Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1

ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Αλγεβρική Παράσταση**

  Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται μια μαθηματική έκφραση (παράσταση) η οποία περιέχει μεταβλητές.

- **Ακέραια Αλγεβρική Παράσταση**

  Ακέραια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση, όταν μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

- **Αριθμητική Τιμή**

  Αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στη θέση των μεταβλητών θέσουμε κάποιον αριθμό και κάνουμε τις πράξεις.

- **Μονώνυμο**

  Μονώνυμο ονομάζεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία υπάρχει μόνον η πράξη του πολλαπλασιασμού.

  ► Ένα μονώνυμο αποτελείται από το **συντελεστή**, δηλαδή το κομμάτι εκείνο που περιέχει τον αριθμό και το **κύριο μέρος**, το κομμάτι εκείνο που περιέχει τις μεταβλητές.

- **Βαθμός Μονώνυμου**

  Βαθμός ενός μονώνυμου, ως προς μια μεταβλητή, ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής. Βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές ονομάζεται το άθροισμα όλων των εκθετών.

- **Όμοια Μονώνυμα**

  Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα εκείνα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

- **Ίσα Μονώνυμα**

  Ίσα ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή.

- **Αντίθετα Μονώνυμα**

  Αντίθετα ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

- **Σταθερό Μονώνυμο**

  Κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται μονώνυμο μηδενικού βαθμού. Ειδικότερα, για τον αριθμό μηδέν, λέγεται μηδενικό μονώνυμο και δεν ορίζεται βαθμός.

- **Πολυώνυμο**

  Πολυώνυμο ονομάζεται η αλγεβρική παράσταση που προκύπτει εάν προσθέσουμε μονώνυμα που δεν είναι μεταξύ τους όμοια.

- **Βαθμός Πολυώνυμου**

  Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές του είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του, ως προς τις μεταβλητές αυτές.

- **Ίσα Πολυώνυμα**

  Δυο πολυώνυμο λέγονται ίσα όταν οι όροι τους είναι ίσα μονώνυμα.

- **Σταθερό Μονώνυμο**

  Κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται μονώνυμο μηδενικού βαθμού. Ειδικότερα, για τον αριθμό μηδέν, τον ονομάζουμε μηδενικό μονώνυμο και δεν ορίζεται βαθμός

- **Ταυτότητα**

  Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

- **Παραγοντοποίηση**

  Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

- **Ρητή Αλγεβρική Παράσταση**

  Ρητή ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι της είναι πολυώνυμα.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. **Τετράγωνο Αθροίσματος**

   $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2. **Τετράγωνο Διαφοράς**

   $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

3. **Διαφορά Τετραγώνων**

   $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

4. **Κύβος Αθροίσματος**

   $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

5. **Κύβος Διαφοράς**

   $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

6. **Άθροισμα Κύβων**

   $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

7. **Διαφορά Κύβων**

   $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

8. **Τριώνυμο**

   $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

Αποδείξεις Ταυτοτήτων

Για να αποδείξουμε τις πέντε γνωστές ταυτότητες ξεκινάμε από το ένα μέλος της εξίσωσης και εκτελούμε τις πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

1. $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)^2 &&= \\
&(\alpha+\beta)(\alpha+\beta) &&= &&\text{(Επιμεριστική ιδιότητα)}\\
&\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 &&= &&\text{(Αναγωγή ομοίων όρων)}\\
&\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2
\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)^2 &&= \\
&(\alpha-\beta)(\alpha-\beta) &&= &&\text{(Επιμεριστική)}\\
&\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2 &&= &&\text{(Αναγωγή)}\\
&\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2
\end{aligned}$$

3. $\boldsymbol{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) &&= &&\text{(Επιμεριστική)}\\
&\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 &&= &&\text{(Αναγωγή)}\\
&\alpha^2-\beta^2
\end{aligned}$$

4. $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)^3 &&= \\
&(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 &&= &&\text{(Ταυτότητα)}\\
&(\alpha+\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) &&= &&\text{(Επιμεριστική)}\\
&\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3 &&= &&\text{(Αναγωγή)}\\
&\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3
\end{aligned}$$

