

1. ΘΕΜΑ_2_22059

Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x + 6y = 1$.

α) Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας (ε) .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) .

2. ΘΕΜΑ_2_22171

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): x - y + 1 = 0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους M .

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2) .

γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) .

3. ΘΕΜΑ_2_22072

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ (1) και $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$ (2) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

4. ΘΕΜΑ_2_21162

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, -6)$. Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

5. ΘΕΜΑ_2_21092

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1, 4)$. Η πλευρά $A\Delta$ έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος $B\Delta$ έχει εξίσωση $y = x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1, 1)$.

β) Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.

6. ΘΕΜΑ_2_21662

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B .

β) Να βρείτε:

- i. την εξίσωση της ευθείας (ε') που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην (ε) ,
- ii. το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ε') .
- iii. το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία (ε) .

7. ΘΕΜΑ_2_15986

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$.

- α) i. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$.
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ε) .

8. ΘΕΜΑ_3_15178

Δίνεται η εξίσωση $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

- α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;
- ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;
- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

9. ΘΕΜΑ_4_21652

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες (ε_λ) και (η_λ) αντίστοιχα.
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες (ε_λ) και (η_λ) τέμνονται.
- γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,
 - i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_λ) και (η_λ) ,
 - ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το M κινείται στην ευθεία $(\zeta): x - y = 1$.

10. ΘΕΜΑ_4_15004

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

β) Αν $(\varepsilon_1): 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $(\varepsilon_2): 7x - y - 1 = 0$, είναι $\hat{\varphi} = 45^\circ$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) .

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (ε_3) τέτοιας ώστε η (ε_2) να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_3) .

11. ΘΕΜΑ_4_21160

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0,0)$, $B(\kappa,0)$ και $\Gamma(0,2\kappa)$ όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $O\Gamma B$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $OB\Delta E$ και $O\Gamma ZH$, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και BZ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου $O\Gamma B$ που διέρχεται από το O .

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

12. ΘΕΜΑ_4_18244

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \sqrt{3}x$ και $(\varepsilon_2): y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των (ε_1) , (ε_2) είναι 15° .

δ) Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

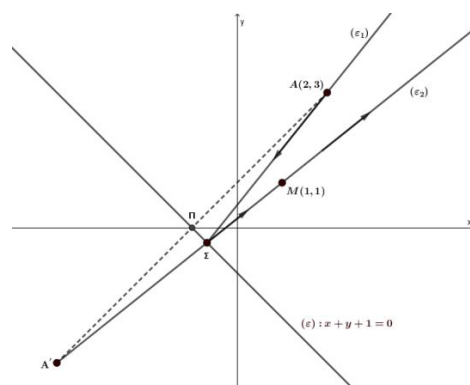
13. ΘΕΜΑ_4_15439

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $(\varepsilon): x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) , είναι το σημείο $A'(-4,-3)$.

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) , η οποία διέρχεται από τα σημεία A' , Σ , M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.



ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε) .

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1) .

14. ΘΕΜΑ_4_16003

Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $(\varepsilon_\alpha): (a-4)x - 2ay + a + 4 = 0, a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $a = 0$ και όταν $a = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M.

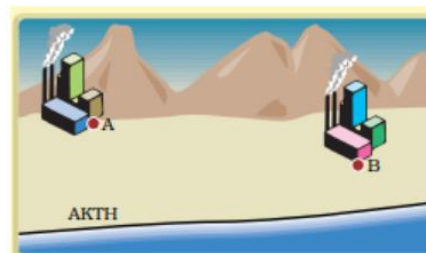
γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0 < a < 4$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του a ισχύει $(OA) = 2(OB)$.

15. ΘΕΜΑ_4_15475

Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2,1), B(4,3)$, βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



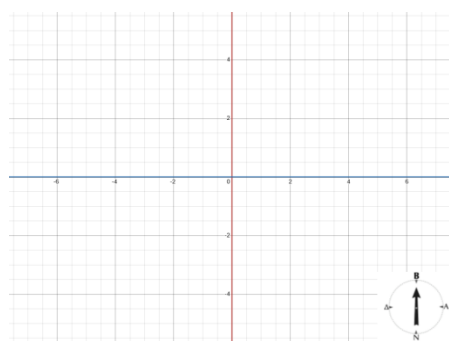
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $(\varepsilon): y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

16. ΘΕΜΑ_4_16477

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\varepsilon_\lambda): \lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$, όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

- β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.

17. ΘΕΜΑ_4_14978

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,3)$.

- α) Αν $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1 , d_2 του M από τα A και B αντίστοιχα.
β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1 , d_2 ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB .
δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο.

18. ΘΕΜΑ_4_15253

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1) όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ , η (1) παριστάνει ευθεία (ε).
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ , οι ευθείες (ε):
i. είναι παράλληλες στον $x'x$.
ii. είναι παράλληλες στον yy' .
iii. διέρχονται από το $(0,0)$.
γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε) που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.