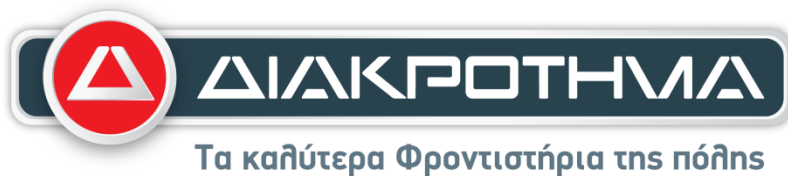


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΟΝΤΟΣ ΧΑΡΗΣ

ΤΑΒΑΝΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΣ



**ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ**



Αγαπάμε τα βιβλία, τα προσέχουμε!

Δεν πιέζουμε τη ράχη του βιβλίου.

**Δεν «πληγώνουμε» τα βιβλία, τσακίζοντας ή
τσαλακώνοντας τις σελίδες τους.**

**Τα βιβλία έχουν τους ίδιους εχθρούς με τον
άνθρωπο: τη φωτιά, την υγρασία, την ανοησία,
το χρόνο και το ίδιο τους το περιεχόμενο.**

Paul Valery

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§1.1 Φυσικοί αριθμοί

Φυσικοί αριθμοί είναι οι 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,...97,98,...1230,1231 κτλ

Είναι οι αριθμοί με τους οποίους δηλώνουμε **πλήθος** ή **σειρά**. Το σύνολο των Φυσικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$.

Ιδιότητες:

A. Ο κάθε φυσικός προκύπτει από τον προηγούμενό του με αύξηση μίας μονάδας

Πχ το 9 προκύπτει αν στο 8 προσθέσουμε το 1. Δύο φυσικοί με αυτή την ιδιότητα λέγονται **διαδοχικοί**.

B. Ο μικρότερος φυσικός είναι το 0, ενώ δεν υπάρχει μεγαλύτερος αφού οποιονδήποτε μπορούμε να τον αυξήσουμε κατά ένα και να πάρουμε τον επόμενο του.

Γ. Οι φυσικοί χωρίζονται στους περιττούς (μονούς) 1,3,5,7,9, κτλ και στους άρτιους (ζυγούς) 2,4,6,8,10, κτλ. **Άρτιοι** είναι αυτοί που διαιρούνται με το 2 και **περιττοί** αυτοί που δεν διαιρούνται.

Δ. Για να γραφεί ο οποιοσδήποτε φυσικός αρκεί να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Η αξία του κάθε ψηφίου αλλάζει αναλόγως της θέσης που κατέχει στον αριθμό

Πχ ο 54 αποτελείται από 5 «δεκάδες» και 4 «μονάδες»

ο 137 αποτελείται από 1 «εκατοντάδα», 3 «δεκάδες» και 7 «μονάδες»

Σύγκριση Αριθμών: Τους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να τους συγκρίνουμε μεταξύ τους και έτσι έχουμε και τη δυνατότητα να τους διατάξουμε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, με αύξουσα δηλαδή σειρά μεγέθους.

Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τα σύμβολα:

$=$ που σημαίνει «**ίσος με**»

$<$ που σημαίνει «**μικρότερος από**» και

$>$ που σημαίνει «**μεγαλύτερος από**»

Πχ $32 < 42$ (αφού το 42 έχει περισσότερες δεκάδες από το 32)

$55 < 155$ (αφού το 155 έχει περισσότερα ψηφία)

$$1234 < 1235 < 1325 < 1532$$

Γενικά όταν συγκρίνουμε δύο φυσικούς, σίγουρα μεγαλύτερος θα είναι αυτός που έχει περισσότερα ψηφία. Αν έχουν τα ίδια, κοιτάμε ποιος έχει περισσότερες πχ χιλιάδες μετά εκατοντάδες και ούτω καθεξής.

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Γράψε με ψηφία τους παρακάτω αριθμούς

α. εννιακόσια τριάντα οκτώ β. χίλια διακόσια έξι γ. τριαντατέσσερις χιλιάδες δεκατρία

2) Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς

α. 56.543 β. 7.543.005 γ. 100.204 δ. 1.010

3) Πόσες μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες και χιλιάδες έχουν οι παρακάτω αριθμοί :

i. 77 ii. 101 iii. 1171 iv. 1745

4) Να συγκριθούν οι αριθμοί και να γραφούν με το κατάλληλο σύμβολο ανάμεσα ($<$, $=$, $>$) :

i. 235 και 236

ii. 12375 και 12348

iii. 101 και 1001

iv. 25034 και 24034

v. 461 και 4

5) Να συγκριθούν οι αριθμοί 808 , 750 , 909 , 990 , 890 και να γραφούν (διαταχθούν) από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο «<»

6) Να γράψετε : α) τους περιττούς αριθμούς που είναι ανάμεσα στο 75 και το 88

β) τους άρτιους αριθμούς που είναι ανάμεσα στο 62 και το 81.

γ) τους άρτιους ανάμεσα στο 923 και στο 929

7) Να γράψετε τους τρεις επόμενους αριθμούς του 15136.

Β' ομάδα

- 1) Να βρείτε ποιός είναι ο μικρότερος και ποιός ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός
α) Με δύο ψηφία

β) Με τρία ψηφία
- 2) Με τα ψηφία 5,3,7 πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να γράψουμε ώστε να έχουν διαφορετικά ψηφία;
- 3) Πόσοι είναι όλοι οι τριψήφιοι αριθμοί ;
- 4) Να γράψετε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που τα ψηφία τους είναι 0,3,8 και στη συνέχεια να τους συγκρίνετε.

Στρογγυλοποίηση αριθμών:

Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό:

- Προσδιορίζουμε την τάξη (χιλιάδα, εκατοντάδα, δεκάδα) που θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
- Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης και :

Α) Αν αυτό είναι μικρότερο του 5 (δηλ. 0,1,2,3,4) τότε αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι μέχρι την τάξη που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα ψηφία του.

Β) Αν αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5 (5,6,7,8,9) τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο της τάξης που γίνεται στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά τα επόμενα ψηφία του αριθμού.

Πχ. στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη δεκάδα:

1234 → 1230

1237 → 1240

στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη εκατοντάδα:

1234 → 1200 , 1237 → 1200 ενώ

1284 → 1300

Ασκήσεις

Α' ομάδα

- 1) Να στρογγυλοποιηθούν οι παρακάτω αριθμοί στην πλησιέστερη δεκάδα :
 i. 32 ii. 81 iii. 603
 iv. 396 v. 822 vi. 986
 vii. 522 viii. 863
- 2) Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη εκατοντάδα :
 i. 86 ii. 248 iii. 395
 iv. 537 v. 837 vi. 4153
 vii. 5585 viii. 4875
- 3) Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 8888 στην πλησιέστερη :
 i. δεκάδα ii. εκατοντάδα iii. χιλιάδα
- 4) Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 16.527.032 στις πλησιέστερες :
 i. δεκάδες ii. εκατοντάδες iii. δεκάδες χιλιάδες iv. εκατομμύρια

Β' ομάδα

- 1) Να βρείτε τους διψήφιους φυσικούς αριθμούς που όταν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη δεκάδα γίνονται ίσοι με 100.
- 2) Να βρείτε τους διψήφιους φυσικούς αριθμούς που όταν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη δεκάδα γίνονται ίσοι με 70.
- 3) Να βρείτε τους τριψήφιους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι του 1000, τους οποίους όταν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη εκατοντάδα γίνονται ίσοι με 1000.
- 4) Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε με στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη δεκάδα ο αριθμός 35..8 να γίνει 3670
 Ομοίως με στρογγυλοποίηση στην εκατοντάδα ο 1..67 να γίνει 1400.

§1.2 Πράξεις

Πρόσθεση: Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται **άθροισμα** των αριθμών αυτών και οι αριθμοί λέγονται **προσθετέοι**.

Ιδιότητες

A) «Ουδέτερο στοιχείο» το 0 όταν προστεθεί σε έναν αριθμό δεν αλλάζει αποτέλεσμα $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

πχ. $5 + 0 = 5$

B) Αντιμεταθετική Ιδιότητα

Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά δύο προσθετέων ενός αθροίσματος και να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Πχ. $5 + 3 = 8 = 3 + 5$.

Γ) Προσεταιριστική Ιδιότητα

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε έναν προσθετέο σε άθροισμα $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

Πχ. $4 + (6 + 3) = (4 + 6) + 3$.

Αφαίρεση: Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης δυο αριθμών λέγεται **Διαφορά** και οι αριθμοί που αφαιρούνται λέγονται ο πρώτος **Μειωτέος** και ο δεύτερος **Αφαιρετέος**, δηλαδή: $M - A = \Delta$.

Παρατηρήσεις:

1. Για να είναι δυνατή η αφαίρεση στους φυσικούς αριθμούς θα πρέπει ο μειωτέος να είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αφαιρετέο.
2. Μπορούμε να επαληθεύσουμε την αφαίρεση με τον τύπο: $A + \Delta = M$.

Πολλαπλασιασμός: Είναι η πράξη κατά την οποία από δύο φυσικούς α , β που τους λέμε παράγοντες, βρίσκουμε έναν τρίτο γ που είναι το γινόμενό τους. $\alpha \cdot \beta = \gamma$

Ιδιότητες

Α) «Ουδέτερο στοιχείο» το **1** όταν πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό δεν το μεταβάλλει $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

Πχ. $6 \cdot 1 = 1 \cdot 6 = 6$

Β) Αντιμεταθετική Ιδιότητα

Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου, χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

Πχ. $5 \cdot 6 = 30 = 6 \cdot 5$

Γ) Προσεταιριστική Ιδιότητα

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύσουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο. Συγκεκριμένα $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

Πχ. $5 \cdot (4 \cdot 3) = 60 = (5 \cdot 4) \cdot 3$

Δ) Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{ή} \quad \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

Ε) Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την αφαίρεση

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma \quad \text{ή} \quad \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta - \gamma)$$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Να γίνουν οι πράξεις :

- α) i. $88+25$ ii. $873+438$ iii. $2137+803$ iv. $4735+3948$
 β) i. $85-63$ ii. $375-218$ iii. $1359-913$ iv. $7160-3295$
 γ) i. $78 \cdot 30$ ii. $459 \cdot 162$ iii. $5142 \cdot 137$ iv. $130 \cdot 400$

2) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά εφαρμόζοντας τους κανόνες του πολλαπλασιασμού με 10, 100, 1000 κλπ.

- i. $35 \cdot \dots = 350$ ii. $63 \cdot \dots = 6300$ iii. $100 \cdot \dots = 10000$
 iv. $6145 \cdot \dots = 61450$ v. $100 \cdot \dots = 12000$ vi. $10 \cdot \dots = 2150$
 vii. $125 \cdot \dots = 1250000$ viii. $1000 \cdot \dots = 364000000$ ix. $5 \cdot \dots = 5000$

3) Να κάνετε με δύο τρόπους τις παρακάτω πράξεις :

- i. $3(2+7)$ ii. $4(8-2)$ iii. $(10-3)5$ iv. $(5+3)6$
 v. $2 \cdot 8 + 2 \cdot 7$ vi. $5 \cdot 6 - 5 \cdot 4$ vii. $12 + 3 \cdot 5$ viii. $30 \cdot 30 - 30 \cdot 20$
 ix. $18 - 2 \cdot 6$

4) Υπολογίστε τα παρακάτω γινόμενα χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

- i. $7 \cdot 43$
 ii. $8 \cdot 27$
 iii. $24 \cdot 55$
 iv. $34 \cdot 99$
 v. $58 \cdot 75$
 vi. $43 \cdot 101$
 vii. $102 \cdot 11$

Υπόδειξη: αναλύστε έναν από τους δύο παράγοντες σε άθροισμα αριθμών «βολικών» για τον πολλαπλασιασμό πχ $101 = 100 + 1$

5) Η Κατερίνα γεννήθηκε το 1989 και είναι 27 χρόνια μικρότερη από τον πατέρα της. Να βρείτε:

α) Πόσων χρονών είναι σήμερα η Κατερίνα

β) Πόσων χρονών είναι ο πατέρας της, και

γ) Πότε γεννήθηκε ο πατέρας της

Β' ομάδα

- 1) Έχουμε τρεις αριθμούς. Ο πρώτος είναι ο 236, ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος του πρώτου κατά 58 και ο τρίτος είναι ίσος με το άθροισμα αυτών των δύο . Να βρείτε το άθροισμα τους.
- 2) Έχουμε τρεις αριθμούς. Ο πρώτος είναι ο 42, ο δεύτερος είναι κατά 9 μικρότερος του πρώτου και ο τρίτος είναι ίσος με το γινόμενο αυτών των δύο. Να βρείτε το γινόμενό τους.
- 3) Τρία αδέλφια ο Γιάννης, η Ντίνα και ο Χρήστος, κληρονόμησαν από ένα μακρινό συγγενή 174600 ευρώ. Όμως ο Χρήστος και η Ντίνα πήραν μαζί 100400 ευρώ και ο Γιάννης πήρε 14600 ευρώ περισσότερα από την Ντίνα. Να βρείτε πόσα χρήματα κληρονόμησε ο καθένας τους.
- 4) Μια βιβλιοθήκη έχει 8 ορόφους. Οι 5 από αυτούς έχουν 56 ράφια με χωρητικότητα 20 βιβλίων το καθένα, ενώ οι υπόλοιποι έχουν 72 ράφια με χωρητικότητα 32 βιβλίων το καθένα. Πόσα βιβλία χωράει η βιβλιοθήκη ;

§1.3 Δυνάμεις αριθμών

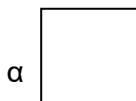
Έστω ότι a είναι ένας αριθμός, τότε το γινόμενο $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$ που έχει n παράγοντες ίσους με a (δηλαδή a επί a επί a .. n φορές), λέγεται **νιοστή δύναμη του a** ή **δύναμη με βάση το a και εκθέτη n** , και συμβολίζεται a^n (άλφα στη νιοστή).