5. $\boldsymbol{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)^3 &&= \\
&(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2 &&= &&\text{(Ταυτότητα)}\\
&(\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) &&= &&\text{(Επιμεριστική)}\\
&\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2-\beta^3 &&= &&\text{(Αναγωγή)}\\
&\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3
\end{aligned}$$

6. $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &&= &&\text{(Επιμεριστική)}\\
&\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3 &&= &&\text{(Αναγωγή)}\\
&\alpha^3+\beta^3
\end{aligned}$$

7. $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$

$$\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &&= &&\text{(Επιμεριστική)}\\
&\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3 &&= &&\text{(Αναγωγή)}\\
&\alpha^3-\beta^3
\end{aligned}$$

8. $\boldsymbol{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$

$x^2+\alpha x+\beta x+\alpha\beta=x^2+x\beta+\alpha x+\alpha\beta$ (Πράξεις & στα 2 μέλη)

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Για να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση, δηλαδή να τη μετατρέψουμε από άθροισμα–διαφορά σε γινόμενο, σκεφτόμαστε με την εξής σειρά:

- **Κοινός Παράγοντας**
- **Κοινός Παράγοντας κατά ομάδες** (= Ομαδοποίηση)
- **Ταυτότητες**
  - Διαφορά Τετραγώνων

    $\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}$
  - Τέλειο Τετράγωνο

    $\boldsymbol{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2}$
    $\boldsymbol{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2}$
  - Άθροισμα / Διαφορά Κύβων

    $\boldsymbol{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}$
    $\boldsymbol{\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}$
- **Τριώνυμο**
  - Αν έχουμε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \kappa x + \lambda$, τότε ψάχνουμε 2 αριθμούς α, β που να έχουν **γινόμενο = λ** και **άθροισμα = κ** .

    $\boldsymbol{x^2 + \kappa x + \lambda = (x + \alpha)(x + \beta)}$
- **Συνδυασμός περιπτώσεων**

  Συνήθως, πρώτα κοινός παράγοντας και στη συνέχεια κάποια από τις ταυτότητες ή τριώνυμο.

Πιο σπάνια…

- **Διάσπαση όρου**
- **Προσθαφαίρεση όρου**
- **Ομαδοποίηση** σε διάφορους συνδυασμούς

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 2

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Γενική μορφή

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0} \quad (\alpha \neq 0)$$

π.χ. $5x^2 - 10x + 9 = 0$
$\alpha = 5 , \beta = -10 , \gamma = 9$

Υπολογίζουμε πρώτα τη **Διακρίνουσα**

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Εάν **$\Delta > 0$** (θετικός αριθμός) τότε η εξίσωση ...

  έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες

  $$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Εάν **$\Delta = 0$** τότε η εξίσωση...

  έχει μία (διπλή) λύση

  $$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

- Εάν **$\Delta < 0$** (αρνητικός αριθμός) τότε η εξίσωση ...

  δεν έχει καμία λύση

  Αδύνατη

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- **Κλασματική Εξίσωση**

  Κλασματική θα ονομάζεται μία εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1 ► Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

2 ► Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.

3 ► **Παίρνουμε περιορισμούς !**

4 ► Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το ΕΚΠ, ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών.

5 ► Εκτελούμε τις επιμεριστικές ιδιότητες, ώστε να γίνει απαλοιφή παρενθέσεων.

- Αν στο σημείο αυτό η εξίσωση είναι **2ου βαθμού** :
  - Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος.
  - Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
  - Υπολογίζουμε τη Διακρίνουσα κ.τ.λ.

