμε» τους πραγματικούς αριθμούς στο παρακάτω σχήμα:



2. Διάταξη πραγματικών αριθμών

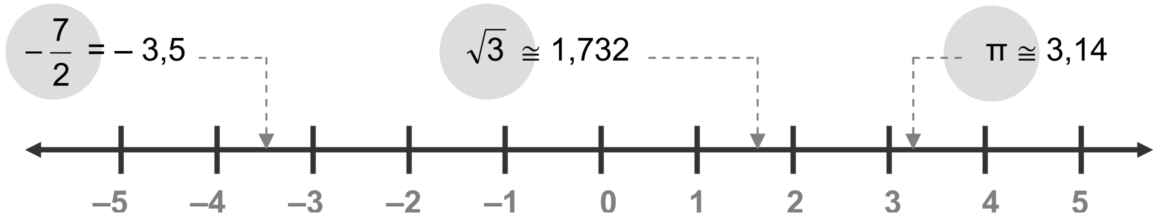
Για να έχουμε μια καλύτερη άποψη των πραγματικών αριθμών μπορούμε να τους τοποθετήσουμε πάνω στα σημεία ενός άξονα (κάτι σαν χάρακα, δηλαδή).



Φυσικά, καταλαβαίνουμε εύκολα πως όσο δεξιότερα βρίσκεται ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι. Άρα, για παράδειγμα:

- Το μηδέν είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.

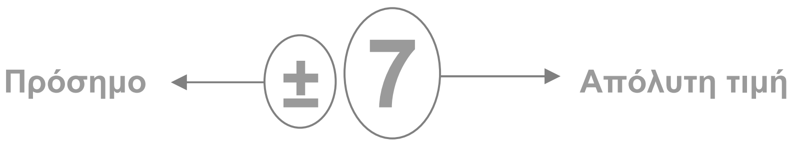
Οι θέσεις των ακέραιων αριθμών είναι ξεκάθαρες. Τι συμβαίνει όμως όταν χρειάζεται να τοποθετήσουμε ένα κλάσμα πάνω στον άξονα ή, ακόμα χειρότερα, έναν άρρητο αριθμό; Για το κλάσμα, τα πράγματα είναι εύκολα: αρκεί να κάνουμε τη διαίρεση και θα καταλάβουμε αμέσως για ποιον αριθμό πρόκειται. Για τους άρρητους αριθμούς, ίσως χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε ένα υπολογιστή τσέπης (δηλ. το... κομπιουτεράκι). Για παράδειγμα:



3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Λέγοντας «απόλυτη τιμή» ενός αριθμού θα μπορούσαμε, για ευκολία, να εννοούμε τον αριθμό *χωρίς το πρόσημό του*.

Πχ.



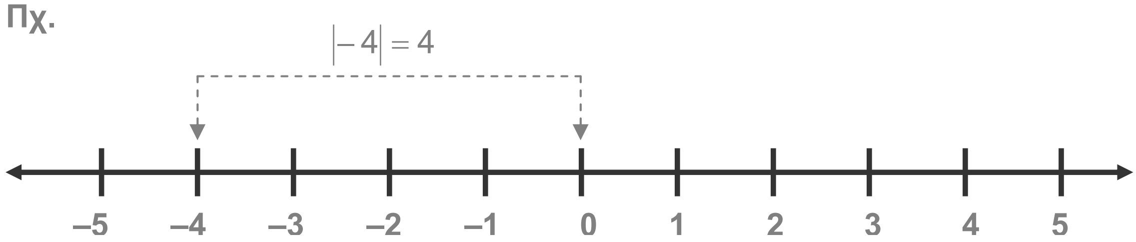
Το ίδιο σωστό θα ήταν αν λέγαμε ότι *«απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο αριθμός με θετικό πρόσημο»*, αφού όλοι γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός χωρίς πρόσημο θεωρείται πάντα θετικός.

Την απόλυτη τιμή ενός αριθμού **α** τη συμβολίζουμε με $|\mathbf{α}|$. Για παράδειγμα:

Πχ. $|+5| = 5$, $|-12| = 12$, $\left|-\frac{11}{5}\right| = \frac{11}{5}$, $|+3,45| = 3,45$

Πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, η απόλυτη τιμή ενός αριθμού α **συμβολίζει την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα** (δηλαδή, το σημείο που παριστάνει το 0).

Πχ.



4. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Ομόσημοι αριθμοί

Για να προσθέσουμε δυο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το κοινό τους πρόσημο και **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους.

Ετερόσημοι αριθμοί

Για να προσθέσουμε δυο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και **αφαιρούμε** τις απόλυτες τιμές τους (από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη).

Πχ.

$$7 + 15 = +(7 + 15) = 22$$
$$-7 - 15 = -(7 + 15) = -22$$

$$-7 + 15 = +(15 - 7) = +8 = 8$$
$$7 - 15 = -(15 - 7) = -8$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Για να αφαιρέσουμε δυο πραγματικούς αριθμούς, τότε τα πράγματα είναι πολύ εύκολα: μετατρέπουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση και αλλάζουμε το πρόσημο του *Αφαιρετέου*. Αν δε θυμάστε, αυτός είναι ο δεύτερος από τους δύο αριθμούς, αυτός δηλαδή που αφαιρούμε. Ο άλλος λέγεται *Μειωτέος*. Γράφουμε σύντομα:

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

Κατόπιν, ακολουθούμε πολύ απλά τους κανόνες της πρόσθεσης.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ομόσημοι αριθμοί

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε πάντα θετικό πρόσημο **(+)** και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Ετερόσημοι αριθμοί

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε πάντα αρνητικό πρόσημο **(–)** και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Πχ.

$$3 \cdot 5 = +(3 \cdot 5) = 15$$
$$-3 \cdot (-5) = +(3 \cdot 5) = +15 = 15$$

$$3 \cdot (-5) = -(3 \cdot 5) = -15$$
$$-3 \cdot (+5) = -(3 \cdot 5) = -15$$

Για ευκολία θυμόμαστε τον παρακάτω κανόνα των προσήμων:

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Ο κανόνας λέει ότι για να διαιρέσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς τότε μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και πολλαπλασιάζουμε το *Διαιρετέο* με τον αντίστροφο του *Διαιρέτη* (σας θυμίζει κάτι απ' την αφαίρεση αυτός ο κανόνας;). Γράφουμε συμβολικά:

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

Κατόπιν συμβουλευόμαστε τον προηγούμενο πίνακα, του πολλαπλασιασμού.

