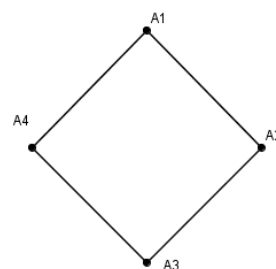


1. ΘΕΜΑ_2_22049

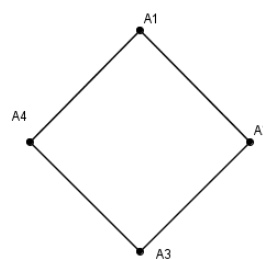
Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



- α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;
- β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

2. ΘΕΜΑ_2_22047

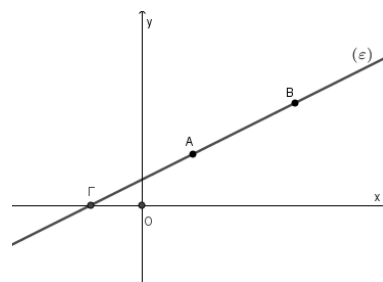
Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



- α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;
- β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.

3. ΘΕΜΑ_2_20868

Στο σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε) .



- α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε) .
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

- γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

4. ΘΕΜΑ_2_22173

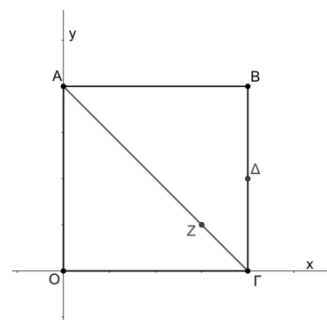
Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma O$ με κορυφές τα σημεία:

$$A(0,4), B(4,4), \Gamma(4,0), O(0,0)$$

Στην διαγώνιο $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της $B\Gamma$.

- α) Να βρείτε:



- i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ ,
- ii. τις συντεταγμένες του σημείου Ζ.

β) Αν το σημείο Δ είναι το $(4,2)$ και το σημείο Ζ το $(3,1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

5. ΘΕΜΑ_2_22071

Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3,1)$,
- ii. η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $\Gamma(5,3)$,

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ.

6. ΘΕΜΑ_2_21965

Δίνονται τα σημεία $A(2,-4)$ και $B(0,-2)$.

α) Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

β) Να βρείτε την εξίσωση (ζ) της μεσοκάθετου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

γ) Αν $(\zeta): y = x - 4$ και $(\epsilon): 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (ϵ) .

7. ΘΕΜΑ_2_21964

Δίνονται το σημείο $A(4,-2)$ και η ευθεία $(\epsilon_1): x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1) ,

β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ϵ_1) και $(\epsilon_2): y = -x + 2$,

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ϵ_1) .

8. ΘΕΜΑ_2_15044

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$, $B(6,-1)$.

α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β .

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $M(3,2)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ .

9. ΘΕΜΑ_2_18351

Δίνονται τα σημεία $A(-1,5)$, $B(3,3)$. Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
- β) τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
- γ) την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

10. ΘΕΜΑ_2_18236

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες

$(\varepsilon_1): y = -x + 4$ και $(\varepsilon_2): y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.
- β) Να βρείτε:
 - i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$,
 - ii. την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

11. ΘΕΜΑ_2_16002

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.
- β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$.

12. ΘΕΜΑ_2_15271

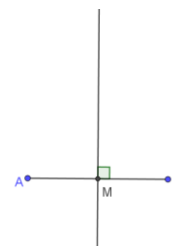
Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

13. ΘΕΜΑ_2_15027

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .



14. ΘΕΜΑ_2_16766

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

15. ΘΕΜΑ_2_15657

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y = 6$ και $(\varepsilon_2): x - 2y = -2$.

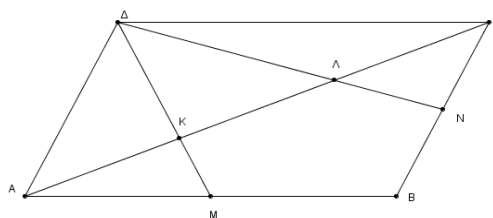
α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και $(\varepsilon_3): 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

16. ΘΕΜΑ_4_22065

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$.

Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N .

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM , ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ .

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

17. ΘΕΜΑ_4_18568

Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

18. ΘΕΜΑ_4_17078

Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση $y = -ax + 5a$,

ii. τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $a = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$,

iii. το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $a = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

19. ΘΕΜΑ_4_15658

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$ και $\vec{b} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο Κ(2,1).

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι κάθετα.

β) Αν το σημείο Α είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{a}$, Β είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{b}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ΑΒ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι Α(4,-1) και Β(3,2).

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και $|\vec{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}|$.

20. ΘΕΜΑ_4_14970

Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο Μ των δυο ευθειών.

Έστω Μ(1,-2).

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από το Μ.

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

21. ΘΕΜΑ_4_15275

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2,1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. την εξίσωση της.

ii. για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB .

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

22. ΘΕΜΑ_4_15029

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία: $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

