

1. ΘΕΜΑ_2_22040

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{a}$.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 1.

2. ΘΕΜΑ_2_21682

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{a} - \vec{\beta} = (-5, -10)$ και $\vec{a} + \vec{\beta} = (11, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|$.

3. ΘΕΜΑ_2_20773

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{v} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

4. ΘΕΜΑ_2_20733

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα.

5. ΘΕΜΑ_2_20732

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{a}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$.

6. ΘΕΜΑ_2_15252

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την AG .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABG .

7. ΘΕΜΑ_2_15852

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$,

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$,

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{v}$,

8. ΘΕΜΑ_2_22554

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία

A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$. Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}).$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}, \quad \text{ii. } \overrightarrow{OM} = \vec{j}.$$

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

9. ΘΕΜΑ_2_22170

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

10. ΘΕΜΑ_2_14586

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$.

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM}$.

11. ΘΕΜΑ_2_20888

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{\beta}|=5$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.
- β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

12. ΘΕΜΑ_2_20685

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(0,\gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.
- γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

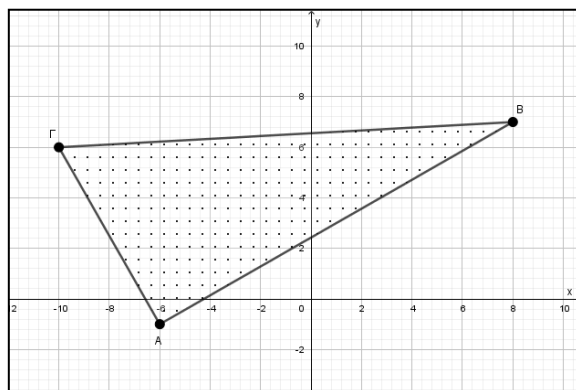
13. ΘΕΜΑ_2_15186

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.
- β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.
- γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

14. ΘΕΜΑ_2_15996

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



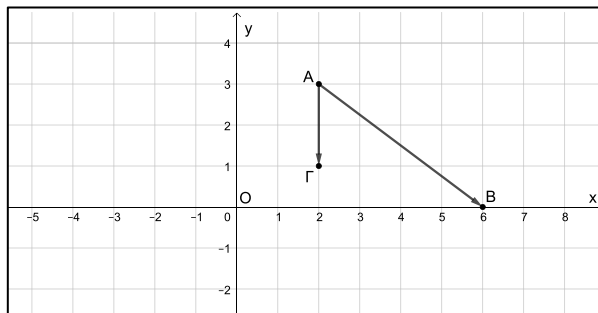
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.
- β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

15. ΘΕΜΑ_2_17075

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.



16. ΘΕΜΑ_2_16428

Δίνονται τα διανύσματα με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

17. ΘΕΜΑ_2_16427

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

18. ΘΕΜΑ_2_16426

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

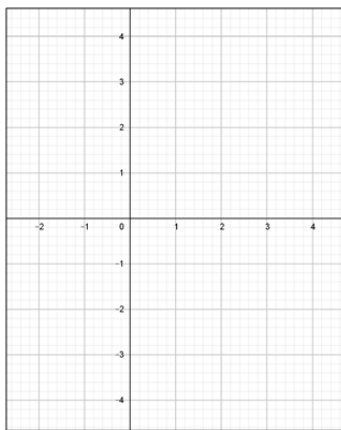
β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

19. ΘΕΜΑ_2_15317

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

20. ΘΕΜΑ_2_14953

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2,5)$, $B(7,8)$, $\Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

21. ΘΕΜΑ_2_16144

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$.

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

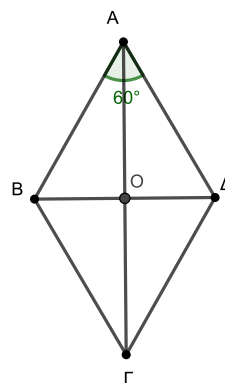
α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

β) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$



22. ΘΕΜΑ_2_16141

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$

ii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B\Gamma})$

iii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\Gamma A})$

iv. $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{\Gamma M})$

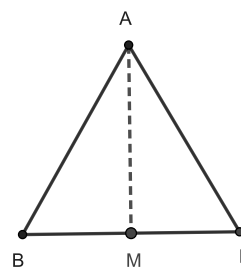
v. $(\overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{\Gamma B})$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$



23. ΘΕΜΑ_2_15825

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ) Να βρείτε τη $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

24. ΘΕΜΑ_2_15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, -1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

25. ΘΕΜΑ_2_15463

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BG}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$.

26. ΘΕΜΑ_2_15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

27. ΘΕΜΑ_2_15038

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

28. ΘΕΜΑ_3_18243

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$.

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

29. ΘΕΜΑ_4_22064

α) Αν $\vec{AB}$, $\vec{AG}$, $\vec{AD}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ και $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$:

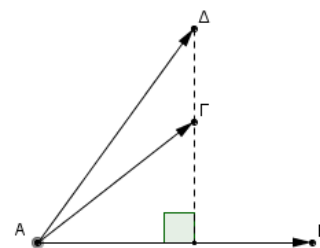
- i. είναι αριθμοί ή διανύσματα; ii. μπορούν να συγκριθούν;

β) Για τα διανύσματα του σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

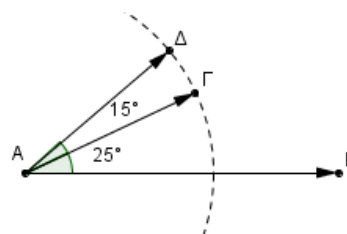


γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο Α) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$



Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

30. ΘΕΜΑ_4_22063

α) Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \vec{\beta}$

ii. $|\vec{a} + \vec{\beta}| = ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{a} \uparrow \vec{\gamma}$

ii. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

iii. $\vec{a} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{a}$

31. ΘΕΜΑ_4_18520

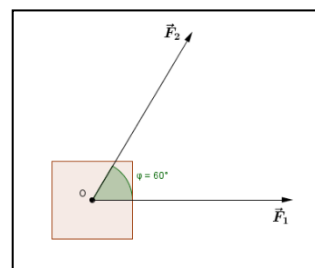
α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$ (1).

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$.

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



32. ΘΕΜΑ_4_15320

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

33. ΘΕΜΑ_4_18547

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.