- Στην πράξη, αρκεί να βάλουμε το σωστό πρόσημο – σύμφωνα με τους κανόνες του πολλαπλασιασμού – και στη συνέχεια να κάνουμε απλά τη... διαίρεση!

ΚΑΙ ΜΗΝ ΞΕΧΝΑΜΕ!!!

Άθροισμα	⇒	Πρόσθεση
Διαφορά	⇒	Αφαίρεση
Γινόμενο	⇒	Πολλαπλασιασμός
Πηλίκο	⇒	Διαίρεση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Πράξεων

Οι τέσσερεις γνωστές μας πράξεις έχουν κάποιες βασικές ιδιότητες. Από αυτές καλό είναι να θυμόμαστε μερικές:

α Ουδέτερο στοιχείο

Ένας αριθμός λέγεται ουδέτερο στοιχείο μιας πράξης όταν δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό του αποτελέσματος, δηλαδή παραμένει ουδέτερος!

Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης: **0**

Πχ. $15 + 0 = 15$, $0 - 9 = -9$

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: **1**

Πχ. $1 \cdot (-15) = -15$, $9 \cdot 1 = 9$

β Αντίθετοι αριθμοί

Δύο αριθμοί θα λέγονται αντίθετοι αν έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο. **Πχ.** +5, –5

Ιδιότητα: Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα 0.

Πχ. $+12 - 12 = 0$

γ Αντίστροφοι αριθμοί

Ιδιότητα: Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1.

Πχ. $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$

Αυτός είναι επίσης και ο ορισμός των αντίστροφων αριθμών.

δ Επιμεριστική ιδιότητα

Ολόκληρο το όνομά της είναι *«επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση»* (ουφ)! Μας χρειάζεται κυρίως όταν δεν μπορούμε να εκτελέσουμε τις πράξεις μέσα σε μια παρένθεση (πχ. γιατί υπάρχουν μεταβλητές) αλλά με κάποιο τρόπο θα πρέπει να διώξουμε την παρένθεση.

Απλή επιμεριστική: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Διπλή επιμεριστική: $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

ε Πολύ σημαντικό είναι, επίσης, να θυμόμαστε τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\textbf{Αν } \alpha\cdot\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \textbf{ ή } \beta = 0$$

$$\textbf{Αν } \alpha\cdot\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \textbf{ και } \beta \neq 0$$

5. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Μια δύναμη, με απλά λόγια, είναι ένας **πολλαπλασιασμός** (γινόμενο) από **ίσους** αριθμούς (παράγοντες). Για παράδειγμα, το γινόμενο 2·2·2 είναι μια δύναμη, ενώ το 4·2·3 δεν είναι!

Συμφωνήσαμε λοιπόν, για ευκολία, ότι αντί:

Πχ. να γράφουμε $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$ θα γράφουμε 3^5 και θα διαβάζουμε *«τρία υψωμένο στην πέμπτη δύναμη»* ή απλά *«τρία στην πέμπτη»*.

Και αντιστρόφως:

Πχ. όταν θα γράφουμε 5^3 θα διαβάζουμε *«πέντε στην τρίτη»* και θα καταλαβαίνουμε $5\cdot5\cdot5$

Άρα...

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8$ **ΣΩΣΤΟ!**

$\cancel{2^3 = 2\cdot3 = 6}$ **ΛΑΘΟΣ!**

Τελικά, αν θέλουμε να μιλήσουμε γενικά, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, υψωμένο σε μια δύναμη ν (όπου ν κάποιος φυσικός αριθμός), θα γράφουμε:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ φορές}}$$

και θα ονομάζουμε: α^ν

α: **Βάση**

ν: **Εκθέτης**

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό ν θα ονομάζουμε ένα γινόμενο από ν παράγοντες, που είναι όλοι ίσοι με τον α. Το $α^ν$ θα το διαβάζουμε *«νιοστή δύναμη του α»*.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Οι δυνάμεις έχουν, επίσης, κάποιες καταπληκτικές ιδιότητες:

1. $α^μ \cdot α^ν = α^{ν+μ}$
2. $\dfrac{α^μ}{α^ν} = α^{μ-ν}$
3. $(α \cdot β)^ν = α^ν \cdot β^ν$
4. $\left(\dfrac{α}{β}\right)^ν = \dfrac{α^ν}{β^ν}$
5. $\left(α^μ\right)^ν = α^{ν \cdot μ}$

Ορίζουμε, ακόμη, τα εξής χρήσιμα:

6. $α^0 = 1$ και $α^1 = α$
7. $α^{-ν} = \dfrac{1}{α^ν}$
8. $\left(\dfrac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\dfrac{β}{α}\right)^ν$

Προτεραιότητα Πράξεων

Τώρα που θυμηθήκαμε και την έννοια της δύναμης, είμαστε έτοιμοι να θυμηθούμε και τη σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις σε μια οποιαδήποτε παράσταση:

1ον	**Πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** (Αν υπάρχουν)
2ον	**Τις δυνάμεις**
3ον	**Τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις**
4ον	**Τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις**

6. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Σχεδόν όλοι καταλαβαίνουμε τι εννούμε, όταν μας μιλούν για την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού. Έτσι ξέρουμε ότι $\sqrt{25}=5$ γιατί 5·5 = 25 ή ότι $\sqrt{64}=8$ γιατί 8·8 = 64. Αλλά όταν συναντούμε το $\sqrt{10}$ συνήθως απαντούμε… 5, παρ' ότι έχουμε καταλάβει καλά ότι τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού **ΔΕΝ** σημαίνει το μισό του! Κάποιες ρίζες, λοιπόν, δε μπορούμε να τις υπολογίσουμε εύκολα, με το μυαλό. Οι αριθμοί αυτοί είναι *άρρητοι* και, συνήθως, τους αφήνουμε όπως είναι, ενώ σπανιότερα - αν χρειάζεται - τους υπολογίζουμε κατά προσέγγιση με ένα κομπιουτεράκι.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και θα τη συμβολίζουμε $\sqrt{α}$ θα ονομάζουμε ένα θετικό αριθμό, που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α.

