

1. ΘΕΜΑ_2_22060

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

2. ΘΕΜΑ_2_22052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-2,5)$ και $\vec{b} = (1,-3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ δεν είναι παράλληλα.

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v} = (8,-21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

3. ΘΕΜΑ_2_22044

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A , B και Γ .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. ΘΕΜΑ_2_22038

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (5,-12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 1.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 7.

5. ΘΕΜΑ_2_21681

Θεωρούμε τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $\Gamma(2,5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

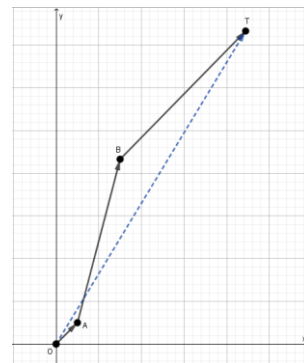
β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.

6. ΘΕΜΑ_2_18878

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν

να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(1,1)$, $\overrightarrow{AB}=(2,4)$,
 $\overrightarrow{BT}=(2,5\sqrt{3}-5)$, όπως φαίνονται στο σχήμα:



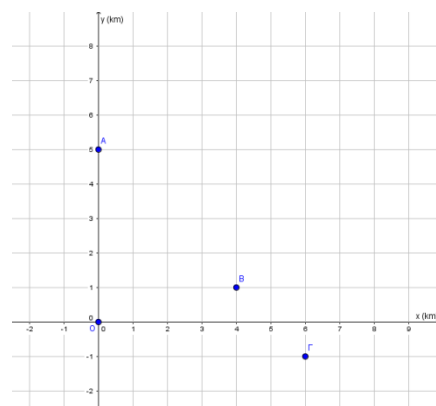
Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT}=(5,5\sqrt{3})$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

7. ΘΕΜΑ_2_15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

8. ΘΕΜΑ_2_15854

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{a} // \vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{a}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{a}$.

9. ΘΕΜΑ_2_15002

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,1)$.

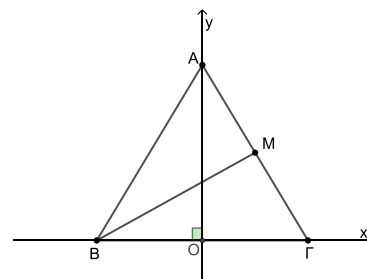
α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

10. ΘΕΜΑ_2_22557

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma)=12$, $(AO)=8$ και M το μέσο της πλευράς AG .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0,8)$, $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii. $M(3,4)$.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

11. ΘΕΜΑ_2_14666

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$ ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u}=3\vec{a}-5\vec{\beta} \text{ και } \vec{v}=5\vec{a}-9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

γ) Αν τα $\vec{\beta}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K , Λ , και M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

12. ΘΕΜΑ_2_19038

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$.

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{\beta}$.

13. ΘΕΜΑ_2_17070

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A , B , Γ και Δ .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

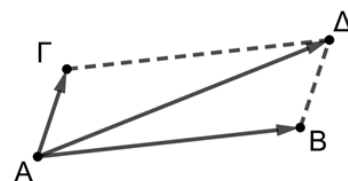
14. ΘΕΜΑ_2_16581

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(3,-2)$.

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.
 β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
 γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

15. ΘΕΜΑ_2_16580

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:



- α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$,
 β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$,
 γ) του σημείου Δ.

16. ΘΕΜΑ_2_16579

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.
 β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.
 γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

17. ΘΕΜΑ_2_16151

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.
 β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$.

18. ΘΕΜΑ_2_16147

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.
 β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα με $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ το θετικό ημιάξονα Ox.
 γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$.

19. ΘΕΜΑ_4_20938

Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{a}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{a} = (|\vec{a}| - 4, |\vec{a}| - 2)$.

- α) Να δείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$.
- β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$.

20. ΘΕΜΑ_4_17077

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$.
- β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .
- γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
- Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21. ΘΕΜΑ_4_17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.
- β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$.
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
- «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 4. \text{ »}$$

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.