- Ο αριθμός a λέγεται **βάση της δύναμης** ενώ ο n λέγεται **εκθέτης**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}} = a^{\overset{n \rightarrow \text{εκθέτης}}{\downarrow}}$$

βάση

- Η **δύναμη** του αριθμού στη **δευτέρα**, δηλαδή το $4^2 + 5^2$ λέγεται και **τετράγωνο** του a , (γιατί παριστάνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά a).



- Η **δύναμη** του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το a^3 λέγεται και **κύβος** του a , (γιατί παριστάνει τον όγκο ενός κύβου πλευράς a).
- Το a^1 που ονομάζεται **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού a , είναι ο ίδιος ο αριθμός a .
Πχ $3^1 = 3$, $15^1 = 15$ κ.ο.κ.

- Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το 1^n είναι όλες ίσες με 1
Δηλαδή $1^n = 1^{235} = \dots = 1^{10} = 1$

Προσοχή!!!

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ φορές}} \neq \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

$$\text{γιατί } \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ φορές}} = n \cdot a \quad \text{ενώ} \quad \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}} = a^n$$

Προτεραιότητα πράξεων

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Η σειρά με την οποία πρέπει να γίνονται οι πράξεις είναι η ακόλουθη:

- 1) **Αν υπάρχουν** παρενθέσεις, πρώτα τις πράξεις μέσα σε αυτές
- 2) Υπολογισμός **δυνάμεων**
- 3) Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων**
- 4) Εκτέλεση **προσθέσεων και αφαιρέσεων**.

Δυνάμεις του 10

Η νιοστή δύναμη του 10 είναι ίση με τον αριθμό που προκύπτει, όταν δεξιά του 1 γράψουμε ν μηδενικά.

Π.χ.

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \text{ κτλ}$$

Ανάπτυγμα αριθμού σε δυνάμεις του 10

Με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10 μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς στην αναπτυγμένη τους μορφή.

Π.χ.

$$\begin{aligned} 1745 &= 1 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

- 1) Να υπολογιστούν το τετράγωνο, ο κύβος, η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του 10 (σχολικό σελ. 21). Τι παρατηρείτε;
- 2) Να γραφεί το ανάπτυγμα του αριθμού 12.665 με χρήση δυνάμεων του 10
- 3) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις : 3^4 , 5^3 , 6^2 , 7^3 , 8^4 , 1^2 , 1^3 , 1^5 , 1^{10} , 1^{200}
- 4) Γράψτε με τη μορφή δυνάμεων τα γινόμενα
(α) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, (β) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, (γ) $5 \cdot 5 \cdot 5$ (δ) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, (ε) $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, (στ) $\alpha \cdot \alpha \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

- 5) Να συγκρίνετε :

Τη δύναμη 2^3 με το γινόμενο $3 \cdot 2$

Τη δύναμη 4^2 με το γινόμενο $2 \cdot 4$

Τη δύναμη 3^1 με το γινόμενο $1 \cdot 3$

Τη δύναμη 5^3 με το γινόμενο $3 \cdot 5$

Τη δύναμη 6^1 με το γινόμενο $1 \cdot 6$

Ποιό είναι το συμπέρασμά σας;

- 6) Να γράψετε σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα :

i. $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$

ii. $2x + 2x + 2x + 2x$

iii. $\alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta$

iv. $(x+y) + (x+y) + (x+y)$

v. $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

vi. $(2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$

vii. $(\alpha\beta) (\alpha\beta) (\alpha\beta)$

viii. $(x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y)$

- 7) Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις

i. $(4 + 5)^2$ και $4^2 + 5^2$

ii. $(4 + 7)^3$ και $4^3 + 7^3$ τι παρατηρείτε;

Β' ομάδα

- 1) Να γράψετε σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα

i. $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$

ii. $3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5$

iii. $5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 5 \cdot 5 \cdot x$

iv. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)$

2) Να γραφούν οι παρακάτω αριθμοί ως αναπτύγματα δυνάμεων του 10

- i. 34.720
- ii. 156.237
- iii. 1.333
- iv. 1.550.225

3) Να γράψετε με μορφή δύναμης καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς :

- i. 16 ii. 25 iii. 64
- iv. 8 v. 27 vi. 1000

4) Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις:

- i. $2^3(5-2)^2 + 4 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot 3 + (2^3 - 3)^2$
- ii. $5(3^2 - 2)^2 + 3(5^2 - 2^4)^2 - (10^2 - 8^2)$
- iii. $3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot (2^3 - 8)$.

§1.4 Ευκλείδεια διαίρεση - διαιρετότητα

Αν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ (διααιρετέος) και ο δ (διαιρέτης), τότε θα υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί, ο π (ακέραιο πηλίκο ή πηλίκο) και ο u (υπόλοιπο) ώστε να είναι

$$\Delta = \delta \cdot \pi + u$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ευκλείδεια διαίρεση.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

- Το υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο του διαιρέτη. Δηλαδή $u < \delta$.
- Αν το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν τότε λέμε ότι έχουμε **τέλεια διαίρεση** και θα ισχύει $\Delta = \delta \cdot \pi$
- Ο διαιρέτης δ **δεν μπορεί να είναι 0**
- Όταν $\Delta = \delta$ τότε το $\pi = 1$
- όταν ο διαιρέτης είναι $\delta = 1$ τότε το $\pi = \Delta$
- Όταν ο διααιρετέος $\Delta = 0$ τότε και το πηλίκο $\pi = 0$

Σημείωση : στους φυσικούς αριθμούς η τέλεια διαίρεση είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού, όπως και η αφαίρεση είναι αντίστροφη της πρόσθεσης.

Παραδείγματα:

i.

$$\begin{array}{r|l} 732 & 51 \\ 222 & 14 \\ \hline =18 & \end{array}$$

δοκιμή

51 ← διαιρέτης

18 < 51

* 14 ← πηλίκο

204

διαιρετέος

+ 51

↓

714

714 + 18 = 732

↑

Υπόλοιπο

ii. $0:10=0$ (διαιρετέος ίσος με μηδέν)

iii. $576:576=1$ (διαιρετέος ίσος με τον διαιρέτη)

iv. $345:1=345$ (διαιρέτης ίσος με τη μονάδα)

v. ~~23:0~~ **δεν διαιρούμε ποτέ με το 0!!!**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

1) Να κάνετε τις παρακάτω ευκλείδειες διαιρέσεις με τις δοκιμές τους :

- i. $54:7$ ii. $82:4$ iii. $128:14$ iv. $342:19$
 v. $205:20$ vi. $17823:3$ vii. $182:13$ viii. $2213:30$

2) Δίνονται οι ισότητες :

- i. $26=3 \cdot 8+2$ ii. $20=3 \cdot 5+5$ iii. $34=6 \cdot 5+4$
 iv. $173=9 \cdot 18+11$ v. $306=17 \cdot 18$ vi. $143=11 \cdot 12+11$
 vii. $93=8 \cdot 10+13$

Να βρείτε ποιές από αυτές εκφράζουν ευκλείδειες διαιρέσεις.

3) Αν ο α είναι φυσικός αριθμός, να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

- i. $\alpha : 2$ ii. $\alpha : 3$ iii. $\alpha : 6$ iv. $\alpha : 9$

(θυμόμαστε ότι $u < \delta$)

4) α) Σε πόσες εξάδες μπορούμε να παρατάξουμε τους 357 μαθητές ενός σχολείου ;

β) Πόσες δωδεκάδες σχηματίζουν 119 αυγά ;

γ) Σε πόσα κιβώτια των 24 θέσεων μπορούμε να τοποθετήσουμε 516 μπουκάλια αναψυκτικού ;

δ) Πόσα πακέτα μακαρόνια θα αγοράσουμε με 52,8 ευρώ αν το ένα πακέτο κοστίζει 1,2 ευρώ.

5) Να προσδιορίσετε το διαιρετέο ή το διαιρέτη σε καθεμία από τις παρακάτω ισότητες :

- i. $\Delta : 4=5$ ii. $\Delta : 8=5$ iii. $\Delta : 15=0$
 iv. $10: \delta=2$ v. $28: \delta=4$ vi. $7 : \delta=1$

Β' ομάδα

1) Το πηλίκο μιας διαίρεσης είναι 5 και το υπόλοιπο είναι 7. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του διαιρέτη.

2) Ποιοι είναι οι διαιρέτες των διαιρέσεων που έχουν :

- i. $\Delta=45$, $\pi=7$ και $u=3$
 - ii. $\Delta=148$, $\pi=8$ και $u=4$
- 3) Δίνεται η ισότητα $a=18\beta+20$ με $\beta \neq 0$.
 α) είναι το 20 το υπόλοιπο της διαίρεσης $a : 18$;
 β) ποια είναι η μικρότερη τιμή του φυσικού β , ώστε το 20 να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $a : \beta$;
- 4) Αν ο a είναι φυσικός αριθμός να βρείτε :
 α) όλα τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $a : 6$
 β) τους φυσικούς αριθμούς a οι οποίοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν πηλίκο 5.
- 5) Αν σήμερα είναι Πέμπτη τι μέρα θα είναι μετά από 284 μέρες;
- 6) Να βρεθεί ο αριθμός που όταν διαιρείται με το 12 δίνει πηλίκο 11 και υπόλοιπο 7

§1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a , ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό a με όλους τους φυσικούς διαδοχικά.

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλον είναι πολλαπλάσιο αυτού.
 Πχ: το 21 διαιρείται από το 3 άρα το 21 είναι πολλαπλάσιο του 3.
- Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσια αυτού. Πχ: το 4 διαιρεί το 16 άρα θα διαιρεί και το 32 και το 48 κ.ο.κ.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων αριθμών ονομάζουμε το μικρότερο και μη μηδενικό από τα κοινά τους πολλαπλάσια. Λέμε «μη μηδενικό» γιατί αλλιώς για οποιουδήποτε αριθμούς το ΕΚΠ θα ήταν πάντα το 0.

Μέθοδος εύρεσης ΕΚΠ (βλέπε εφαρμογή σελ.27 σχολικού)

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8.

Ξεκινάμε γράφοντας στη σειρά ή σε στήλες τα πολλαπλάσια τους

Πολλαπλάσια 5: 0 5 10 15 20 25 30 35 **40** 45 50

Πολλαπλάσια 8: 0 8 16 24 32 **40** 48 64 72 80 88

Αμέσως μετά κοιτάμε ποιος είναι εκείνος ο αριθμός (εκτός του 0) που είναι ο πρώτος (δηλαδή ο μικρότερος) κοινός και για τους δύο αριθμούς. Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι είναι το 40. Άρα λέμε ότι το ΕΚΠ των 5 και 8 είναι το 40.

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν

(όταν λέμε «διαιρούν» εννοούμε τέλεια). Αυτό φυσικά σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί έχουν τον α ως πολλαπλάσιο τους.

Π.χ.

ο αριθμός 10 προκύπτει από τα γινόμενα

$$1 \cdot 10 = 10$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

Οι διαιρέτες του επομένως είναι οι αριθμοί 1, 2, 5, 10.

- Οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 1 και έχουν μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό τους και το 1 ονομάζονται **πρώτοι**. (Βλέπε «κόσκινο του Ερατοσθένη» σελ. 29 σχολικού)

Π.χ.

Διαιρέτες του 3 είναι το 1 και το 3, γιατί μόνο $1 \cdot 3 = 3$.

Άλλοι πρώτοι αριθμοί είναι οι 5, 7, 11... που είναι περιττοί και ο 2 που είναι ο μοναδικός άρτιος πρώτος αριθμός.

- Όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί που έχουν και άλλους διαιρέτες, εκτός από τον εαυτό τους και το 1, ονομάζονται **σύνθετοι**.

Κοινοί διαιρέτες λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν ταυτόχρονα δύο ή περισσότερους φυσικούς

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) δύο φυσικών α και β θα ονομάζεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες και θα συμβολίζεται **ΜΚΔ(α , β)**.

Μέθοδος εύρεσης ΜΚΔ(α , β)

Ποιος είναι ο ΜΚΔ των 15 και 18;

Γράφουμε στη σειρά τους διαιρέτες των δύο αριθμών

Διαιρέτες του 15 : 1 3 5 15

Διαιρέτες του 18 : 1 2 3 6 9 18

Από τους κοινούς επιλέγουμε τον μεγαλύτερο. Αυτός είναι ο ΜΚΔ.

Κοινοί : 1,3

ΜΚΔ(15,18)=3

→ Δύο αριθμοί που έχουν ΜΚΔ=1 λέγονται **πρώτοι** μεταξύ τους.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Κάθε σύνθετο αριθμό μπορούμε να τον αναλύσουμε σε **γινόμενο_πρώτων παραγόντων**.

Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σύνθετο αριθμό και να τον γράψουμε σαν γινόμενο δύο παραγόντων, διάφορων του 1.

Αν κάθε σύνθετο παράγοντα αυτού του γινομένου τον γράψουμε πάλι σαν γινόμενο δύο παραγόντων διάφορων του 1 και συνεχίσουμε αυτήν την εργασία, θα καταλήξουμε σε γινόμενα που θα έχουν μόνο πρώτους παράγοντες.

(Βλέπε εφαρμογή 2 σελ.28 σχολικού)

Γενικά :

Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός αναλύεται κατά ένα μόνο τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων , ανεξάρτητα από τα γινόμενα που θα επιλέξουμε για να τον αναλύσουμε .

Π.χ.

$$\begin{array}{lll}
 64=2 \cdot 32 & \text{ή} & 64=4 \cdot 16 & \text{ή} & 64=8 \cdot 8 \\
 64=2 \cdot 2 \cdot 16 & & 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 & & 64=2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \\
 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 & & 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 & & 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 & & 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 & & 64=2^6 \\
 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 & & 64=2^6 & & \\
 64=2^6 & & & &
 \end{array}$$

→ Αυτό που χρειάζεται για να ξεκινήσουμε κάθε φορά την ανάλυση είναι να βρίσκουμε τον μικρότερο πρώτο παράγοντα του αριθμού που θέλουμε να αναλύσουμε και σ' αυτό μας βοηθούν τα κριτήρια διαιρετότητας.

Μέθοδοι για την ανάλυση ενός αριθμού :

ι. Διαδοχικές διαιρέσεις.

Η ανάλυση τελειώνει όταν το τελευταίο πηλίκο είναι η μονάδα.

Π.χ.

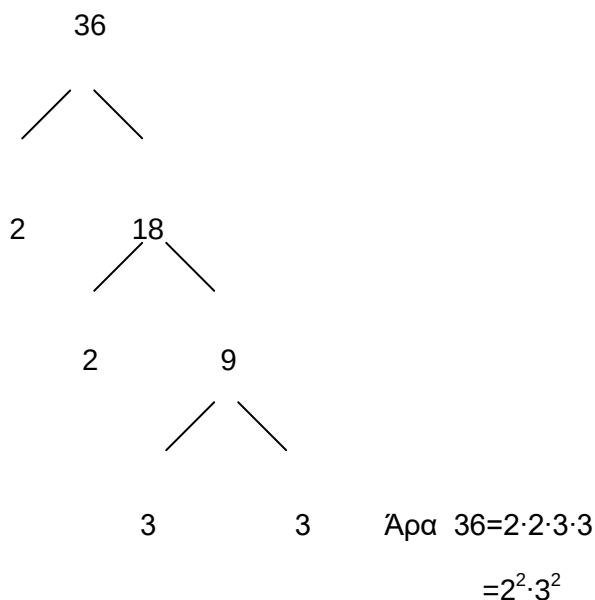
$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{Άρα } 36=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$=2^2 \cdot 3^2$$

ii. **Δενδροδιάγραμμα.**

Η ανάλυση τελειώνει όταν όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.



→ Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βοηθάει στην εύρεση του ΕΚΠ και του ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών.

Π.χ.

36		2
18		2
9		3
3		3
1		

Άρα $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

40		2
20		2
10		2
5		5
1		

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$

$\text{ΕΚΠ}(36,40) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ και $\text{ΜΚΔ}(36,40) = 2^2 = 4$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Κριτήρια διαιρετότητας λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να διακρίνουμε αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2 , 3, 4, 5 , 9 , 10 ή 25**.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0,2,4,6 ή 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25 αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό ο οποίος διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με 10,100,1000 κλπ. αν λήγει σε ένα, δύο , τρία κλπ. μηδενικά αντίστοιχα

Παραδείγματα:

i. $36 : 2$

Το 36 διαιρείται με το 2 γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι το 6

$$36 : 2 = 18$$

ii. $155 : 5$

Το 155 διαιρείται με το 5 γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι το 5

$$155 : 5 = 31$$

iii. $168 : 3$

Το άθροισμα των ψηφίων του 168 είναι $1+6+8=15$. Το 15 διαιρείται με το 3 άρα και το 168 διαιρείται με το 3.

$$1296 : 9$$

Το άθροισμα των ψηφίων του 1296 είναι $1+2+9+6=18$. Το 18 διαιρείται με το 9 άρα και το 1296 διαιρείται με το 9.

$$1296 : 9 = 144$$

iv. $1732 : 4$

Το 1732 διαιρείται με το 4 γιατί τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό ο οποίος διαιρείται με το 4

950 : 25

Ανάλογα και το 950 διαιρείται με το 25

ν. $32500 : 10$ αλλά και $32500 : 100$ γιατί λήγει σε ένα και δύο 0 αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

1) Να βρείτε τα πολλαπλάσια του 12 που είναι :

- i. Μικρότερα του 65
- ii. Μεταξύ του 50 και του 78

2) Να βρείτε το ΕΚΠ των αριθμών :

- i. 2 και 6 iv. 2,3 και 4
- ii. 4 και 5 v. 5,10 και 15
- iii. 3 και 8 vi. 6,9 και 12

3) Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β είναι $\text{ΕΚΠ}(\alpha, \beta)=15$ να γράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των α, β που είναι μικρότερα του 80.

4) Δίνονται οι αριθμοί 2,3,4,8,13 και 26.

- i. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι ;
- ii. Ποιοι από αυτούς είναι σύνθετοι ;
- iii. Να βρείτε τα ζεύγη των αριθμών που είναι πρώτοι μεταξύ τους.

5) Να γράψετε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών :

- i. 12,18 ii. 15, 20 iii. 18,30
- iv. 3,5 v. 5,15,40 vi. 8, 24, 30

6) Να βρείτε τον ΜΚΔ των αριθμών :

- i. 24 και 30 ii. 32, 48 και 64

7) Ο ΜΚΔ δύο αριθμών είναι το 18. Να αποδείξετε ότι έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες.

8) Ποιοι από τους αριθμούς : 72 81 105 330 150
172 375 372 664 156 διαιρούνται :

- i. Με το 2 ii. Με το 3 iii. Με το 4
iv. Με το 5 v. Με το 9 vi. Με το 25
vii. Με το 10

Για κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 9) α) Στον αριθμό 82... να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο, ώστε να προκύψει αριθμός που να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 3.
β) Ο αριθμός 3...5 είναι τριψήφιος. Να συμπληρώσετε το κενό με έναν άρτιο αριθμό, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 3 και το 5.

10) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς :

- i. 81 , 27
ii. 24 , 720
iii. 12 , 156

και στη συνέχεια να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ τους.

Β' ομάδα

- 1) Ο αριθμός των σελίδων ενός βιβλίου βρίσκεται μεταξύ του 100 και του 150. Όταν μετράμε τις σελίδες του ανά 5 ή 6 δεν περισσεύει καμία. Να βρείτε τον αριθμό των σελίδων του βιβλίου.
- 2) Όταν οι μαθητές μιας τάξης τοποθετούνται ανά εξάδες ή δωδεκάδες ή δεκαπεντάδες δεν περισσεύει κανένας. Αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών βρίσκεται μεταξύ του 170 και του 200, να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.
- 3) Δίνονται τρεις πρώτοι αριθμοί, οι 11, 13 και 37. Να εξετάσετε :
i. Αν το άθροισμα τους είναι πρώτος αριθμός
ii. Αν το γινόμενό τους είναι πρώτος αριθμός

- 4) Έχουμε 60 τετράδια, 30 βιβλία και 90 μολύβια. Πόσα, το πολύ, δέματα μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτά και πόσα τετράδια, βιβλία και μολύβια θα περιέχει το κάθε δέμα;
- 5) Να δικαιολογήσετε γιατί όταν ένας αριθμός x διαιρείται με το 10, θα διαιρείται με το 2 και με το 5.
- 6) Να προσδιορίσετε τα ψηφία α και β στον αριθμό $34\alpha\beta$ ώστε να προκύψει αριθμός που να διαιρείται με το 2 και το 9.

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§2.1 Η έννοια του κλάσματος

Κλάσμα ονομάζεται κάθε αριθμός της μορφής $\frac{\lambda}{\nu}$, όπου λ, ν φυσικοί αριθμοί, και παριστάνει μέρος ενός μεγέθους.

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\text{μερη_που_πηραμε}}{\text{σε_ποσα_ισα_μερη_χωρισαμε}}$$

Ο αριθμός λ λέγεται **αριθμητής**, ενώ ο αριθμός ν λέγεται **παρονομαστής** του κλάσματος.

Π.χ.



Το κλάσμα $\frac{2}{5}$ συμβολίζει ότι έχουμε πάρει τα 2 από τα 5 ίσα κομμάτια.

Σε αυτήν την περίπτωση και γενικότερα όταν ο αριθμητής του κλάσματος είναι μικρότερος του παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι ένας αριθμός μικρότερος του 1.

- Εάν ο αριθμητής του κλάσματος είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.
- Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δε μπορεί να είναι μηδέν. Δεν έχει νόημα να πούμε ότι χωρίζουμε ένα μέγεθος σε μηδέν ίσα μέρη.
- Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωριστεί σε ν ίσα μέρη, το καθένα από αυτά ονομάζεται **νιοστό** και γράφεται $\frac{1}{\nu}$.
- Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από κ τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ και διαβάζεται

«κάπα νιοστά». Πχ. Το κλάσμα $\frac{2}{5}$ διαβάζεται «δύο πέμπτα», ενώ το $\frac{1}{7}$ «ένα έβδομο».

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν κλάσμα με παρονομαστή το 1.

$$\text{Π.χ. } 7 = \frac{7}{1}$$

Γενικά κάθε κλάσμα είναι το πηλίκο της διαίρεσης(παριστάνει μια διαίρεση) που έχει διαιρετέο τον αριθμητή του κλάσματος και διαιρέτη τον παρονομαστή του κλάσματος. Δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$$

Π.χ.

$$\frac{3}{5} = 3 : 5, \quad \frac{10}{2} = 10 : 2 = 5 \quad \text{κτλ}$$

- ✓ όταν οι όροι ενός κλάσματος είναι ίσοι, τότε το κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα.

$$\frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Π.χ.

$$\frac{9}{9} = 1$$

→ Τα προβλήματα στα οποία θα μας ζητάνε να υπολογίσουμε τι μέρος κάποιου μεγέθους παριστάνει ένα κλάσμα, τα λύνουμε ως εξής :

Βρίσκουμε τι αντιπροσωπεύει το ένα από τα ίσα μέρη που χωρίσαμε το μέγεθος και ύστερα βρίσκουμε τι αντιπροσωπεύουν τα πολλά μέρη του μεγέθους.(Βλέπε εφαρμογή 3 σελ. 36)

Π.χ.

Να βρεθεί πόσες ώρες είναι τα $\frac{8}{12}$ της ημέρας;

Η ημέρα έχει 24 ώρες, επομένως το $\frac{1}{12}$ της ημέρας είναι $24 : 12 = 2$ ώρες.

Άρα τα $\frac{8}{12}$ θα είναι $8 \cdot 2 = 16$ ώρες.

→ Στα προβλήματα που μας δίνεται η τιμή ενός μέρους και ψάχνουμε την αξία του όλου, χρησιμοποιούμε την μέθοδο της «**αναγωγής στη μονάδα**».

Υπολογίζουμε δηλαδή πρώτα την τιμή της μονάδας και ύστερα την αξία του ολόκληρου ή μέρους του μεγέθους. (Βλέπε εφαρμογή 4 σελ.36)

Π.χ.

Αν τα $\frac{4}{7}$ των μαθητών μιας τάξης είναι 32 μαθητές, να βρείτε :

α) πόσους μαθητές έχει η τάξη

β) πόσοι μαθητές είναι τα $\frac{6}{7}$ αυτών ;

Αφού τα $\frac{4}{7}$ των μαθητών είναι 32 μαθητές, το $\frac{1}{7}$ είναι $32 : 4 = 8$ μαθητές (τιμή μονάδας).

α) Επομένως, η τάξη δηλ. τα $\frac{7}{7}$ των μαθητών είναι $8 \cdot 7 = 56$

β) τα $\frac{6}{7}$ των μαθητών αυτών είναι $8 \cdot 6 = 48$

Π.χ.

Εάν σε μία τάξη τα $\frac{3}{5}$ των παιδιών είναι κορίτσια και τα αγόρια είναι 12, πόσα είναι συνολικά τα παιδιά της τάξης;

Αφού τα κορίτσια είναι τα $\frac{3}{5}$ των παιδιών, τα αγόρια θα είναι τα $\frac{2}{5}$. Άρα τα $\frac{2}{5}$ των μαθητών είναι 12. Επομένως το $\frac{1}{5}$ των μαθητών θα είναι $12 : 2 = 6$ μαθητές.

Άρα το σύνολο των μαθητών, τα $\frac{5}{5}$ δηλ. θα είναι $6 \cdot 5 = 30$ μαθητές.