Άρα: $\boldsymbol{\sqrt{α} = x}$ σημαίνει ότι $\boldsymbol{x^2 = α}$

Πχ. $\sqrt{49} = 7$ γιατί $7^2 = 49$

Για ευκολία, θα ήταν καλό αν απομνημονεύαμε μερικές από τις πιο συνηθισμένες τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{1}$	= 1	$\sqrt{36}$	= 6	$\sqrt{121}$	= 11	$\sqrt{256}$	= 16
$\sqrt{4}$	= 2	$\sqrt{49}$	= 7	$\sqrt{144}$	= 12	$\sqrt{289}$	= 17
$\sqrt{9}$	= 3	$\sqrt{64}$	= 8	$\sqrt{169}$	= 13	$\sqrt{324}$	= 18
$\sqrt{16}$	= 4	$\sqrt{81}$	= 9	$\sqrt{196}$	= 14	$\sqrt{361}$	= 19
$\sqrt{25}$	= 5	$\sqrt{100}$	= 10	$\sqrt{225}$	= 15	$\sqrt{400}$	= 20

Άρα...

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

$\sqrt{16} = 4$ **ΣΩΣΤΟ!**

$\cancel{\sqrt{16} = 8}$ **ΛΑΘΟΣ!**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Και οι τετραγωνικές ρίζες έχουν, επίσης, κάποιες ιδιότητες:

1.	Αν $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$ τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
2.	Γενικά $\sqrt{\alpha^2} = \lvert\alpha\rvert$
3.	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$
4.	$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha+\beta}$

7. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

Αριθμητική παράσταση

θα λέγεται μια μαθηματική έκφραση που περιέχει *αριθμούς* και τις τέσσερεις γνωστές μας πράξεις.

Πχ. $A = 2\cdot(10-7)^2 + [3^2 - (24-6):2]$

Αλγεβρική παράσταση

θα λέγεται μια παράσταση η οποία, επιπλέον, περιέχει *μεταβλητές*.

Πχ. $B = 2\cdot(\alpha-7)^2 + [\alpha^2 - (8\cdot\alpha - \beta):2]$

Ακέραια αλγεβρική παράσταση

θα λέγεται μια αλγεβρική παράσταση, όταν μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της *πρόσθεσης* και του *πολλαπλασιασμού* και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι *φυσικοί* αριθμοί.

Αριθμητική τιμή

μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στη θέση των μεταβλητών θέσουμε κάποιον αριθμό και κάνουμε τις πράξεις.

Μονώνυμο

θα λέγεται μια (ακέραια) αλγεβρική παράσταση στην οποία υπάρχει μόνον η πράξη του πολλαπλασιασμού.

Ένα μονώνυμο αποτελείται από το **συντελεστή**, δηλαδή το κομμάτι εκείνο που περιέχει τον αριθμό και το **κύριο μέρος**, το κομμάτι εκείνο που περιέχει τις μεταβλητές.

Βαθμός

ενός μονώνυμου ως προς μια μεταβλητή θα λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής. Βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές είναι το άθροισμα όλων των εκθετών.

Πχ.

Συντελεστής $\leftarrow$ $5\,\alpha\beta^2$ $\rightarrow$ **Κύριο μέρος**

Βαθμός ως προς α : 1
Βαθμός ως προς β : 2
Βαθμός ως προς α, β : 1 + 2 = 3

Όμοια μονώνυμα

ονομάζονται τα μονώνυμα εκείνα που έχουν το ίδιο *κύριο μέρος*.

Πχ. $5\alpha\beta^2$, $-\alpha\beta^2$, $10\beta^2\alpha$

Ίσα μονώνυμα

ονομάζονται τα *όμοια μονώνυμα* που έχουν, επίσης, τον ίδιο *συντελεστή*.

Αντίθετα μονώνυμα

ονομάζονται τα *όμοια μονώνυμα* που έχουν, όμως, *αντίθετους συντελεστές*.

Πχ. $8\alpha\beta$, $-8\alpha\beta$

Πολυώνυμο

ονομάζεται ένα άθροισμα από μονώνυμα που δεν είναι μεταξύ τους όμοια.

Όροι

ενός πολυωνύμου ονομάζονται τα μονώνυμα από τα οποία αποτελείται.

Βαθμός

ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές του είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του, ως προς τις μεταβλητές αυτές.

Πχ.

$$\underbrace{4\alpha\beta^2}\ +\ \underbrace{\alpha^3}\ -\ \underbrace{12\alpha\beta\gamma}$$

Οι όροι του πολυωνύμου είναι ανόμοια μονώνυμα

Ρητή αλγεβρική παράσταση

ονομάζεται ένα κλάσμα, του οποίου οι όροι (δηλ. ο αριθμητής και ο παρονομαστής) είναι πολυώνυμα.

Πχ. $\dfrac{\kappa\lambda - 4\lambda^2}{\kappa + \lambda}$

8. Πράξεις μεταξύ μονώνυμων – πολυώνυμων

Πρόσθεση μονώνυμων

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα μονώνυμα πρέπει να είναι **όμοια!** Αν συμβαίνει αυτό, τότε απλά προσθέτουμε τους συντελεστές τους και **αφήνουμε το κύριο μέρος ίδιο**.

Πχ.

$$\mathbf{12}\underline{\alpha\beta^2} - \mathbf{15}\underline{\alpha\beta^2} + \underline{\alpha\beta^2} = \mathbf{-2}\underline{\alpha\beta^2}$$

Το κύριο μέρος ΔΕΝ άλλαξε!

Αναγωγή ομοίων όρων

Άρα, για να υπολογίσουμε ένα άθροισμα (δηλ. για να θυμόμαστε: μια πρόσθεση) από ένα σωρό διαφορετικά μονώνυμα (δηλ. ένα πολυώνυμο), χρειάζεται να σημειώσουμε ποια είναι όμοια μεταξύ τους και να προσθέσουμε μόνον αυτά! Αυτή η τακτική λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

Πχ.

$$\underline{-45\chi\psi} \; \underline{\underline{+30}} \; \underset{\sim\sim}{-10\psi^2} \; \underline{+7\chi\psi} \; \underline{-\chi\psi} \; \underset{\sim\sim}{+13\psi^2} \; \underline{\underline{+4}} =$$

$$-39\chi\psi + 34 - 3\psi^2$$

Παρατηρήσεις

α) Δηλαδή, για να μπορέσουμε να προσθέσουμε μονώνυμα θα πρέπει να θυμόμαστε καλά τους κανόνες των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών. Πολύ καλά καταλάβατε: χρειάζεται επανάληψη!

