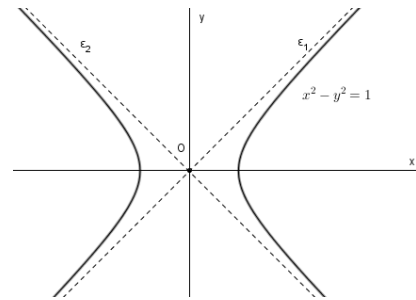


1. ΘΕΜΑ_2_22051

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες (ε_1) και (ε_2) της υπερβολής ότι:

- συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου, αντίστοιχα,
- είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.



2. ΘΕΜΑ_2_21651

Η υπερβολή (C) έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

- Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.
- Να βρείτε την εξίσωση της (C) .
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

3. ΘΕΜΑ_2_21218

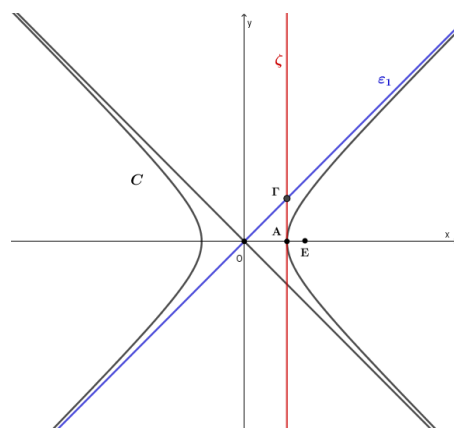
Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1$, $(C_2): y^2 - x^2 = 1$.

- Να αποδείξετε ότι οι εστίες της (C_1) είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.
- Αν E_2, E'_2 οι εστίες της (C_2) τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι τετράγωνο.

4. ΘΕΜΑ_2_20869

Στο σχήμα φαίνονται η υπερβολή $(C): x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E , η εφαπτομένη της (ζ) στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία (ε_1) της υπερβολής.

- Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της υπερβολής.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ζ) .
 - Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.



5. ΘΕΜΑ_2_20721

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της (C).
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της (C).
- γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

6. ΘΕΜΑ_2_21649

Η υπερβολή (C) έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της (C).
- β) τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της (C).
- γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

7. ΘΕΜΑ_2_22566

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

8. ΘΕΜΑ_2_17942

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C).

9. ΘΕΜΑ_2_22567

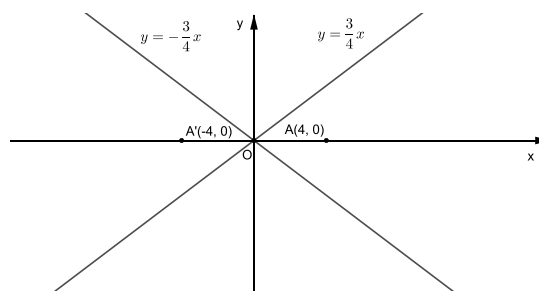
Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή

(C): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία

$A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

- α) Να αποδείξετε ότι:



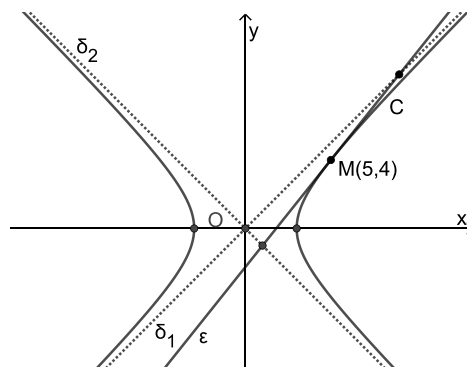
i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$,

ii. οι εστίες της (C) είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή (C) .

10. ΘΕΜΑ_2_22561

Στο σχήμα η υπερβολή (C) έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες (δ_1) και (δ_2) είναι οι ασύμπτωτες της (C) και η (ε) είναι η εφαπτομένη της (C) στο σημείο της $M(5,4)$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι:

$$(\delta_1): y = x \text{ και } (\delta_2): y = -x,$$

ii. η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $(\varepsilon): 5x - 4y = 9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (δ_1) καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (δ_2) .

11. ΘΕΜΑ_2_22559

Η υπερβολή στο σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.

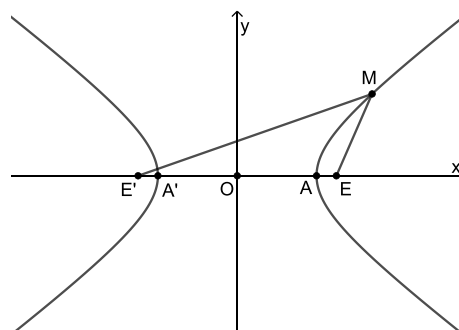
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$.

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' .



12. ΘΕΜΑ_2_22169

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι ίση με 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

13. ΘΕΜΑ_2_22269

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

- i. τις συντεταγμένες των εστιών της ,
- ii. την εκκεντρότητά της ,
- iii. τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$.

14. ΘΕΜΑ_2_22196

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) της υπερβολής.

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15. ΘΕΜΑ_2_16128

Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E.

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

16. ΘΕΜΑ_3_17944

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και

εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$.

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

17. ΘΕΜΑ_4_32206

Η υπερβολή (C) έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της (C).

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

18. ΘΕΜΑ_4_21656

Έστω υπερβολή (C) με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0)$, $A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής (C).

ii. την εξίσωση της υπερβολής (C).

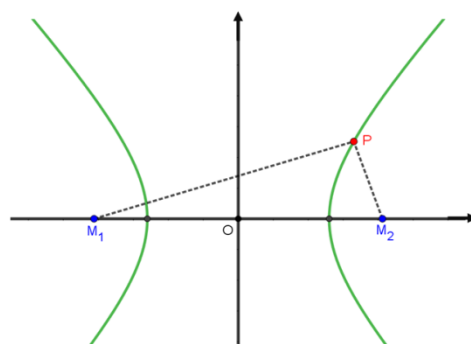
β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτες της (C) και το ορθογώνιο βάσης της (C).

γ) Αν M τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME) - (ME')$.

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της (C), να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

19. ΘΕΜΑ_4_20653

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .



α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1) - (PM_2) = 1.360 \text{ m}$.

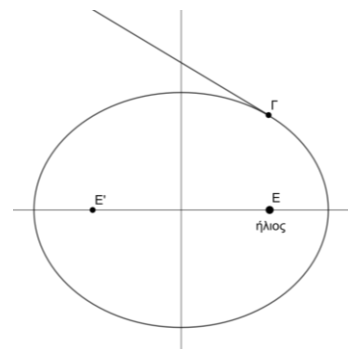
Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec .

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 .

- γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1.378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1.369$.

20. ΘΕΜΑ_4_22174

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.



α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$.

- ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;