Και τα κορίτσια θα είναι $6 \cdot 3 = 18$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

- 1) Να εκφράσετε με κλάσμα :
 α) τα 15 min της ώρας
 β) τις 3 ημέρες της εβδομάδας
 γ) τις 7 ημέρες του μήνα (30 ημέρες)

- 2) Τί μέρος του χιλιομέτρου είναι :
 α) τα 300 μέτρα β) τα 500 μέτρα γ) τα 250 μέτρα

- 3) Τί μέρος του 1 μήνα (30 ημέρες) είναι :
 α) οι 5 ημέρες β) οι 10 ημέρες γ) οι 15 ημέρες

- 4) Να βρείτε πόσα g είναι :
 α) το $\frac{1}{2}$ του κιλού β) τα $\frac{2}{5}$ του κιλού γ) τα $\frac{3}{4}$ του κιλού

- 5) Πόσοι μήνες είναι :
 α) τα $\frac{2}{3}$ του έτους β) τα $\frac{4}{6}$ του έτους γ) τα $\frac{4}{12}$ του έτους

- 6) Να βρείτε πόσα cm είναι :
 α) το $\frac{1}{2}$ του μέτρου β) τα $\frac{3}{4}$ του μέτρου γ) το $\frac{1}{10}$ του μέτρου

- 7) Να βρείτε με πόσο ισούται καθένα από τα παρακάτω κλάσματα :
 α) $\frac{5}{1}$ β) $\frac{3}{3}$ γ) $\frac{0}{5}$ δ) $\frac{8+0}{8}$ ε) $\frac{12-3}{9}$

8) Να βρείτε με ποιόν φυσικό είναι ίσο καθένα από τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{6}{3}$ β) $\frac{24}{6}$ γ) $\frac{72}{6}$ δ) $\frac{81}{9}$

Β' ομάδα

1) Μια τάξη έχει 42 μαθητές. Μια ημέρα απουσιάζουν οι 7 μαθητές, να βρείτε :
α) το κλάσμα που εκφράζει το μέρος των μαθητών που απουσιάζουν

β) το κλάσμα που εκφράζει το μέρος των μαθητών που ήταν παρόντες.

2) Τα $\frac{3}{4}$ του κιλού κασέρι κοστίζουν 6,7 ευρώ. Να βρείτε πόσο κοστίζει το 1 κιλό κασέρι και πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{5}$ των 4 κιλών.

3) Τα $\frac{5}{7}$ των μαθητών μιας τάξης είναι κορίτσια. Αν τα αγόρια της τάξης είναι 18, να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.

4) Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μια πλευρά είναι 25 εκατοστά και η άλλη ίση με τα $\frac{\frac{1}{7}}{4} = \frac{\frac{1}{7}}{4} \cdot \frac{3}{5}$ της πρώτης. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου.

§2.2 Ισοδύναμα κλάσματα

Δύο κλάσματα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζονται **ισοδύναμα** όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Π.χ.

A. . B. . Γ. . Δ. . E

Το τμήμα ΑΔ (ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ) αποτελεί τα $\frac{3}{4}$ του τμήματος ΑΕ. Αν τα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ, που καθένα από αυτά αποτελεί το $\frac{1}{4}$ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ, τα χωρίσουμε στη μέση τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ χωρίζεται σε 8 ίσα μέρη και το τμήμα ΑΔ χωρίζεται σε 6 ίσα μέρη. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το τμήμα ΑΔ είναι τα $\frac{6}{8}$ του ΑΕ.

Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$ εκφράζουν το ίδιο μέρος του ευθύγραμμου τμήματος, άρα είναι ισοδύναμα.

- Αν δύο κλάσματα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστί γινόμενα»

$\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα. Δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.

Πχ. τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{8}$ είναι ίσα γιατί $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24$.

Γενικά θα εξετάζουμε αν δύο κλάσματα είναι ίσα, με τα «χιαστί γινόμενα».

Π.χ.

Ποιά από τα κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{25}{35}$, $\frac{10}{21}$ είναι ίσα μεταξύ τους; (βλέπε εφαρμογή 1 σελ 39 σχολικού)

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Για να δούμε αν κάποια από αυτά τα κλάσματα είναι ίσα μεταξύ τους πρέπει να τα πολλαπλασιάσουμε ανά δύο χιαστί

$$\frac{5}{7} \text{ και } \frac{25}{35} : 5 \cdot 35 = 175 \text{ και } 7 \cdot 25 = 175 \text{ άρα είναι ίσα.}$$

$$\frac{5}{7} \text{ και } \frac{10}{21} : 5 \cdot 21 = 105 \text{ και } 7 \cdot 10 = 70 \text{ άρα δεν είναι ίσα.}$$

$$\frac{25}{35} \text{ και } \frac{10}{21} : 25 \cdot 21 = 525 \text{ και } 35 \cdot 10 = 350 \text{ άρα δεν είναι ίσα.}$$

- Για να **δημιουργήσουμε** ισοδύναμα κλάσματα εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες :

→ Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$), προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta \cdot \lambda}, \lambda \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Π.χ.

$$\frac{8}{10} = \frac{8 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{24}{30} \quad \text{τα κλάσματα } \frac{8}{10} \text{ και } \frac{24}{30} \text{ είναι ισοδύναμα.}$$

→ Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

Π.χ.

$$\frac{9}{15} = \frac{9 : 3}{15 : 3} = \frac{3}{5} \quad \text{τα κλάσματα } \frac{9}{15} \text{ και } \frac{3}{5} \text{ είναι ισοδύναμα.}$$

Επειδή το κλάσμα που θα βρούμε είναι πιο απλό, και ισοδύναμο του αρχικού, την εργασία αυτή τη λέμε **απλοποίηση**.

→ Τα κλάσματα που δεν μπορούν να απλοποιηθούν περισσότερο ονομάζονται **ανάγωγα**.

Π.χ.

$$\frac{15}{12} = \frac{15 : 3}{12 : 3} = \frac{5}{4} \quad \text{το κλάσμα } \frac{5}{4} \text{ δεν μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο}$$

και λέγεται **ανάγωγο**.

→ Δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**

Π.χ.

$$\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{9}{8} \text{ κτλ}$$

→ Τα κλάσματα που δεν είναι ομώνυμα, που έχουν δηλ. διαφορετικό παρονομαστή,

λέγονται **ετερόνυμα**.

$$\frac{6}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7} \text{ κτλ}$$

Για να μετατρέψουμε κλάσματα σε ομώνυμα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

- Ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται
- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων ετερόνυμων κλασμάτων
- Διαιρούμε το ΕΚΠ με καθένα από τους παρονομαστές
- Τέλος πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή του κάθε κλάσματος επί τους αντίστοιχους αριθμούς που βρήκαμε

Π.χ. Να γίνουν ομώνυμα τα κλάσματα (βλέπε εφαρμογή 3 σελ 39 σχολικού)

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{30}$$

Παρατηρώ ότι τα πρώτα δύο είναι ανάγωγα, αλλά το τρίτο απλοποιείται

$$\frac{15}{30} = \frac{15 \div 15}{30 \div 15} = \frac{1}{2}$$

Άρα τώρα πια, έχω τα κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}$

$$\text{ΕΚΠ}(5,8,2)=40$$

$$\text{άρα } 40:5=8, \quad 40:8=5 \text{ και } 40:20=2$$

οπότε $\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$, $\frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{25}{40}$, $\frac{1 \cdot 20}{2 \cdot 20} = \frac{20}{40}$

Προσοχή!!!

Είπαμε ότι ισχύει $\frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta \cdot \lambda} = \frac{\alpha}{\beta}$ όμως $\frac{\alpha + \lambda}{\beta + \lambda} \neq \frac{\alpha}{\beta}$

Π.χ.

Το καθένα από τα κλάσματα $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{20}{48}$ να μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 24.

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{40}{24}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{14}{24}$$

$$\frac{20}{48} = \frac{20 : 2}{48 : 2} = \frac{10}{24}$$

Π.χ.

Να συμπληρωθεί το κενό ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα

$$\frac{5}{6} = \frac{\quad}{18}$$

Αφού έχουμε ισότητα των δύο κλασμάτων, πρέπει να τρέψουμε το $\frac{5}{6}$ σε

ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 18 : $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$.

Επομένως ,πρέπει να συμπληρώσουμε με τον αριθμό 15.

Ασκήσεις

Α' ομάδα

- 1) Να γράψετε ως κλάσμα τον αριθμό 5 με παρονομαστή το :
α) 2 β) 3 γ) 7 δ) 12 ε) 20

- 2) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{9}$ σε ένα ισοδύναμο με παρονομαστή τον αριθμό :
α) 18 β) 36 γ) 45 δ) 99

- 3) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{5}$ σε ένα ισοδύναμο με αριθμητή τον αριθμό :
α) 2 β) 3 γ) 5 δ) 11

- 4) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{3}{7}$ σε ένα ισοδύναμο με παρονομαστή τον αριθμό :
α) 14 β) 21 γ) 35 δ) 49 ε) 77

- 5) Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα :
α) $\frac{9}{12}$ β) $\frac{6}{10}$ γ) $\frac{21}{27}$ δ) $\frac{15}{45}$ ε) $\frac{16}{40}$ στ) $\frac{30}{120}$

- 4) Να συμπληρώσετε τα κενά με κατάλληλους αριθμούς ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες :
α) $\frac{1}{2} = \frac{\dots}{8}$ β) $\frac{2}{3} = \frac{\dots}{6}$ γ) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{12}$ δ) $\frac{5}{8} = \frac{\dots}{24}$
ε) $\frac{6}{5} = \frac{54}{\dots}$ στ) $\frac{10}{11} = \frac{50}{\dots}$ ζ) $\frac{3}{10} = \frac{30}{\dots}$ η) $\frac{5}{21} = \frac{10}{\dots}$
θ) $\frac{5}{12} = \frac{\dots}{108}$ ι) $\frac{7}{6} = \frac{42}{\dots}$

5) Να δικαιολογήσετε γιατί τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα :

α) $\frac{14}{21}$ και $\frac{2}{3}$ β) $\frac{8}{72}$ και $\frac{1}{9}$

γ) $\frac{36}{27}$ και $\frac{4}{3}$ δ) $\frac{12}{18}$ και $\frac{2}{3}$

6) Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$ β) $\frac{3}{8}, \frac{8}{9}$ γ) $\frac{5}{12}, \frac{7}{8}$ δ) $\frac{3}{9}, \frac{7}{15}$

Β' ομάδα

1) Να βρείτε για ποια τιμή του x οι λόγοι $\frac{3}{7}$ και $\frac{21}{x}$ είναι ίσοι.

2) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{3}{5}$ ώστε να προκύψει κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{18}{48}$;

3) Δίνεται το κλάσμα $\frac{4}{5}$.

α) Πως θα γραφεί το κλάσμα, αν προσθέσουμε στον αριθμητή του τον αριθμό x ;

β) Να βρείτε τον x ώστε το κλάσμα που γράψατε να είναι ίσο με το κλάσμα $\frac{12}{10}$.

§2.3 Σύγκριση κλασμάτων**Σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων**

Όταν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.

Π.χ.

$$\frac{9}{8}, \frac{3}{8}$$

Το μικρότερο από αυτά τα κλάσματα είναι το $\frac{3}{8}$ ενώ μεγαλύτερο το $\frac{9}{8}$ και μπορούμε να γράψουμε $\frac{3}{8} < \frac{9}{8}$

Σύγκριση κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή

Όταν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μικρότερο παρονομαστή.

Π.χ.

$$\frac{11}{10}, \frac{11}{2}$$

Από τα κλάσματα αυτά το μεγαλύτερο είναι το $\frac{11}{2}$ και γράφουμε $\frac{11}{10} < \frac{11}{2}$

Σύγκριση ετερόνυμων κλασμάτων

Όταν δύο κλάσματα είναι ετερόνυμα για να τα συγκρίνουμε πρέπει πρώτα να τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

Π.χ.

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}$$

Για να συγκριθούν τα κλάσματα πρέπει πρώτα να γίνουν ομώνυμα. Θα βρούμε το ΕΚΠ των παρονομαστών τουρλώστε να προκύψουν κλάσματα με όσο το δυνατόν

μικρότερους όρους. ΕΚΠ(5,8)=40 άρα $40:5=8$ οπότε $\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$ και

$$40:8=5 \text{ οπότε } \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{25}{40}$$

$$\text{Και επειδή } \frac{24}{40} < \frac{25}{40} \text{ θα είναι και } \frac{3}{5} < \frac{5}{8}$$

Π.χ.

Να συγκριθούν τα $\frac{5}{6}, 1, \frac{2}{3}$.

$$\text{Για να γίνουν ομώνυμα τα } \frac{5}{6}, \frac{2}{3}: \text{ ΕΚΠ}(6,3)=6 \quad \text{άρα } \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

$$\text{Επομένως } \frac{5}{6} > \frac{4}{6}.$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 6} = \frac{6}{6} \quad \text{άρα } \frac{6}{6} > \frac{5}{6} > \frac{4}{6} \quad \text{δηλ. } 1 > \frac{5}{6} > \frac{2}{3}$$

Π.χ.

Να βρεθεί ένα κλάσμα μεγαλύτερο του $\frac{1}{3}$ και μικρότερο του $\frac{3}{7}$.