β) Κάθε φορά που ένα μονώνυμο φαίνεται σαν να μην έχει συντελεστή για να προσθέσουμε, να θυμόμαστε πως εννοείται η μονάδα για συντελεστής!

Πχ. $-17\kappa^2 + \kappa^2 = \mathbf{-17}\kappa^2 \mathbf{+ 1}\kappa^2 = -16\kappa^2$

$30\alpha\beta - \alpha\beta = \mathbf{30}\alpha\beta \mathbf{- 1}\alpha\beta = 29\alpha\beta$

Πολλαπλασιασμός μονώνυμων

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ή περισσότερα μονώνυμα, τότε:

α) πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές τους και

β) για κύριο μέρος γράφουμε το γινόμενο όλων των μεταβλητών, έτσι ώστε κάθε μεταβλητή να έχει εκθέτη το άθροισμα των εκθετών της.

Πχ.

$$\mathbf{-5}\kappa\lambda^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{8}\kappa\lambda\mu \cdot (\mathbf{-2}\kappa^{\mathbf{3}}\lambda) =$$

$$-5\cdot 8\cdot(-2) \cdot \kappa^{1+1+3} \cdot \lambda^{2+1+1} \cdot \mu =$$

$$80\kappa^5\lambda^4\mu$$

Παρατηρήσεις

α) Δηλαδή, για να μπορέσουμε να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα θα πρέπει αν θυμόμαστε καλά τις ιδιότητες των δυνάμεων. Άρα, χρειάζεται ξανά μια μικρή επανάληψη!

β) Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα δε χρειάζεται, τελικά, να είναι όμοια, όπως συμβαίνει στην πρόσθεση!

Διαίρεση μονώνυμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, κάνουμε το εξής έξυπνο κόλπο:

α) Γράφουμε την διαίρεση με τη μορφή κλάσματος.

β) Σπάμε το κλάσμα σε μικρότερα που το καθένα έχει μόνο όμοιους όρους.

γ) Διαιρούμε ή απλοποιούμε το κλάσμα με τους συντελεστές

δ) Στα υπόλοιπα κλάσματα (με τις όμοιες μεταβλητές) εφαρμόζουμε την κατάλληλη ιδιότητα των δυνάμεων: αφαιρούμε απ' τον εκθέτη του αριθμητή εκείνον του παρονομαστή.

Πχ.

$$\mathbf{42}\kappa^{\mathbf{2}}\lambda\mu^{\mathbf{5}} : (\mathbf{-6}\kappa^{\mathbf{3}}\lambda\mu^{\mathbf{2}}) = \frac{42\kappa^2\lambda\mu^5}{-6\kappa^3\lambda\mu^2} =$$

$$\frac{42}{-6}\cdot\frac{\kappa^2}{\kappa^3}\cdot\frac{\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\mu^5}{\mu^2} =$$

$$-7\cdot\kappa^{2-3}\cdot\lambda^{1-1}\cdot\mu^{5-2} = -7\kappa^{-1}\lambda^0\mu^3 = -7\kappa^{-1}\mu^3$$

Πρόσθεση – αφαίρεση πολυωνύμων

Για την πρόσθεση και την αφαίρεση πολυωνύμων χρειάζεται να θυμηθούμε τον κανόνα της απαλοιφής παρενθέσεων:

- αν η παρένθεση έχει μπροστά της θετικό πρόσημο, τότε τη βγάζουμε και στη θέση της ξαναγράφουμε όλους τους αριθμούς με **το ίδιο ακριβώς πρόσημο**.
- αν η παρένθεση έχει μπροστά της αρνητικό πρόσημο, τότε τη βγάζουμε και στη θέση της ξαναγράφουμε όλους τους αριθμούς αλλά με **αντίθετο πρόσημο**.

Η **πρόσθεση** πολυωνύμων είναι τόσο εύκολη που δεν αξίζει καν τον κόπο να την αναφέρουμε! Βγάζουμε τις παρενθέσεις χωρίς ν' αλλάξουμε τίποτε και, στη συνέχεια, κάνουμε απλώς αυτό που, νωρίτερα, μάθαμε ως «αναγωγή ομοίων όρων». Δηλαδή, ξεχωρίζουμε και προσθέτουμε μονάχα τα μονώνυμα εκείνα που είναι μεταξύ τους όμοια. Για την **αφαίρεση**, η μόνη δυσκολία είναι η αλλαγή μερικών προσήμων. Ας δούμε απλά ένα παράδειγμα:

Πχ. $6\alpha\beta - 10\alpha^2 + \beta^3 - (7\alpha^2 - 25\alpha\beta + \beta^3) =$ → **Βγάζουμε την παρένθεση και αλλάζουμε τα πρόσημα**

$\underline{6\alpha\beta}\ \underline{\underline{-10\alpha^2}}\ \underline{+\beta^3}\ \underline{\underline{-7\alpha^2}}\ \underline{+25\alpha\beta}\ \underline{-\beta^3} =$ → **Υπογραμμίζουμε τα όμοια**

$-31\alpha\beta - 17\alpha^2 + 0\beta^3 =$ → **Αναγωγή ομοίων όρων**

$-31\alpha\beta - 17\alpha^2$

Πολλαπλασιασμός Μονώνυμων – Πολυώνυμων

Για τον πολλαπλασιασμό μονώνυμου–πολυώνυμου ή πολυώνυμων μεταξύ τους, ένα χρειάζεται να πούμε μόνο: **Επιμεριστική ιδιότητα!**

Πολλαπλασιασμός μονώνυμου–πολυώνυμου

Πχ.

$$-3\alpha^2 \cdot (10\alpha\beta - 5\alpha^3 + 7\beta) =$$
$$-30\alpha^3\beta + 15\alpha^5 - 21\alpha^2\beta$$

Πολλαπλασιασμός πολυώνυμων

Πχ.

$$(4\alpha\beta - \beta) \cdot (2\alpha + 10 - 5\alpha\beta) =$$

$$8\alpha^2\beta\ \underline{+\ 40\alpha\beta} - 20\alpha^2\beta^2\ \underline{-\ 2\alpha\beta} - 10\beta^2 + 5\alpha\beta^2 =$$
$$8\alpha^2\beta + 38 - 20\alpha^2\beta^2 - 10\beta^2 + 5\alpha\beta^2 =$$

Παρατηρήσεις

Εκτός από τα βελάκια, ένας χρήσιμος τρόπος στην επιμεριστική ιδιότητα, για να μην μπερδευόμαστε κατά την εκτέλεση των πράξεων, είναι για κάθε ζευγάρι αριθμών που πολλαπλασιάζουμε να θυμόμαστε την εξής σειρά:

1. **Βρίσκουμε το σωστό πρόσημο** (Εφαρμόζουμε κανόνες προσήμων)
2. **Πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές**
3. **Πολλαπλασιάζουμε τις μεταβλητές** (Εφαρμόζουμε ιδιότητες δυνάμεων)

Εκτελούμε τα παραπάνω βήματα με αυτή τη σειρά και μετά ξανά από την αρχή για το επόμενο ζευγάρι κ.ο.κ.