- Αν η εξίσωση, που έχει απομείνει είναι **1ου βαθμού** :
  - Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
  - Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
  - Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

- **Διάταξη των Πραγματικών**

  Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$
$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$$

- Αν και στα 2 μέλη μιας ανισότητας **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα **ίδιας φοράς** :

  - $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
  - $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$

- Αν **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** και τα 2 μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, προκύπτει ανισότητα **ίδιας φοράς** :

  - $\alpha > \beta$ **και** $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
  - $\alpha > \beta$ **και** $\gamma > 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$

- Αν **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** και τα 2 μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, προκύπτει ανισότητα **αντίθετης φοράς** :

  - $\alpha > \beta$ **και** $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
  - $\alpha > \beta$ **και** $\gamma > 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$

- Αν **προσθέσουμε κατά μέλη** δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν **την ίδια φορά**, τότε προκύπτει ανισότητα **ίδιας φοράς** :

  - $\alpha > \beta$ **και** $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

- **Μεταβατική Ιδιότητα**

  - $\alpha > \beta$ **και** $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$

- Αν **πολλαπλασιάσομε κατά μέλη** δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν **την ίδια φορά** και **θετικά** μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα **ίδιας φοράς** :

  - $\boldsymbol{\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \gamma > \delta \;\; \text{και} \;\; \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta}$

- Το **τετράγωνο** κάθε πραγματικού αριθμού α είναι **μη αρνητικός** αριθμός :

  - $\boldsymbol{\alpha^2 \geq 0}$

  Εξαιτίας αυτού ισχύει ότι :

  - $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = 0 \;\; \text{και} \;\; \beta = 0}$

- **Δεν επιτρέπεται** να **αφαιρούμε ή να διαιρούμε** κατά μέλη ανισότητες.

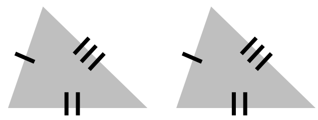
Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (Γενικά)

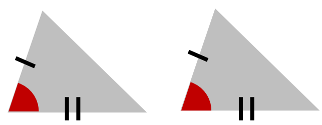
- **Π–Π–Π**

  Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν και τις 3 πλευρές τους ίσες μία-προς-μία.



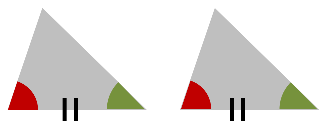
- **Π–Γ–Π**

  Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν 2 πλευρές σες μία-προς-μία και την περιεχόμενη γωνία (ίση).



- **Γ–Π–Γ**

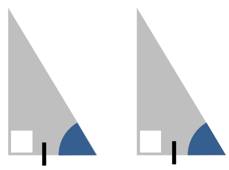
  Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν 1 πλευρά ίση και τις προσκείμενες, σε αυτή, γωνίες ίσες μία-προς-μία.



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

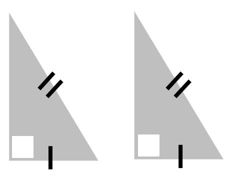
- **Π–Γ**

  Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν ίσες μία αντίστοιχη πλευρά και μία οξεία γωνία.



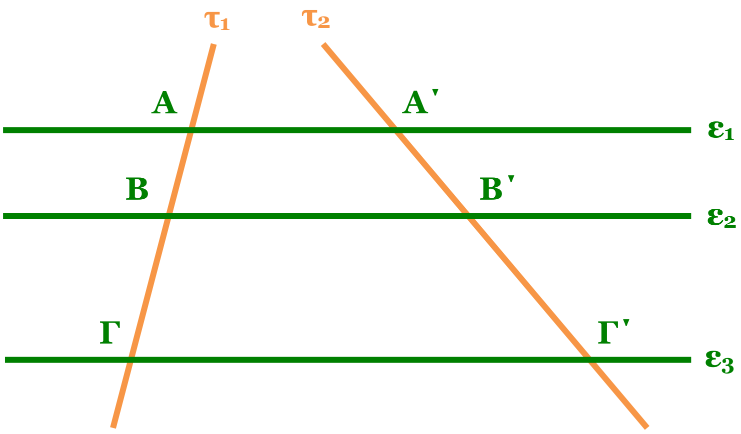
- **Π–Π**

  Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες, μία-προς-μία.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

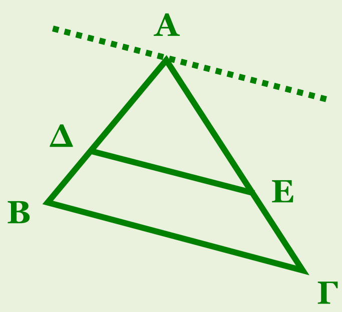
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:



$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Εφαρμογή στα τρίγωνα

Αν στις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ πάρουμε σημεία Δ, Ε τέτοια, ώστε το ΔΕ να είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Θαλή. Αρκεί να υποθέσουμε την ύπαρξη μια τρίτης παράλληλης τέτοιας, που να διέρχεται από την απέναντι κορυφή του τριγώνου.



$$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Θα λέμε ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

- Δυο **κανονικά** πολύγωνα, με τον ίδιο αριθμό πλευρών, είναι όμοια.

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Θα λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι **όμοια** όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες, μία προς μία.

- Όταν δυο τρίγωνα είναι όμοια, τότε θα έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Συνήθως ...

- Αποδεικνύουμε, πρώτα, ότι τα τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες, άρα είναι όμοια.
- Στη συνέχεια, γράφουμε τους λόγους (κλάσματα) των αντίστοιχων πλευρών κι επιλέγουμε το ζευγάρι που μας βολεύει.

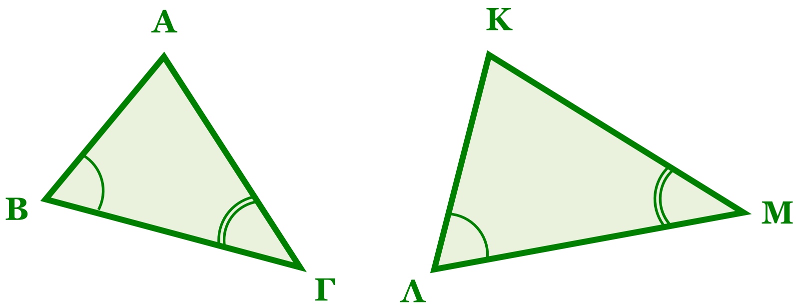
ΣΑΤΑΝΙΚΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

- Απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

- Για να είναι όμοια δυο τρίγωνα (γενικά) αρκεί να έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία.
- Για να είναι όμοια δυο **ορθογώνια** τρίγωνα αρκεί να έχουν μία οξεία γωνία ίση.

ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

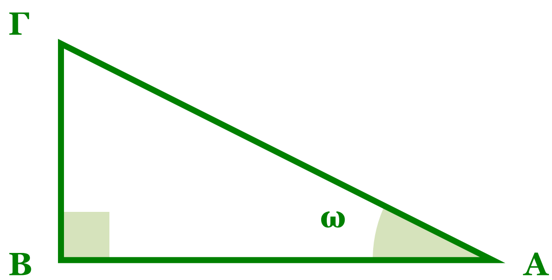


Αν $\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{A\Gamma}{KM} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \boldsymbol{\lambda}$ τότε $\boxed{\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{K\Lambda M}} = \boldsymbol{\lambda}^2}$

Γεωμετρία

Κεφάλαιο 2

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
Οξείας Γωνίας Ορθογωνίου Τριγώνου



$$\textbf{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$$

$$\textbf{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$$

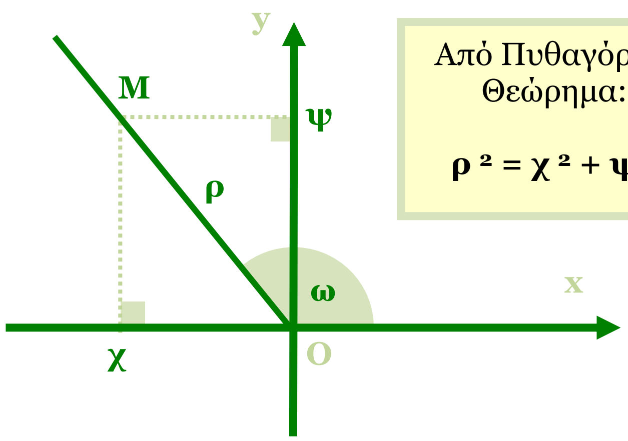
$$\textbf{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