Πρέπει πρώτα τα κλάσματα να γίνουν ομώνυμα : ΕΚΠ(3,7)=21

$$\text{Άρα } \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{7}{21} \quad \text{και} \quad \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{9}{21}$$

Έτσι το κλάσμα $\frac{8}{21}$, επειδή είναι μεγαλύτερο του $\frac{7}{21}$ και μικρότερο του $\frac{9}{21}$, θα

είναι και μεγαλύτερο του $\frac{1}{3}$ και μικρότερο του $\frac{3}{7}$.

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{2}{5}$ και $\frac{7}{5}$ β) $\frac{8}{17}$ και $\frac{5}{17}$ γ) $\frac{7}{15}$ και $\frac{11}{15}$ δ) $\frac{4}{3}$ και $\frac{10}{3}$

2) Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{7}{8}$ και $\frac{7}{9}$ β) $\frac{18}{13}$ και $\frac{18}{15}$ γ) $\frac{35}{45}$ και $\frac{35}{36}$

δ) $\frac{11}{5}$ και $\frac{11}{18}$ ε) $\frac{49}{47}$ και $\frac{49}{58}$

3) Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{2}$ β) $\frac{8}{15}$ και $\frac{7}{5}$ γ) $\frac{9}{8}$ και $\frac{12}{6}$

δ) $\frac{14}{25}$ και $\frac{17}{5}$ ε) $\frac{13}{12}$ και $\frac{26}{24}$ στ) $\frac{5}{8}$ και $\frac{6}{7}$

ζ) $\frac{5}{6}$ και $\frac{6}{7}$ η) $\frac{8}{9}$ και 7 θ) $\frac{2}{5}$ και 2

4) Να συγκρίνετε με τη μονάδα καθένα από τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{5}{6}$ δ) $\frac{7}{4}$

ε) $\frac{14}{15}$ στ) $\frac{65}{62}$ ζ) $\frac{9}{9}$ η) $\frac{315}{518}$

5) Να γράψετε στη σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα κλάσματα :

α) $\frac{27}{25}, \frac{14}{25}, \frac{8}{25}, \frac{2}{25}, \frac{25}{25}, \frac{36}{25}, \frac{9}{25}$

$$\beta) \frac{4}{17}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{15}, \frac{4}{18}, \frac{4}{2}, \frac{4}{100}$$

Β' ομάδα

1) Να βρείτε ένα κλάσμα που να είναι :

α) μεγαλύτερο του $\frac{1}{3}$ και μικρότερο του $\frac{2}{3}$

β) μεγαλύτερο του $\frac{2}{7}$ και μικρότερο του $\frac{3}{7}$

γ) μεγαλύτερο του $\frac{3}{4}$ και μικρότερο του $\frac{5}{3}$

δ) μεγαλύτερο του $\frac{5}{7}$ και μικρότερο του 1

2) α) Δίνεται το κλάσμα $\frac{3}{8}$. Να γράψετε τρία δικά σας ομώνυμα κλάσματα που να είναι μεγαλύτερα του $\frac{3}{8}$ και να βάλετε ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας.

β) Δίνεται το κλάσμα $\frac{2}{11}$. Να γράψετε τρία δικά σας ετερόνυμα κλάσματα που να είναι μικρότερα από το $\frac{2}{11}$ και να βάλετε ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας.

3) Από τρεις εργάτες ο πρώτος δούλεψε τα $\frac{3}{4}$ της ώρας, ο δεύτερος τα $\frac{7}{10}$ της ώρας και ο τρίτος τα $\frac{2}{5}$ της ώρας. Ποιος από τους τρεις δούλεψε περισσότερο και ποιος λιγότερο;

4) Δίνεται το κλάσμα $\frac{4}{7}$.

α) Να το συγκρίνετε με τη μονάδα.

β) Αν στους δύο όρους του κλάσματος προσθέσουμε τη μονάδα να γράψετε το νέο κλάσμα που θα προκύψει και να το συγκρίνετε με το αρχικό κλάσμα.

§2.4 Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Πρόσθεση- Αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων

Το άθροισμα ή η διαφορά δύο (ή περισσότερων) ομώνυμων κλασμάτων είναι ένα κλάσμα το οποίο έχει αριθμητή το άθροισμα ή τη διαφορά αντίστοιχα, των αριθμητών και παρονομαστή τον ίδιο.

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

Π.χ.

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

Πρόσθεση- Αφαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και στη συνέχεια τα προσθέτουμε ή τα αφαιρούμε αντίστοιχα, σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα.

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} + \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta}$$

Π.χ.

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{20}{35} + \frac{14}{35} = \frac{34}{35}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{21}{35} - \frac{20}{35} = \frac{1}{35}$$

Πρόσθεση μεικτών αριθμών

Το σύμβολο $\alpha \frac{\beta}{\gamma}$ παριστάνει το άθροισμα $\alpha + \frac{\beta}{\gamma}$ και ονομάζεται **μεικτός αριθμός** και παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας .

Π.χ.

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

Για να μετατρέψουμε έναν μεικτό αριθμό σε κλάσμα, πρώτα γράφουμε τον μεικτό ως άθροισμα και στη συνέχεια, αφού γράψουμε τον φυσικό ως κλάσμα, προσθέτουμε τα κλάσματα.

Π.χ.

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{3}{1} + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

Για να προσθέσουμε μεικτούς αριθμούς, είτε προσθέτουμε χωριστά τους φυσικούς και χωριστά τα κλάσματα και <<ενώνουμε>> τα δύο αθροίσματα, είτε μετατρέπουμε τους μεικτούς σε κλάσματα και τα προσθέτουμε.

Π.χ.

$$3\frac{1}{2} + 8\frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{5} = 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 11 + \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = 11 + \frac{7}{10} = 11\frac{7}{10}$$

ή

$$3\frac{1}{2} + 8\frac{1}{5} = \frac{7}{2} + \frac{41}{5} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{41 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{35}{10} + \frac{82}{10} = \frac{117}{10} = \frac{110 + 7}{10} = \frac{110}{10} + \frac{7}{10}$$

$$\frac{11 \cdot 10}{10} + \frac{7}{10} = 11 + \frac{7}{10} = 11\frac{7}{10}$$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

- 1) Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα και όπου είναι δυνατό να γίνουν οι απλοποιήσεις :

α) $\frac{3}{14} + \frac{2}{14}$ β) $\frac{5}{6} + \frac{4}{6}$ γ) $\frac{7}{5} + \frac{3}{5}$ δ) $\frac{1}{32} + \frac{7}{32} + \frac{16}{32}$

ε) $\frac{7}{60} + \frac{37}{60} + \frac{21}{60}$ στ) $\frac{4}{100} + \frac{46}{100} + \frac{66}{100}$ ζ) $\frac{2}{3} + \frac{1}{12}$

η) $\frac{2}{7} + \frac{4}{21}$ θ) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ ι) $\frac{1}{5} + \frac{7}{6} + \frac{2}{15}$ κ) $\frac{2}{27} + \frac{1}{18} + \frac{5}{6}$

λ) $\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{7}{10}$ μ) $\frac{51}{100} + \frac{7}{10} + \frac{3}{1000}$

- 2) i. Να γράψετε ως μεικτούς αριθμούς τα παρακάτω αθροίσματα :

α) $5 + \frac{1}{2}$ β) $3 + \frac{1}{5}$ γ) $7 + \frac{3}{4}$ δ) $11 + \frac{3}{2}$ ε) $\frac{17}{3} + 4$ στ) $9 + \frac{1}{8}$

- ii. Να γράψετε ως κλάσματα τους παρακάτω μεικτούς αριθμούς :

α) $1\frac{1}{2}$ β) $4\frac{2}{5}$ γ) $7\frac{3}{4}$ δ) $11\frac{1}{5}$ ε) $12\frac{5}{7}$ στ) $45\frac{0}{12}$ ζ) $0\frac{5}{4}$

- 3) Να βρείτε τα αθροίσματα :

α) $5\frac{4}{6} + 3\frac{2}{7} + 3\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{3} + 6\frac{7}{9} + 8\frac{17}{18}$ γ) $24\frac{3}{8} + 7\frac{6}{16} + 6\frac{3}{4}$ δ)

$$1\frac{1}{4} + 7\frac{0}{6} + 4\frac{2}{8}$$

- 4) Να βρείτε τις διαφορές κάνοντας όπου είναι δυνατό τις απλοποιήσεις :

$$\alpha) \frac{7}{8} - \frac{5}{8} \quad \beta) \frac{13}{18} - \frac{3}{18} \quad \gamma) \frac{33}{6} - \frac{27}{6} \quad \delta) \frac{35}{102} - \frac{15}{102}$$

$$\epsilon) \frac{715}{100} - \frac{350}{100} \quad \sigma\tau) 7\frac{1}{4} - 3\frac{1}{4} \quad \zeta) \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \quad \eta) \frac{3}{8} - \frac{1}{16}$$

$$\theta) \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \quad \eta) \frac{25}{18} - \frac{21}{27} \quad \iota) \frac{3}{100} - \frac{1}{1000} \quad \kappa) 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}$$

5) Ένας εργάτης έσκαψε την πρώτη ημέρα τα $\frac{2}{5}$ ενός οικοπέδου, τη δεύτερη ημέρα το $\frac{1}{8}$ και την τρίτη ημέρα τα $\frac{3}{10}$ του οικοπέδου. Πόσο έσκαψε και τις τρεις ημέρες;

6) Από ένα τόπι ύφασμα πουλήθηκαν $12\frac{3}{4}$ μέτρα, $\frac{31}{2}$ μέτρα και $6\frac{7}{10}$ μέτρα ύφασμα. Έμειναν όμως 18 μέτρα απούλητα. Πόσα μέτρα ήταν όλο το ύφασμα;

7) Το μεικτό βάρος ενός δοχείου είναι $5\frac{1}{4}$ κιλά. Το βάρος του δοχείου είναι $\frac{1}{6}$ κιλά. Πόσο είναι το βάρος του περιεχομένου ;

Β' ομάδα

1) Να βρείτε τις διαφορές :

$$\alpha) \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{15} \right) \quad \beta) \left(\frac{9}{10} + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{8}{15} \right)$$

$$\gamma) \left(\frac{8}{9} + \frac{3}{4} \right) - \left(\frac{17}{18} - \frac{7}{12} \right) \quad \delta) \left(\frac{24}{25} - \frac{8}{35} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

2) Να βρείτε τις διαφορές :

$$\alpha) 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad \beta) 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)$$

$$\gamma) 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right)$$

3) Να βρείτε σε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε :

α) το $\frac{3}{40}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{5}{8}$

β) το $\frac{3}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{11}{16}$

γ) το $\frac{3}{4}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{4}{3}$

4) Να βρείτε από ποιον αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε :

α) το $\frac{4}{9}$ για να βρούμε διαφορά $\frac{10}{18}$

β) το $\frac{2}{3}$ για να βρούμε διαφορά $\frac{5}{24}$

γ) το $\frac{1}{6}$ για να βρούμε διαφορά $\frac{1}{2}$

5) Τρία αδέρφια μοίρασαν 30.000 ευρώ. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο

δεύτερος $\frac{1}{6}$ λιγότερο από τον πρώτο και ο τρίτος τα υπόλοιπα. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

(υπολογίστε πρώτα το μέρος του ποσού που αντιστοιχεί στο κάθε αδερφό).

6) Ένας έμπορος πούλησε σε τέσσερις πελάτες αντίστοιχα τα $\frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{3}{20}, \frac{1}{4}$ του εμπορεύματός του. Ποιο μέρος του εμπορεύματος έμεινε απούλητο;

§2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

- Το γινόμενο **δύο κλασμάτων** είναι ένα κλάσμα το οποίο έχει αριθμητή το **γινόμενο των αριθμητών** και παρονομαστή το **γινόμενο των παρονομαστών**.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Π.χ.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

- Το γινόμενο ενός **φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα** είναι το κλάσμα με αριθμητή το **γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό** και τον ίδιο παρονομαστή

$$\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta}$$

Π.χ.

$$4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 2}{7} = \frac{8}{7}$$

Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο το 1.

Ο καθένας από αυτούς λέγεται αντίστροφος του άλλου. Έτσι αν είναι $\alpha \cdot \beta = 1$, τότε οι αριθμοί α , β είναι αντίστροφοι και ο β είναι ο αντίστροφος του α ή ο α είναι ο αντίστροφος του β .

Επομένως και δύο κλάσματα λέγονται **αντίστροφα** όταν έχουν γινόμενο ένα.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1 \quad \text{άρα τα κλάσματα } \frac{\alpha}{\beta} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha} \text{ είναι αντίστροφα.}$$

→ Για να βρούμε τον αντίστροφο ενός αριθμού α αρκεί να αντιστρέψουμε τον α , δηλ. ο αντίστροφος του α θα είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

Π.χ.

Ο αντίστροφος του 2 θα είναι ο $\frac{1}{2}$, αφού $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Ο αντίστροφος του $\frac{4}{3}$ θα είναι ο $\frac{3}{4}$, αφού $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$

→ Κάθε αριθμός εκτός από το μηδέν έχει αντίστροφο.

→ Ο αντίστροφος του 1 είναι το 1.