9. Ταυτότητες

Έστω η ισότητα $2\cdot x = 10$. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι επαληθεύεται μόνο για τον αριθμό 5, γιατί όντως $2\cdot 5 = 10$, ενώ για οποιονδήποτε άλλο αριθμό πχ. τον -4 είναι $2\cdot(-4) = -8 \neq 10$.

Υπάρχουν τώρα μερικές καταπληκτικές ισότητες στις οποίες όποιους (τυχαίους) αριθμούς κι αν θέσουμε στις μεταβλητές, τότε αυτές καταλήγουν να είναι πάντα σωστές! Για παράδειγμα, έστω η ισότητα $\mathbf{(x - y)\cdot(x + y) = x^2 - y^2}$. Ας θέσουμε (στην τύχη) διάφορους αριθμούς στα x, y:

Για	$x = \mathbf{2}$, $y = \mathbf{1}$	τότε	$(2-1)\cdot(2+1) = 2^2 - 1^2$	$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$	$\mathbf{3 = 3}$
Για	$x = \mathbf{-4}$, $y = \mathbf{5}$	τότε	$(-4-5)\cdot(-4+5) = (-4)^2 - 5^2$	$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$	$\mathbf{-9 = -9}$
Για	$x = \mathbf{\frac{2}{3}}$, $y = \mathbf{\frac{1}{2}}$	τότε	$(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}) = (\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{2})^2$	$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$	$\mathbf{\frac{7}{36} = \frac{7}{36}}$

κλπ ...

Άρα, βλέπουμε ότι παρότι, κάθε φορά, βάζουμε τυχαίους και διαφορετικούς αριθμούς στο τέλος καταλήγουμε σε μια σωστή ισότητα (ή όπως λέμε επιστημονικά: η ισότητα επαληθεύεται)! Τις ισότητες αυτές θα τις λέμε ταυτότητες και είναι εξαιρετικά σημαντικές στα μαθηματικά.

Και που μας χρειάζονται λοιπόν;

α) Καταρχήν, μας βοηθούν να εκτελέσουμε γρηγορότερα και σωστότερα ένα σωρό πράξεις, στις αλγεβρικές παραστάσεις.

β) Επίσης, μας βοηθούν να μετατρέψουμε μια αλγεβρική παράσταση, από άθροισμα σε γινόμενο (*αυτό λέγεται παραγοντοποίηση και θα το δούμε παρακάτω*), κάτι που είναι εξαιρετικά βολικό...

γ) ...στην απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων ή ακόμα...

δ) ...στην επίλυση πολύπλοκων εξισώσεων, όπως αυτών που είναι μεγαλύτερες του $1^{ου}$ βαθμού.

κι ακόμη ένα σωρό άλλες εφαρμογές. Άρα...

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται (δηλ. ισχύει) για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Ακολουθούν μερικές από τις σημαντικότερες ταυτότητες...

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ **Τετράγωνο αθροίσματος**
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ **Τετράγωνο διαφοράς**

$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**
(ή πιο σύντομα) **Διαφορά τετραγώνων**

$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ **Κύβος αθροίσματος**
$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ **Κύβος διαφοράς**

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ **Άθροισμα κύβων**
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ **Διαφορά κύβων**

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$ **Τριώνυμο**

Αποδείξεις των ταυτοτήτων

Για να αποδείξουμε τις πέντε γνωστές ταυτότητες ξεκινάμε από το πρώτο μέλος και κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο δεύτερο μέλος. Προσέξτε ότι αν δεν γνωρίζαμε να γράφουμε τις ταυτότητες, κατευθείαν από μνήμης, κάθε φορά που συναντούσαμε μία, θα έπρεπε να κάνουμε όλες αυτές τις πράξεις που ακολουθούν ξανά και ξανά, σε κάθε παράσταση!

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha + \beta)^2 =$
$(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) =$ (Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 =$ (Αναγωγή ομοίων όρων)
$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha - \beta)^2 =$
$(\alpha - \beta)(\alpha - \beta) =$ (Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 =$ (Αναγωγή ομοίων όρων)
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

3. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) =$
$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 =$ (Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^2 - \beta^2$ (Αναγωγή ομοίων όρων)

4. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$(\alpha+\beta)^3 =$	
$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 =$	(Πρώτη ταυτότητα)
$(\alpha+\beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$	(Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 =$	(Αναγωγή ομοίων όρων)
$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$	

5. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$(\alpha-\beta)^3 =$	
$(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2 =$	(Δεύτερη ταυτότητα)
$(\alpha-\beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$	(Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 =$	(Αναγωγή ομοίων όρων)
$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$	

6. $(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

$(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) =$	(Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 =$	(Αναγωγή ομοίων όρων)
$\alpha^3 + \beta^3$	

7. $(\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$

$(\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) =$	(Επιμεριστική ιδιότητα)
$\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 =$	(Αναγωγή ομοίων όρων)
$\alpha^3 - \beta^3$	

Μέθοδοι απόδειξης μιας ταυτότητας

Πέρα από τις γνωστές μας ταυτότητες, για να αποδείξουμε γενικά οποιαδήποτε ισότητα μας ζητάνε, ακολουθούμε το πιο συχνά μια από τις δύο παρακάτω μεθόδους:

Α. Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ισότητας που πρέπει να αποδείξουμε (συνήθως από αυτό με τις παρενθέσεις και τις δυνάμεις) και κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

Β. Εκτελούμε πράξεις σε κάθε μέλος της ισότητας ταυτόχρονα, μέχρι να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο μέλη (δηλ. μια ισότητα που να ισχύει).