Επιπλέον, για κάθε γωνία ω ισχύει:

$$-1 \leq \textbf{ημω} \leq 1$$
$$-1 \leq \textbf{συνω} \leq 1$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ Οποιασδήποτε Γωνίας

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, έχουμε:



Από Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\rho^2 = \chi^2 + \psi^2$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{\psi}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{\chi}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{\psi}{\chi}$$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Αν η γωνία ω είναι **οξεία** τότε:
  ημω > 0
  συνω > 0
  εφω > 0

- Αν η γωνία ω είναι **αμβλεία** τότε:
  ημω > 0
  συνω < 0
  εφω < 0

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ Παραπληρωματικών Γωνιών

Αν έχουμε μια γωνία ω, τότε η **παραπληρωματική** της συμβολίζεται ως:

$$180^o - \omega$$

- Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το **ίδιο ημίτονο** και **αντίθετους τους άλλους** τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

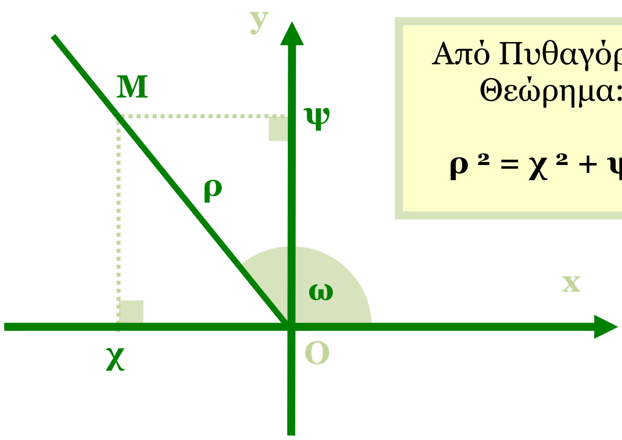
$$\begin{aligned} ημ(180^o - \omega) &= ημ\omega \\ συν(180^o - \omega) &= -συν\omega \\ εφ(180^o - \omega) &= -εφ\omega \end{aligned}$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$
- $εφ\omega = \dfrac{ημ\omega}{συν\omega}$

Αποδείξεις Τριγωνομετρικών Σχέσεων

Καταρχήν, και στις δύο περιπτώσεις, κατασκευάζουμε το παρακάτω σχήμα:



Από Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\rho^2 = \chi^2 + \psi^2$$

- $\boldsymbol{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega} =$ (Ξεκινάμε από το 1ο μέλος)

$$= \left(\frac{\psi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\chi}{\rho}\right)^2$$ (Νέοι τύποι)

$$= \frac{\psi^2}{\rho^2} + \frac{\chi^2}{\rho^2}$$ (Ιδιότητες δυνάμεων)

$$= \frac{\psi^2 + \chi^2}{\rho^2}$$ (Ομώνυμων κλάσματα)

$$= \frac{\rho^2}{\rho^2} \qquad = \mathbf{1}$$ (Π.Θ. $\rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$)

- $\dfrac{\boldsymbol{\eta\mu\omega}}{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega}} =$ (Ξεκινάμε από το 2ο μέλος)

$$= \frac{\frac{\psi}{\rho}}{\frac{\chi}{\rho}}$$ (Νέοι τύποι)

$$= \frac{\psi \cdot \rho}{\rho \cdot \chi}$$ (Σύνθετο κλάσμα → απλό)

$$= \frac{\psi}{\chi} \qquad = \boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega}$$ (Νέοι τύποι)

ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες, προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Για κάθε πλευρά ενός τριγώνου ισχύει η παρακάτω σχέση ...

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

και αντίστοιχα ...

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$$

Επίλυση Τριγώνου

Επίλυση ενός τριγώνου, με απλά λόγια, σημαίνει τον υπολογισμό όλων των στοιχείων του (πλευρές και γωνίες), όταν μας δίνονται μόνο κάποια από αυτά. Γι' αυτό το σκοπό, τα βασικά μας εργαλεία είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα, οι Τριγωνομετρικοί Αριθμοί και οι Νόμοι των Ημιτόνων και των Συνημιτόνων.