Στα κλάσματα ισχύουν επίσης όλες οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών :

- Αντιμεταθετική $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$
- Προσεταιριστική $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda} \right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\kappa}{\lambda}$
- Επιμεριστική $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \pm \frac{\kappa}{\lambda} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \pm \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\kappa}{\lambda}$
- Το 1 δε μεταβάλλει το γινόμενο $1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Να βρείτε τα γινόμενα :

$$\alpha) \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \quad \beta) \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} \quad \gamma) \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3} \quad \delta) \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{15}$$

$$\epsilon) \frac{7}{16} \cdot \frac{8}{14} \quad \sigma\tau) 3 \cdot \frac{5}{3} \quad \zeta) 4 \cdot \frac{7}{8} \quad \eta) 2 \cdot \frac{7}{9}$$

$$\theta) 10 \cdot \frac{17}{100} \quad \iota) 8 \cdot \frac{5}{16} \quad \kappa) 5 \cdot 2\frac{1}{3} \quad \lambda) 2 \cdot 3\frac{2}{5}$$

$$\mu) 12 \cdot 3\frac{1}{7} \quad \nu) 10 \cdot 33\frac{2}{5} \quad \xi) 3 \cdot 7\frac{4}{15}$$

2) Να βρείτε τα γινόμενα :

$$\alpha) \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \quad \beta) \frac{15}{12} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7} \quad \gamma) 4 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{42}$$

$$\delta) \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \quad \epsilon) 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{3}{7} \quad \sigma\tau) 4\frac{4}{15} \cdot 2\frac{1}{5} \quad \zeta) 4\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}$$

3) Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών :

$$\alpha) \frac{1}{5} \quad \beta) \frac{3}{7} \quad \gamma) \frac{7}{13} \quad \delta) \frac{18}{11}$$

$$\epsilon) \frac{308}{155} \quad \sigma\tau) \frac{1}{10} \quad \zeta) 1\frac{1}{2} \quad \eta) 3\frac{2}{5}$$

$$\theta) 0\frac{1}{7} \quad \iota) 9\frac{4}{5} \quad \kappa) 7\frac{1}{3} \quad \lambda) 8\frac{1}{4}$$

4) Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\alpha = \frac{5}{4} \text{ m}$ και $\beta = \frac{3}{4} \text{ m}$. Να βρείτε :

α) την περίμετρό του

β) το εμβαδόν του

Β' ομάδα

1) Ο Κώστας αγόρασε ένα βιβλίο που άξιζε 21 ευρώ και ο βιβλιοπώλης του έκανε έκπτωση ίση με τα $\frac{2}{10}$ της αξίας του βιβλίου. Να βρείτε :

α) πόσα ευρώ ήταν η έκπτωση και

β) πόσα πλήρωσε για το βιβλίο.

2) Στις εξετάσεις του Ιουνίου προβιβάστηκαν από μια τάξη τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών, το

$$\frac{1}{4}$$

των μαθητών έμεινε για επανεξέταση τον Σεπτέμβριο και οι υπόλοιποι έμειναν στην ίδια τάξη. Αν η τάξη είχε 40 μαθητές, να βρείτε πόσοι μαθητές προβιβάστηκαν, πόσοι έμειναν για επανεξέταση και πόσοι έμειναν στην ίδια τάξη.

3) Να γίνουν οι πράξεις και να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών :

$$\alpha) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \quad \beta) \frac{1}{3} \cdot 9 - \frac{1}{5} \quad \gamma) 2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\delta) \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3} \right) \quad \epsilon) \frac{6}{5} \cdot 4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) \quad \sigma\tau) \left(\frac{7}{8} + \frac{4}{5} \right) - \frac{7}{6} \cdot 12$$

4) Ο πατέρας της Ελένης είναι 49 ετών. Ποια θα είναι η ηλικία της Ελένης μετά $3\frac{1}{2}$ χρόνια, αν σήμερα η ηλικία της είναι τα $\frac{2}{5}$ των $\frac{5}{7}$ της ηλικίας του πατέρα της ;

§2.6 Διαίρεση κλασμάτων

- Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Π.χ.

$$7 : 4 = 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} \div \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}, \quad \beta, \gamma, \delta \neq 0$$

Π.χ.

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$$

→ Για να διαιρέσουμε φυσικό με κλάσμα, γράφουμε τον φυσικό σαν κλάσμα και στη συνέχεια ακολουθούμε τον κανόνα.

Π.χ.

$$3 \div \frac{5}{7} = \frac{3}{1} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5}$$

Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος είναι κλάσμα ονομάζεται σύνθετο κλάσμα

Π.χ.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} \div \frac{\frac{\gamma}{\delta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό.

Οι όροι α, δ λέγονται άκροι όροι, ενώ οι όροι β, γ λέγονται μέσοι όροι.

Ένα σύνθετο κλάσμα μπορεί να μετατραπεί σε απλό του οποίου ο αριθμητής είναι το γινόμενο των άκρων όρων του και ο παρονομαστής είναι το γινόμενο των μέσων όρων του.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Π.χ.

Να γράψετε το πηλίκο $\frac{3}{5} \div \frac{6}{4}$ ως σύνθετο κλάσμα και στη συνέχεια να το μετατρέψετε σε απλό.

$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{4} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Στην περίπτωση που ο ένας από τους δύο όρους είναι φυσικός, πριν από όλα θα τον μετατρέψουμε σε κλάσμα και μετά θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία.

Π.χ.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{5}} \quad \text{ή} \quad (\text{αν ο φυσικός είναι στον παρονομαστή}) \quad \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}}$$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Να βρεθούν τα παρακάτω πηλίκα :

$$\alpha) \frac{5}{6} \div \frac{3}{4} \quad \beta) \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} \quad \gamma) \frac{7}{5} \div \frac{7}{5} \quad \delta) \frac{7}{8} \div \frac{15}{4}$$

$$\epsilon) \frac{25}{36} \div 5 \quad \sigma\tau) 2 \div \frac{8}{5} \quad \zeta) 3\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{5} \quad \eta) 24\frac{8}{9} \div 8$$

$$\theta) 7\frac{3}{5} \div 3\frac{1}{4} \quad \iota) 80 \div 5\frac{5}{8}$$

2) Να μετατρέψετε τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα σε απλά και να κάνετε τις πράξεις :

$$\alpha) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} \quad \beta) \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{2}} \quad \gamma) \frac{\frac{12}{3}}{\frac{3}{4}}$$

$$\delta) \frac{5\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \quad \epsilon) \frac{\frac{2}{3}}{4\frac{1}{3}}$$

3) Να γραφούν ως κλάσματα τα παρακάτω πηλίκα :

$$\alpha) \frac{3}{5} \div \frac{1}{2} \quad \beta) 2 \div \frac{3}{7}$$

$$\gamma) \frac{3}{4} \div 5 \quad \delta) 2\frac{1}{3} \div 5$$

$$\epsilon) 3 \div 4\frac{1}{6} \quad \sigma\tau) 1\frac{1}{2} \div 2\frac{0}{5}$$

- 4) 7 εργάτες σκάβουν μαζί τα $\frac{7}{8}$ ενός κήπου σε μία ημέρα. Πόσο μέρος του κήπου έχει σκάψει ο καθένας ;
- 5) Θέλουμε να μοιράσουμε το $\frac{1}{2}$ μιας πίτσας σε 4 παιδιά. Τί μέρος της πίτσας θα πάρει το κάθε παιδί ;
- 6) Αγοράσαμε $\frac{3}{4}$ στρέμματα ενός οικοπέδου και δώσαμε 16200 ευρώ. Πόσο αξίζει το 1 στρέμμα του οικοπέδου ;

Β' ομάδα

- 1) Να βρείτε τον αριθμό που αν πολλαπλασιαστεί με το $\frac{3}{4}$ μας δίνει γινόμενο :

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{1}{6}$ γ) $\frac{6}{2}$ δ) $1\frac{1}{4}$

- 2) Να βρείτε με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε τον $\frac{4}{5}$ ώστε να βρούμε

πηλίκο :

α) $\frac{5}{4}$ β) 15 γ) $\frac{3}{7}$ δ) $3\frac{1}{5}$ ε) 1

- 3) Να απλοποιηθούν τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{\frac{6}{5} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}$ β) $\frac{1 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{2}{3}}$ γ) $\frac{\frac{3}{5} + \frac{14}{6}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}}$

δ) $\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}$ ε) $\frac{\frac{3}{4} : \frac{1}{2}}{\frac{4}{5} : \frac{2}{7}}$ στ) $\frac{\frac{6}{8} \cdot \frac{13}{2}}{\frac{5}{6} : \frac{2}{3}}$

- 4) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

α) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$ β) $\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{5} + \frac{5}{7} \right)$ γ) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right) : 5$

3.ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**§3.1 Δεκαδικά κλάσματα – δεκαδικοί αριθμοί**

Οι **δεκαδικοί αριθμοί** αποτελούνται από το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος που χωρίζονται με την υποδιαστολή.

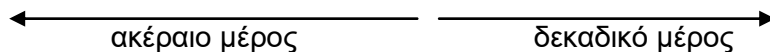
Το πρώτο ψηφίο του δεκαδικού μέρους παριστάνει δέκατα, το δεύτερο εκατοστά, το τρίτο χιλιοστά κτλ.

Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι σε μονάδες, δεκάδες κτλ. Όπως για παράδειγμα στον παρακάτω πίνακα για τους αριθμούς 527,15 και 0,1603

δεκάδες χιλιάδες	χιλιάδες	εκατοντάδ.	δεκάδες	μονάδες	δέκατα	εκατοστά	χιλιοστά	Δεκάκις χιλιοστά
		5	2	7	1	5		
				0	1	6	0	3



Υποδιαστολή



→ Ένας φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν δεκαδικός αρκεί το δεκαδικό του μέρος να είναι μηδέν.

Π.χ.

$$76 = 76,0$$

φυσικός δεκαδικός

→ Μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών υπάρχουν και άλλοι δεκαδικοί αριθμοί.

→ Εάν διαγράψουμε μηδενικά από το τέλος του δεκαδικού μέρους ή από την αρχή του ακέραιου ο αριθμός δεν αλλάζει.

Π.χ.

$$7,53200=7,532$$

$$02,21=2,21$$

Σύγκριση:

→ Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς, συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη τους. Εκείνος με το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος είναι και ο μεγαλύτερος. Σε περίπτωση που τα ακέραια μέρη είναι ίσα συγκρίνουμε τα δεκαδικά μέρη ξεκινώντας από τα δέκατα.

Π.χ.

- 53,20 και 25,20
 $53 > 25$ άρα $53,20 > 25,20$
- 5,26 και 5,27
 $5=5$, $2=2$, $6 < 7$ άρα $5,26 < 5,27$
- 0,1 (ή 0,10) και 0,11
 $0=0$, $1=1$, $0 < 1$ άρα $0,1 < 0,11$

→ Η **στρογγυλοποίηση** δεκαδικών αριθμών γίνεται σύμφωνα με τους γνωστούς μας κανόνες.

Π.χ.

Στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο εκατοστό

$$3,124 \rightarrow 3,120$$

$$14,2089 \rightarrow 14,21$$

Στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη μονάδα

$$24,510 \rightarrow 25,000$$

$$5,149 \rightarrow 5,000$$

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται κάθε κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής είναι το 10 ή μία δύναμη του 10.

Π.χ.

$$\frac{15}{10}, \frac{18}{100} \text{ κτλ.}$$

→ Κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.

Π.χ.

$$\frac{15}{10} = 1,5 \quad \frac{18}{100} = 0,18$$

Για να γράψουμε δηλ. ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό, γράφουμε τον αριθμητή του κλάσματος και ανάλογα με τον αριθμό των μηδενικών του παρονομαστή βάζουμε την υποδιαστολή τόσα ψηφία αριστερά όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής.

→ Επίσης μπορούμε να γράψουμε και ένα δεκαδικό αριθμό σαν δεκαδικό κλάσμα.

Π.χ.

$$37,16 = \frac{3716}{100} \quad 0,28 = \frac{28}{100}$$

Για να γράψουμε δηλ. ένα δεκαδικό αριθμό ως δεκαδικό κλάσμα, γράφουμε τον αριθμό χωρίς την υποδιαστολή ως αριθμητή του κλάσματος και ως παρονομαστή γράφουμε την μονάδα ακολουθούμενη από τόσα μηδενικά όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία του δεκαδικού αριθμού.

Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό

Κάθε κλάσμα είναι το πηλίκο της διαίρεσης που έχει διαιρετέο τον αριθμητή του κλάσματος και διαιρέτη τον παρονομαστή του κλάσματος. Δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$$

Αρκεί λοιπόν να κάνουμε τη διαίρεση.

Π.χ.

$$\frac{3}{5} = 3:5 = 0,6$$

Υπάρχει περίπτωση σε κάποιες διαιρέσεις να παρατηρήσουμε ότι όσο και αν τις συνεχίσουμε δε μπορούμε να βρούμε υπόλοιπο μηδέν, ότι δεν “σταματούν”. Επίσης μπορεί από κάποιο σημείο και μετά να έχουμε επανάληψη των ίδιων ψηφίων.

Σ’ αυτές τις περιπτώσεις “σταματάμε” τη διαίρεση σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο και λέμε ότι βρήκαμε το πηλίκο με προσέγγιση (ή με ακρίβεια) εκείνου του δεκαδικού ψηφίου (π.χ δεκάτου, εκατοστού, χιλιοστού).

Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό κλάσμα

$$\frac{24}{5} = 24 : 5 = 4,8 \quad \text{όμως} \quad 4,8 = 48 : 10 = \frac{48}{10}$$

Επομένως $\frac{24}{5} = \frac{48}{10}$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

- 1) Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς :
 $0,33$ και $0,335$
 $31,5$ και $3,15$
 $65,2$ και $65,20$
 $56,107$ και $56,17$
- 2) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $0,1$ και $0,2$. Στη συνέχεια να γράψετε τους δεκαδικούς αριθμούς με δύο δεκαδικά ψηφία που βρίσκονται μεταξύ των παραπάνω αριθμών.
- 3) Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς :
 $0,385$, $0,297$, $0,0873$, $0,0035$, $0,001$
 α) στο πλησιέστερο δέκατο
 β) στο πλησιέστερο εκατοστό
 γ) στο πλησιέστερο χιλιοστό
- 4) Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη μονάδα :
 i. $73,51$
 ii. $0,5$
 iii. $1,93$
 iv. $358,6$
 v. $499,6$
 vi. $5,88$
- 5) Να γράψετε ως κλάσματα τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων :
 α) $2 : 5$ β) $7 : 11$ γ) $12 : 25$ δ) $57 : 100$
- 6) Να βρείτε ποια διαίρεση παριστάνει καθένα από τα παρακάτω κλάσματα :
 α) $\frac{8}{9}$ β) $\frac{4}{6}$ γ) $\frac{10}{13}$ δ) $\frac{18}{1}$

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

7) Να γράψετε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικό αριθμό :

α) $\frac{1}{10}$ β) $\frac{1}{100}$ γ) $\frac{1}{1000}$ δ) $\frac{7}{10}$

ε) $\frac{28}{10}$ στ) $\frac{135}{10}$ ζ) $\frac{6}{100}$ η) $\frac{27}{100}$

θ) $\frac{2135}{100}$ ι) $\frac{8}{1000}$ ια) $\frac{135}{1000}$ ιβ) $\frac{47181}{10000}$

6) Να γράψετε καθένα από τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς ως δεκαδικό κλάσμα :

α) 0,7 β) 0,63 γ) 0,10 δ) 12,13

ε) 0,213 στ) 304,5 ζ) 0,003 η) 5,4

θ) 0,0200 ι) 0,5000 ια) 6,71 ιβ) 3,171

7) Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς :

α) $\frac{1}{5}$ β) $\frac{1}{8}$ γ) $\frac{3}{6}$

δ) $\frac{4}{12}$ ε) $\frac{10}{25}$ στ) $\frac{55}{110}$

8) Καθένα από τα κλάσματα $\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \frac{2}{19}, \frac{15}{18}, \frac{23}{22}$ να το γράψετε ως δεκαδικό με προσέγγιση : α) εκατοστού β) χιλιοστού

Β' ομάδα

- 1) Να τοποθετήσετε τους αριθμούς 3,689 , 3,65 , 3,66 , 3,657 στα κενά ώστε να προκύψουν σωστές συγκρίσεις :
α) $3,6 < \dots\dots < 3,655 < \dots\dots < 3,658$
β) $3,659 < \dots\dots < 3,68 < \dots\dots < 3,7$
- 2) Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός 25,....7 όταν στρογγυλοποιηθεί στο πλησιέστερο δέκατο να γίνει ίσος με 25,7.
- 3) Να συμπληρώσετε τα κενά με τα κατάλληλα ψηφία ώστε ο δεκαδικός αριθμός 2,.... 5 όταν στρογγυλοποιηθεί στο πλησιέστερο εκατοστό να γίνει ίσος με 3.
- 4) α) Να υπολογίσετε το πηλίκο των διαιρέσεων :
i. $36:13$ ii. $45:11$ iii. $375:74$ με προσέγγιση εκατοστού.
β) Να κάνετε την αντίστοιχη στρογγυλοποίηση.
γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

§3.2 Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς

Στην πρόσθεση και στην αφαίρεση, όταν υπάρχουν δεκαδικοί πρέπει να προσέχουμε οι υποδιαστολές να είναι στη σωστή στήλη έτσι ώστε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης.

Π.χ.

Πρόσθεση φυσικού με δεκαδικό

$$42+17,5=59,5$$

ή

$$42 \rightarrow \text{προσθετέος}$$

$$+17,5 \rightarrow \text{προσθετέος}$$

$$59,5$$

↓

άθροισμα

Πρόσθεση δεκαδικού με δεκαδικό

$$5,02+19,2=24,22$$

ή

$$5,02$$

$$+ 19,2 \underline{\hspace{1cm}}$$

$$24,22$$

Π.χ.

Αφαίρεση δεκαδικών

$$30,07- 5,233=24,837$$

ή

$$30,07 - 5,233$$

$$\underline{24,837}$$

Ο **πολλαπλασιασμός** μεταξύ δεκαδικών ή μεταξύ δεκαδικών και φυσικών, γίνεται όπως και ο πολλαπλασιασμός των φυσικών αριθμών μόνο που στο αποτέλεσμα χωρίζουμε με υποδιαστολή από τα δεξιά προς τα αριστερά τόσα ψηφία όσα δεκαδικά ψηφία έχουν και οι δύο παράγοντες.

Π.χ.

$$\begin{array}{r} 5,14 \quad 2 \text{ δεκαδικά ψηφία} \\ \times 1,2 \quad 1 \text{ δεκαδικό ψηφίο} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1028 \\ + 514 \\ \hline \end{array}$$

$$6,168 \quad 3 \text{ δεκαδικά ψηφία}$$

Για να διαιρέσουμε δεκαδικό με δεκαδικό πολλαπλασιάζουμε και το διαιρετέο και το διαιρέτη με κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός. Έτσι αναγόμαστε σε διαίρεση δεκαδικού με φυσικό αριθμό.

Π.χ.

$$\begin{array}{r|l} 35,42 & 4,4 \\ \times 10 \downarrow & \downarrow \times 10 \\ \hline 354,2 & 44 \\ \hline = 220 & 8,05 \\ & = 0 \end{array}$$

→ Όταν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό με **10,100,1000,...** μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα δεξιά τόσες θέσεις όσα είναι και τα μηδενικά.

Π.χ.

$$0,109 \cdot 10 = 1,09$$

$$2,38 \cdot 100 = 238$$

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

→ Όταν έχουμε να διαιρέσουμε έναν δεκαδικό με 10,100,1000,... ή να πολλαπλασιάσουμε με **0,1** , **0,01** , **0,001**... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσα είναι και τα μηδενικά.

Π.χ.

$$14,7:1000=0,0147$$

$$3,2:10=0,32$$

$$409,4\cdot 0,01=4,094$$

Οι **Δυνάμεις** των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών

Π.χ. $1,4^2 = 1,96$

$$0,03^2 = 0,0009$$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Να βρείτε τα αθροίσματα :

- i. $4,5+3,7$ ii. $0,01+1,19$ iii. $17,67+11,23$
iv. $13,02+5,1$ v. $5+6,1+0,03$ vi. $18+274+9,71+24,752$

2) Να βρείτε τα αθροίσματα :

i. $27,8$	ii. $1,007$	iii. $65,2$
$16,08$	$20,074$	$3,674$
$+ 34,008$	$0,45$	$+ 16,85$
_____	_____	_____

3) Να υπολογίσετε τις διαφορές :

- i. $35,1-23,2$ ii. $11,1 - 11,01$ iii. $85,33-85,33$
iv. $36,001-14,1$ v. $45,12-18,352$

4) Να βρείτε τα γινόμενα :

- i. $0,4\cdot 0,01$ ii. $1,8\cdot 25$ iii. $14,01\cdot 2,17$ iv. $149\cdot 2,137$ v. $6,7\cdot 0,75$

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

vi. $100 \cdot 2,74$ vii. $100 \cdot 27,9$ viii. $10 \cdot 0,001$ ix. $1000 \cdot 0,74$ x. $0,1 \cdot 0,06$

5) Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις :

i. $36,74 : 16$ ii. $28,2 : 30$ iii. $35,76 : 1,5$
iv. $8,6 : 3,2$ v. $5,342 : 0,25$ vi. $27,5 : 2,75$

vii. $0,01 : 0,001$ viii. $3,5 : 0,035$ ix. $1 : 0,01$ x. $5 : 0,005$

6) Να κάνετε τις πράξεις σε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $4,09 - 1,2 + 5,14 - 2,85 - 3,008$ ii. $13,167 - 7,145 + 2,009 - 16,135$

iii. $(18 : 3,2) + (26 : 3,2)$ iv. $(25,17 - 13,12) : 0,8$

v. $(5,4 \cdot 0,1) : (0,9 \cdot 0,1)$ vi. $5,4 : 0,9 + 3,2 \cdot 0,1$

7) Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

i. $0,01^2$ ii. $4,2^2$ iii. $1,02^2$ iv. $7,25^2$

v. $2,01^3$ vi. $0,51^3$ vii. $2,36^4$ viii. $9,6^4$

Β' ομάδα

1) Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς εφαρμόζοντας τους κανόνες του πολλαπλασιασμού με 10, 100, 1000 κλπ ή 0,1, 0,01 κλπ.

i. $35 \cdot \dots = 0,035$ ii. $6,3 \cdot \dots = 63$ iii. $100 \cdot \dots = 25$

iv. $6145 \cdot \dots = 6,145$ v. $0,01 \cdot \dots = 0,028$ vi. $1000 \cdot \dots = 2150$

vii. $0,1 \cdot \dots = 0,001$ viii. $0,01 \cdot \dots = 1$ ix. $4,5 \cdot \dots = 0,045$

2) Ένας έμπορος φρούτων αγόρασε 25 κιβώτια μήλα προς 1,2 ευρώ το κιλό. Το κάθε κιβώτιο ζύγιζε 25,5 κιλά. Έδωσε και 16 ευρώ για να τα μεταφέρει στις αποθήκες του. Πόσο του στοίχησαν τα μήλα που αγόρασε ;

3) Να συγκρίνετε τις δυνάμεις :

i. $(1,2 \cdot 1,3)^2$ και $1,2^2 \cdot 1,3^2$

ii. $(0,5 \cdot 1,4)^3$ και $0,5^3 \cdot 1,4^3$

- 4) Για 3,2 κιλά κρέας πληρώσαμε 41 ευρώ. Πόσο θα πληρώσουμε για 5,5 κιλά του ίδιου κρέατος ;

§3.2 Τυποποιημένη ή εκθετική μορφή μεγάλων αριθμών

Όταν έχουμε πολύ μεγάλους αριθμούς π.χ 20.000.000, 4.200.000 κτλ. για λόγους ευκολίας τους γράφουμε σε τυποποιημένη ή εκθετική μορφή.

Γράφουμε δηλαδή $20.000.000 = (20.000.000 : 10.000.000) \cdot 10.000.000 = 2 \cdot 10^7$

$$4.200.000 = (4.200.000 : 1.000.000) \cdot 1.000.000 = 4,2 \cdot 10^6$$

Π.χ.

$$300.000 = 3 \cdot 10^5$$

$$580.000 = 5,8 \cdot 10^5$$

$$1.250.000 = 1,250 \cdot 10^6$$

$$5,2 \cdot 10^2 = 520$$

$$3,08 \cdot 10^6 = 3.080.000$$

$$7,9 \cdot 10^4 = 79.000$$

Γενικά

Ένας μεγάλος αριθμός στην τυποποιημένη μορφή γράφεται σαν γινόμενο ενός αριθμού α (φυσικού ή δεκαδικού) που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10, επί μία δύναμη του 10.

$$\alpha \cdot 10^v$$

→ Μεταξύ δύο μεγάλων αριθμών που είναι γραμμένοι στην τυποποιημένη μορφή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη δύναμη του 10.

→ Αν οι δυνάμεις του 10 είναι ίσες, τότε μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο ή δεκαδικό μέρος.

Π.χ. $1,2 \cdot 10^{19} > 1,2 \cdot 10^{11}$ (γιατί $19 > 11$)

$2,3 \cdot 10^8 > 2,1 \cdot 10^8$ (εφ' όσων οι εκθέτες είναι ίσοι συγκρίνουμε τους αριθμούς $2,3 > 2,1$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

1) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή :
5000000 4300000 67000000 815000000 614000000000

32010000000 1010000000000

2) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:
 $150 \cdot 10^3$ $2700 \cdot 10^4$ $7030 \cdot 10^5$

3) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην δεκαδική μορφή :
 $2,3 \cdot 10^3$ $5,8 \cdot 10^5$ $4,37 \cdot 10^6$ $6,073 \cdot 10^7$

4) Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην δεκαδική μορφή :
 $5,7 \cdot 10^3$ $6,8 \cdot 10^5$ $4,74 \cdot 10^4$ $1,54 \cdot 10^7$ $8,74 \cdot 10^6$ $9,98 \cdot 10^7$

5) Να συγκρίνετε τους αριθμούς :

- i. $5 \cdot 10^6$ και $4 \cdot 10^7$
- ii. $3 \cdot 10^5$ και $2 \cdot 10^5$
- iii. $2,42 \cdot 10^8$ και $7,85 \cdot 10^5$
- iv. $7,835 \cdot 10^{11}$ και $1,275 \cdot 10^{12}$
- v. $8,35 \cdot 10^6$ και $8,41 \cdot 10^6$
- vi. $8,01 \cdot 10^7$ και $8,1 \cdot 10^7$
- vii. $3,01 \cdot 10^3$ και $3,1 \cdot 10^2$

6) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε τα αποτελέσματα στην τυποποιημένη μορφή;

- i. $1,2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^3$
- ii. $57000 \cdot 94000$
- iii. $125000 \cdot 32000$
- iv. $74000 \cdot 2500$
- v. $35000 \cdot 2500$

§3.5 Μονάδες μέτρησης

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

Βασική μονάδα μέτρησης μηκών είναι το **μέτρο (m)**. Άλλες μονάδες μήκους που είναι υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσια του μέτρου είναι :

Πολλαπλάσια : χιλιόμετρο (km) $1\text{km}=1000\text{m}$

Υποδιαιρέσεις : δεκατόμετρο ή παλάμη (dm) $1\text{dm}=\frac{1}{10}\text{m}=0,1\text{m}$

εκατοστόμετρο ή πόντος (cm) $1\text{cm}=\frac{1}{100}\text{m}=0,01\text{m}$

χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm) $1\text{mm}=\frac{1}{1000}\text{m}=0,001\text{m}$

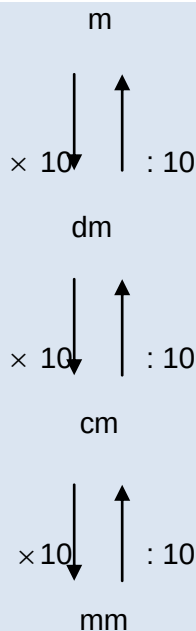
→ σχέσεις μεταξύ των μονάδων :

$$1\text{m}=10\text{dm}=100\text{cm}=1000\text{mm}$$

$$1\text{dm}=10\text{cm}=100\text{mm}$$

$$1\text{cm}=10\text{mm}$$

Μετατροπές :



Π.χ.