10. Παραγοντοποίηση

Για να καταλάβουμε εύκολα τι είναι η παραγοντοποίηση, ας γράψουμε το εξής:

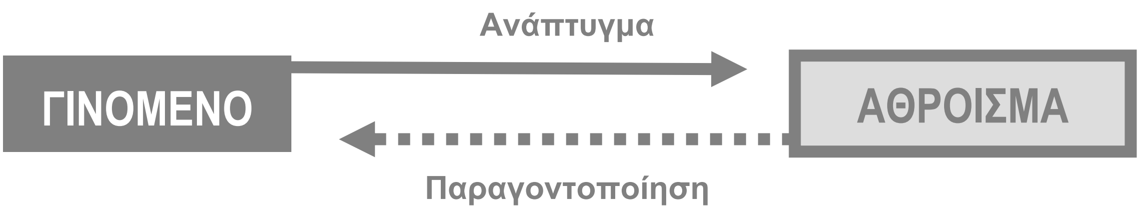
$$5 + 5 + 5 \;=\; 3 \cdot 5$$

Καταλαβαίνουμε εύκολα ότι και στα δυο μέλη της ισότητας γράφουμε το ίδιο πράγμα, μόνο που το 1^{o} μέλος είναι γράμμενο σαν άθροισμα, ενώ το δεύτερο σαν γινόμενο. Αυτό λέγεται παραγοντοποίηση.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ακόμη από τις γνωστές μας ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\,\alpha\beta + \beta^2$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος είναι ένα γινόμενο (μην ξεχνάμε ότι μια δύναμη είναι πολλαπλασιασμός!), ενώ το δεύτερο μέλος είναι ένα άθροισμα. Όταν διαβάζουμε από το 1^{o} μέλος προς το 2^{o} λέμε ότι *«βρίσκουμε το ανάπτυγμα»*, ενώ όταν διαβάζουμε από το 2^{o} μέλος στο 1^{o} λέμε ότι *«κάνουμε παραγοντοποίηση»*. Αυτά, λοιπόν, φαίνονται καλύτερα στο παρακάτω σχήμα:



Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

Πώς σκέφτομαι όταν κάνω παραγοντοποίηση

Επειδή υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους καταφέρνουμε να μετατρέψουμε ένα άθροισμα σε γινόμενο και ίσως είναι εύκολο να μπερδευτούμε – στην αρχή τουλάχιστον – καλό θα ήταν να έχουμε κάποια μέθοδο στο μυαλό μας.

Κάθε φορά, λοιπόν, που θα χρειάζεται να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση θα σκεφτόμαστε τους παρακάτω τρόπους και, μάλιστα, **με αυτήν ακριβώς τη σειρά!**

1ον – Κοινός παράγοντας

Α. Ελέγχω για Κοινούς Παράγοντες από όλους τους όρους
Β. Ελέγχω για Κοινούς Παράγοντες κατά ομάδες (<u>Ομαδοποίηση</u>)

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ</u>

1. Αν το πολυώνυμο που θέλω να παραγοντοποιήσω δεν περιέχει δυνάμεις τότε ο μόνος τρόπος παραγοντοποίησης που γνωρίζω είναι βρίσκοντας κοινούς παράγοντες.
2. Για να γίνει ομαδοποίηση θα πρέπει ο αριθμός των όρων του πολυωνύμου που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε να είναι <u>άρτιος</u>.
3. Θυμάμαι πάντα ότι η παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση γίνεται συνήθως σε δύο βήματα: πρώτα βγάζουμε κοινούς παράγοντες κατά ομάδες και κατόπιν ξανά κοινό παράγοντα τις παρενθέσεις που δημιουργήθηκαν από το πρώτο βήμα (εφόσον, φυσικά, είχαμε διαλέξει τα κατάλληλα ζευγάρια).

2ον – Ταυτότητα ή Τριώνυμο

Α. Αν ο μεγαλύτερος εκθέτης είναι 2 τότε μετράω τους όρους:

2 ΟΡΟΙ

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ Διαφορά τετραγώνων

3 ΟΡΟΙ

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ Ανάπτυγμα τετραγώνου
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

$x^2 + (\alpha + \beta)\cdot x + (\alpha\cdot\beta) = (x + \alpha)\cdot(x + \beta)$ Τριώνυμο

Β. Αν ο μεγαλύτερος εκθέτης είναι 3 τότε μετράω τους όρους:

2 ΟΡΟΙ

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ Άθροισμα κύβων
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ Διαφορά κύβων

4 ΟΡΟΙ

$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$ Ανάπτυγμα κύβου
$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$

3ον – Συνδυασμός περιπτώσεων

Συχνά, όπως φαίνεται και σε μερικά από τα προηγούμενα παραδείγματα, δεν αρκεί μονάχα ένας τρόπος ώστε να κάνουμε παραγοντοποίηση. Συνδυάζοντας τις γνώσεις μας, εφαρμόζουμε διαδοχικά διαφορετικές μεθόδους μέχρι να καταλήξουμε στο επιθυμητό γινόμενο.

Πχ.

$5x^2 - 125 = 5\cdot(x^2 - 25)$ (Κοινός παράγοντας το 5)

$= 5\cdot(x^2 - 5^2)$ (Διαφορά τετραγώνων)

$= 5\cdot(x + 5)\cdot(x - 5)$

Για τις πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, υπάρχουν ακόμη δυο τρόποι παραγοντοποίησης (ίσως όμως λίγο πιο δύσκολοι από τους προηγούμενους):

4ον – Διάσπαση όρου

Κάποιες φορές, το πολυώνυμο που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε:

α) Δεν έχει κοινούς παράγοντες σε όλους τους όρους.
β) Έχει περιττό αριθμό όρων οπότε δε γίνεται ομαδοποίηση.
γ) Μας θυμίζει κάποια ταυτότητα αλλά κάποιοι συντελεστές είναι μεγαλύτεροι απ’ ότι θα έπρεπε,

κλπ…

Τότε, πολύ πιθανό, η παραγοντοποίηση να γίνεται αφού πρώτα διασπάσουμε κάποιον από τους όρους του πολυωνύμου, οπότε μπορεί κατόπιν να γίνει είτε ομαδοποίηση, είτε κάποια από τις γνωστές μας ταυτότητες:

Πχ.

$$\begin{aligned} x^2 \underline{+ 3xy} + 2y^2 &= x^2 + 2xy + xy + 2y^2 \\ &= x\cdot(x + 2y) + y\cdot(x + 2y) \\ &= (x + 2y)\cdot(x + y) \end{aligned}$$

Πχ.

$$\begin{aligned} 4x^4 \underline{- 8x^2y^2} + y^4 &= 4x^4 - 4x^2y^2 - 4x^2y^2 + y^4 \\ &= 4x^4 - 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (2x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (2x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (2x^2 - y^2 + 2xy)\cdot(2x^2 - y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

5ον – Προσθαφαίρεση όρου

Κάποιες φορές, πάλι, το πολυώνυμο που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε μπορεί να μας θυμίζει κάποια ταυτότητα αλλά του <u>λείπουν</u> κάποιοι όροι.

Τότε, πολύ πιθανό, η παραγοντοποίηση να γίνεται αφού <u>προσθέσουμε και αφαιρέσουμε</u>, ταυτόχρονα, κάποιον κατάλληλο όρο. Η ισότητα δεν διαταράσσεται ακριβώς γιατί προσθέτω και αφαιρώ τον ίδιο όρο, οπότε το άθροισμα τους είναι μηδέν:

Πχ.

$$\begin{aligned}
4x^4 + y^4 &= 4x^4 + y^4 \underline{+ 4x^2y^2}\ \underline{- 4x^2y^2} \\
&= 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 \\
&= (2x^2)^2 + 2\cdot(2x^2)\cdot y^2 + (y^2)^2 - 4x^2y^2 \\
&= (2x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 \\
&= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 \\
&= (2x^2 + y^2 + 2xy)\cdot(2x^2 + y^2 - 2xy)
\end{aligned}$$

Το τριώνυμο

Επειδή το τριώνυμο απαιτεί έναν ιδιαίτερο τρόπο παραγοντοποίησης, που καμιά φορά δυσκολεύει μέχρι να τον συνηθίσουμε, αναφέρουμε ένα παράδειγμα:

Πχ. Ας δούμε πώς μπορεί να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $\mathbf{x^2 - 5x + 6}$. Για να γίνει αυτό χρειάζεται να βρούμε δύο ακέραιους αριθμούς α, β οι οποίοι να έχουν, συγχρόνως, άθροισμα $\mathbf{\alpha + \beta = -5}$ και γινόμενο $\mathbf{\alpha \cdot \beta = +6}$. Δηλαδή:

$$x^2 \;\underset{\substack{\downarrow \\ \alpha+\beta}}{-5}\,x\; \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha\cdot\beta}}{+6}$$

Ξεκινάμε ψάχνοντας δυο ακέραιους με γινόμενο +6, αφού οι ακέραιοι με άθροισμα –5 είναι... άπειροι. Βολεύει γι’ αυτό ένας μικρός πίνακας:

Όλα αυτά τα γινόμενα κάνουν +6

α · β	α + β
1 · 6	1 + 6 = 7
–1 · (–6)	–1 – 6 = –7
2 · 3	2 + 3 = 5
–2 · (–3)	–2 – 3 = –5

Μόνο αυτό το ζευγάρι έχει, επιπλέον, και το ζητούμενο άθροισμα, δηλ. –5. Άρα είναι το κατάλληλο ζευγάρι

Άρα, οι δυο αριθμοί που ζητούσαμε είναι οι **–2** και **–3**. Τώρα που τους βρήκαμε είμαστε έτοιμοι να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο. Θα είναι λοιπόν:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο με τον παραπάνω τρόπο, θα πρέπει ο πρώτος όρος του, δηλαδή το x^2, να μην έχει συντελεστή (ή σωστότερα να έχει συντελεστή τη μονάδα). Αν αυτό δε συμβαίνει τότε κοιτάζουμε μήπως ο συντελεστής του x^2 βγαίνει κοινός παράγοντας.

Πχ. $2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2(x - 2)(x - 3)$

2. Ψάχνοντας για τα κατάλληλα γινόμενα, συμβαίνει συχνά να δυσκολευόμαστε ή να ξεχνάμε αρκετά. Να θυμόμαστε ότι για κάθε σωστό γινόμενο που βρίσκουμε υπάρχει και ένα ακόμη **με τους αντίθετους ακριβώς αριθμούς!** Κοιτάξτε το πινακάκι που φτιάξαμε και θα το διαπιστώσετε εύκολα.

3. Όσο θα συνηθίζουμε τον τρόπο αυτό, δε θα χρειάζεται πια ούτε να φτιάχνουμε πίνακα, αλλά ούτε και να βρίσκουμε όλα τα δυνατά γινόμενα. Με 2–3 προσπάθειες, στο μυαλό ή στο πρόχειρο, θα βρίσκουμε εύκολα το σωστό ζευγάρι αριθμών!

11. Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ αλγεβρικών παραστάσεων

Για να υπολογίσουμε το Ε.Κ.Π. ή το Μ.Κ.Δ. δυο ή περισσότερων ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων πρέπει, πρώτα, να κάνουμε οπωσδήποτε:

παραγοντοποίηση

Στη συνέχεια, ακολουθούμε τον αντίστοιχο κανόνα:

Ε.Κ.Π. **Φτιάχνουμε ένα γινόμενο, επιλέγοντας από κάθε παράσταση κοινούς και μη κοινούς παράγοντες, από μια φορά τον καθένα και στο μεγαλύτερο εκθέτη.**

Μ.Κ.Δ. **Φτιάχνουμε ένα γινόμενο, επιλέγοντας από κάθε παράσταση μόνο τους κοινούς παράγοντες και μάλιστα στο μικρότερο εκθέτη.**

Πχ. Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω παραστάσεων:

$12\alpha^2 - 12\beta^2, \quad 6\alpha - 6\beta, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2$

Καταρχήν, παραγοντοποιούμε τις παραστάσεις:

$12\alpha^2 - 12\beta^2 = 12(\alpha^2 - \beta^2) = \mathbf{12(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}$

$6\alpha - 6\beta = \mathbf{6(\alpha - \beta)}$

$3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 3(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \mathbf{3(\alpha - \beta)^2}$

Άρα, σύμφωνα με τους κανόνες:

ΕΚΠ $=$ $\mathbf{12\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\alpha - \beta)^2}$
ΜΚΔ $=$ $\mathbf{3\cdot(\alpha - \beta)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που υπάρχουν και αριθμητικοί παράγοντες, υπολογίζουμε ξεχωριστά το ΕΚΠ και το ΜΚΔ αυτών. Στο παράδειγμά μας είναι: ΕΚΠ (12, 6, 3) = 12 και ΜΚΔ (12, 6, 3) = 3. Θυμάστε μήπως τον τρόπο που τα υπολογίζουμε;

12. Πότε ορίζεται μια ρητή αλγεβρική παράσταση

Στις ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, ακριβώς επειδή υπάρχουν μεταβλητές στον παρονομαστή, αντιμετωπίζουμε ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα. Υπάρχει ο φόβος, αν στη θέση των μεταβλητών μπουν κάποιοι αριθμοί και κάνουμε τις πράξεις, το αποτέλεσμα να βγει... **μηδέν**! Και, φυσικά, γνωρίζουμε πολύ καλά ότι απαγόρευεται, δια ροπάλου, να εμφανιστεί αυτός ο αριθμός στον παρονομαστή. Έτσι, πρέπει να βρούμε ποιοι είναι αυτοί οι επικίνδυνοι αριθμοί και να τους απορρίψουμε!

Όταν, λοιπόν, μας ρωτάνε να βρούμε **«πότε ορίζεται μια ρητή αλγεβρική παράσταση»** είναι σα να μας ρωτάνε ***«ποιους αριθμούς επιτρέπεται να βάλουμε στις μεταβλητές χωρίς να υπάρχει πρόβλημα»*** ή ακόμα καλύτερα – γιατί οι αριθμοί που επιτρέπονται συνήθως είναι άπειροι – ***«ποιους αριθμούς απαγορεύεται να βάλουμε στις μεταβλητές, ώστε να μην υπάρχει πρόβλημα»***.

Πολύ χρήσιμη είναι η παρακάτω σχέση, η οποία μας λέει πως για να είναι ένα γινόμενο διαφορετικό του μηδενός, θα πρέπει **κάθε** παράγοντας να είναι διαφορετικός απ' το μηδέν:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0}$$

Πχ. Να βρείτε πότε ορίζονται οι παραστάσεις: $A = \dfrac{x-2}{4x-32}$ και $B = \dfrac{5x}{x^3-4x}$

Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει:

$$4x - 32 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq 32 \Leftrightarrow x \neq \frac{32}{4} \Leftrightarrow \boxed{x \neq 8}$$

Για να ορίζεται η παράσταση Β πρέπει:

$$x^3 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) \neq 0$$

$$\boxed{x \neq 0} \qquad x - 2 \neq 0,\ \boxed{x \neq 2} \qquad x + 2 \neq 0,\ \boxed{x \neq -2}$$

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ</u>

1. Παρατηρώντας το πρώτο παράδειγμα, καταλαβαίνουμε εύκολα ότι μια σχέση, που περιέχει το σύμβολο ≠ (διαβάζεται «διάφορο» ή «διαφορετικό») τη λύνουμε ακριβώς όπως μια εξίσωση.
2. Όταν η σχέση δεν είναι 1^{ου} βαθμού αλλά μεγαλύτερου, τότε παραγοντοποιούμε και θέτουμε κάθε παράγοντα διάφορο του μηδενός. Επιλύουμε τη κάθε σχέση ξεχωριστά.

13. Απλοποίηση ρητής αλγεβρικής παράστασης

Όπως, ακριβώς, απλοποιώντας ένα κλάσμα, παίρνουμε ένα άλλο με μικρότερους όρους αλλά ισοδύναμο με το αρχικό, έτσι μπορούμε να απλοποιησουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, ώστε να πάρουμε μιαν άλλη, ίση με την αρχική, αλλά με λιγότερο σύνθετους όρους. Για να γίνει αυτό, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

---

1. **Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή.**
2. **Διαγράφουμε από τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους κοινούς παράγοντες.**

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Για να απλοποιήσουμε πρέπει **ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ** σε αριθμητή και παρονομαστή να υπάρχουν γινόμενα! (Γι' αυτό και πρώτα κάνουμε παραγοντοποίηση!)

$\dfrac{\cancel{2}\cdot x}{\cancel{2}} = x$ **ΣΩΣΤΟ!**

$\dfrac{\cancel{2}+x}{\cancel{2}} = x$ **ΛΑΘΟΣ!!!**

14. Πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Για να εκτελέσουμε τις 4 γνωστές μας πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, αρκεί να θυμηθούμε το πώς γίνονται οι πράξεις με τα απλά κλάσματα, αλλά επιπλέον και να γνωρίζουμε καλά παραγοντοποίηση!

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ή περισσότερες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

---

1. **Παραγοντοποιούμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές.**

2. **Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές μεταξύ τους, το ίδιο και τους παρονομαστές. Στην πράξη, αυτό που κάνουμε είναι απλώς να γράψουμε όλους τους όρους σε ένα μεγάλο κλάσμα!**
3. **Κάνουμε απλοποίηση.**

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Για να διαιρέσουμε δυο ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

---

1. **Μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα.**
2. **Συνεχίζουμε με τα βήματα που αναφέραμε στον πολλαπλασιασμό.**

ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Για να προσθέσουμε ή ν’ αφαιρέσουμε δυο ή περισσότερες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, οι οποίες είναι ετερώνυμες, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα (αν είναι ομώνυμες προχωρούμε κατευθείαν στο 5^{o} βήμα):

---

1. **Παραγοντοποιούμε όλους τους παρονομαστές.**
2. **Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.**
3. **Σχεδιάζουμε τα γνωστά μας «καπελάκια». Το κόλπο, τώρα, είναι σε κάθε καπελάκι να βάλουμε ό,τι λείπει απ’ τον αντίστοιχο παρονομαστή, ώστε να «φτάσει» το Ε.Κ.Π.**
4. **Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με το καπελάκι.**
5. **Τα κλάσματα είναι πια ομώνυμα. Γράφουμε ένα μεγάλο κλάσμα με τον κοινό παρονομαστή και προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές. Προσοχή στα πρόσημα!**
6. **Αφού τελειώσουμε, αν θέλουμε παραγοντοποιούμε τον αριθμητή κι ελέγχουμε αν γίνεται απλοποίηση.**