Να γίνουν οι μετατροπές :

i. $7\text{ mm} \rightarrow \text{dm}$

ii. $58\text{ cm} \rightarrow \text{dm}$

$7:100=0,07\text{ dm}$

$58:10=5,8\text{dm}$

iii. $4,3\text{ m} \rightarrow \text{dm}$

iv. $2,5\text{ km} \rightarrow \text{m}$

$4,3 \cdot 10=43\text{ dm}$

$2,5 \cdot 1000=2500\text{ m}$

v. $357\text{ m} \rightarrow \text{km}$

$357:1000=0,357\text{ km}$ (βλέπε επίσης Εφαρμογή 1 σχολικού βιβλίου σελ. 66)

ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

Μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο (m^2)**. Ένα τετράγωνο δηλ. με πλευρά 1 m.

Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου :

- i. Τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2) ή τετραγωνική παλάμη, που είναι τετράγωνο με πλευρά 1 dm.

$$1\text{ dm}^2 = \frac{1}{100}\text{ m}^2 = 0,01\text{ m}^2$$

- ii. Τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2) ή τετραγωνικός πόντος, που είναι τετράγωνο με πλευρά 1 cm.

$$1\text{ cm}^2 = \frac{1}{10000}\text{ m}^2 = 0,0001\text{ m}^2$$

- iii. Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2) ή τετραγωνικό χιλιοστό, που είναι τετράγωνο με πλευρά 1 mm.

$$1\text{ mm}^2 = \frac{1}{1000000}\text{ m}^2 = 0,000001\text{ m}^2$$

Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου :

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2), που είναι τετράγωνο με πλευρά 1 km.

$$1 \text{ km}^2 = 1000000 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

Για τη μέτρηση μεγάλων επιφανειών (αγρών, δασικών εκτάσεων) χρησιμοποιούμε το στρέμμα

$$1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2$$

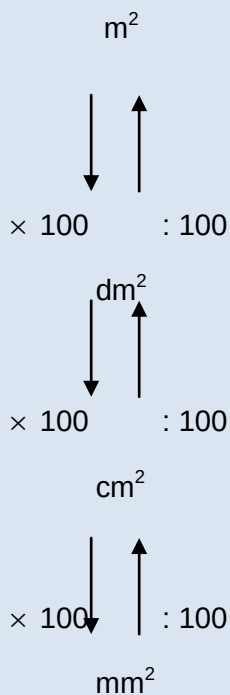
→ σχέσεις μεταξύ των μονάδων :

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10000 \text{ cm}^2 = 1000000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

Μετατροπές :



Π.χ.

Να γίνουν οι μετατροπές :

i. 55 dm^2 σε m^2

$$55:100= 0.55 \text{ m}^2$$

ii. 563 m^2 σε cm^2

$$563 \cdot 10000= 5630000 \text{ cm}^2$$

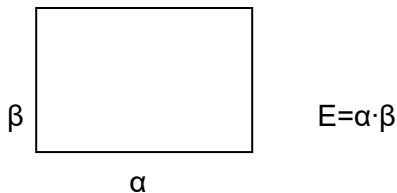
iii. $24,8 \text{ m}^2$ σε km^2

$$24,8:1000000= 0.0000248 \text{ km}^2$$

iv. $1,23 \text{ m}^2$ σε στρέμματα

$$1,23:1000= 0.00123 \text{ στρέμματα}$$

→ Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεων του, μετρημένων με την ίδια μονάδα μήκους.



Προσοχή!!!

Εάν για παράδειγμα $\alpha=5 \text{ cm}$ και $\beta=0,6 \text{ dm}$ (μία διάσταση σε cm και η άλλη σε dm) δεν βρίσκουμε το εμβαδό λέγοντας $E=5 \cdot 0,6=3 \text{ cm}^2$ **ΛΑΘΟΣ**

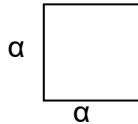
Πρέπει πρώτα $0,6 \text{ dm}$ να γίνουν cm : $0,6 \cdot 10=6 \text{ cm}$ ή τα 5 cm να γίνουν dm :

$$5:10=0,5 \text{ dm.}$$

Οπότε $E=5 \cdot 6=30 \text{ cm}^2$ ή $E=0,5 \cdot 0,6=0,3 \text{ dm}^2$ ($0,3 \text{ dm}^2 \cdot 100=30 \text{ cm}^2$)

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

→ Το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο με ίδιο μήκος και πλάτος.



$$\text{Επομένως } E = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$$

Π.χ.

1. Να υπολογιστεί το εμβαδό του δωματίου με διαστάσεις 3,5 m και 4,2 m
 $3,5 \cdot 4,2 = 14,7 \text{ m}^2$
2. Εάν ένα ορθογώνιο έχει εμβαδό 27 dm^2 και μια διάσταση 9 dm^2 πόσο είναι η άλλη του διάσταση;
Επειδή $E = \alpha \cdot \beta$ $27 = 9 \cdot \beta$ θα είναι $\beta = 27 : 9$ άρα $\beta = 3 \text{ dm}^2$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΓΚΟΥ

Μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το **κυβικό μέτρο (m^3)**, ένας κύβος δηλαδή με ακμή 1m.

Υποδιαιρέσεις :

- i. Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) ή κυβική παλάμη, που είναι κύβος με ακμή 1 dm.

$$1 \text{ dm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3$$

- ii. Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) ή κυβικός πόντος, που είναι κύβος με ακμή 1 cm.

$$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1000000} \text{ m}^3 = 0,000001 \text{ m}^3$$

- iii. Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) ή κυβικό χιλιοστό, που είναι κύβος με ακμή 1 mm.

$$1 \text{ mm}^3 = \frac{1}{1000000000} \text{ m}^3 = 0,000000001 \text{ m}^3$$

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

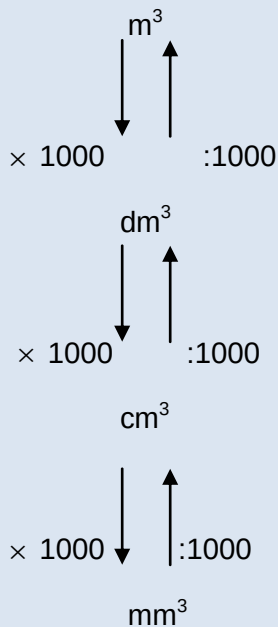
→ σχέσεις μεταξύ των μονάδων :

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000000 \text{ cm}^3 = 1000000000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1000000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

Μετατροπές :



→ Όταν θέλουμε να εκφράσουμε όγκο υγρών το dm^3 το ονομάζουμε **λίτρο (l)**, ενώ το cm^3 το λέμε **χιλιοστόλιτρο (ml)**.

Επομένως : $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml} \quad \text{άρα } 1 \text{ l} = 1000 \text{ ml} \quad \text{αφού } 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

Π.χ.

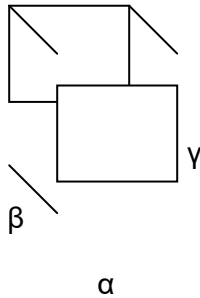
1. να γίνουν οι μετατροπές σε m^3 :
 - i. $35 \text{ dm}^3 \rightarrow 35:1000=0,035 \text{ m}^3$
 - ii. $7235 \text{ cm}^3 \rightarrow 7235:1000000=0,007235 \text{ m}^3$
2. να γίνουν οι μετατροπές σε cm^3 :
 - i. $7,28 \text{ m}^3 \rightarrow 7,28 \cdot 1000000=7280000 \text{ cm}^3$
 - ii. $0,05 \text{ dm}^3 \rightarrow 0,05 \cdot 1000=50 \text{ cm}^3$
 - iii. $25 \text{ mm}^3 \rightarrow 25:1000=0,025 \text{ cm}^3$

3. να γίνουν οι μετατροπές σε λίτρα :

- i. $5,2 \text{ m}^3 \rightarrow 5,2 \cdot 1000 = 5200 \text{ l}$
- ii. $700 \text{ dm}^3 \rightarrow 700 \text{ dm}^3 = 700 \text{ l}$
- iii. $62,3 \text{ cm}^3 \rightarrow 62,3 \text{ cm}^3 = 62,3 \text{ ml}$, $62,3 : 1000 = 0,0623 \text{ l}$

→ Για τον υπολογισμό του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις 3 διαστάσεις του. Δηλαδή ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με το γινόμενο των διαστάσεων του, μετρημένων με την ίδια μονάδα μήκους.

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$



Προσοχή!!!

Αν π.χ $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 3 \text{ cm}$, $\gamma = 0,04 \text{ m}$ δε μπορούμε να πούμε

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 5 \cdot 3 \cdot 0,04$$

γιατί το ύψος δίνεται σε μέτρα, επομένως χρειάζεται μετατροπή,

$$\gamma = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}.$$

$$\text{Άρα } V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ cm}^3.$$

Στην αντίστοιχη μονάδα όγκου, με τις μονάδες μήκους, θα εκφραστεί και ο όγκος που υπολογίσαμε (π.χ σε cm^3 οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου άρα και σε cm^3 ο όγκος που θα υπολογίσουμε).

→ Ο κύβος είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όπου όλες οι έδρες του είναι τετράγωνα ακμής α . Επομένως θα είναι

$$V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$$

Π.χ.

Να υπολογιστεί το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου όταν ο όγκος του είναι $0,04 \text{ m}^3$, το πλάτος 4 dm και το ύψος 2 dm .

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Επειδή $V=0,04 \text{ m}^3$ και οι 2 διαστάσεις σε dm θα κάνουμε μετατροπή

$$0,04 \cdot 1000 = 40 \text{ dm}^3$$

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \text{ δηλ. } 40 = \alpha \cdot 4 \cdot 2$$

$$40 = 8 \cdot \alpha \quad \text{άρα } \alpha = 40 : 8 = 5 \text{ dm}$$

Π.χ.

Να τραπούν σε μέτρα τα μήκη

i. $5 \text{ m } 7 \text{ cm} = 5,07 \text{ m}$

ii. $9 \text{ dm } 2 \text{ mm} = 0,902 \text{ m} \quad \left(\frac{9}{10} + \frac{2}{1000} = 0,9 + 0,002 = 0,902 \right)$

iii. $11 \text{ dm } 7 \text{ cm} = \frac{11}{10} + \frac{7}{100} = 1,1 + 0,07 = 1,17 \text{ m}$

Ασκήσεις

Α' ομάδα

1) Να συμπληρώσετε τα κενά :

i. $12 \text{ m} = \dots \text{ cm}$ ii. $2 \text{ m} = \dots \text{ mm}$

iii. $6 \text{ m} = \dots \text{ dm}$ iv. $18 \text{ dm} = \dots \text{ m}$

v. $25 \text{ cm} = \dots \text{ mm}$ vi. $35 \text{ cm} = \dots \text{ dm}$

2) Να συμπληρώσετε τα κενά :

i. $0,3 \text{ m} = \dots \text{ dm} = \dots \text{ cm} = \dots \text{ mm}$

ii. $1,7 \text{ dm} = \dots \text{ m} = \dots \text{ cm} = \dots \text{ mm}$

iii. $0,35 \text{ cm} = \dots \text{ m} = \dots \text{ dm} = \dots \text{ mm}$

iv. $2750 \text{ mm} = \dots \text{ cm} = \dots \text{ dm} = \dots \text{ m}$

v. $12 \text{ km} = \dots \text{ m} = \dots \text{ dm} = \dots \text{ cm}$

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- 3) Να μετατρέψετε σε dm^2 τα επόμενα εμβαδά :
- i. $0,18 \text{ m}^2$ ii. $6,4 \text{ cm}^2$ iii. 15653 mm^2 iv. $0,002 \text{ cm}^2$
- 4) Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω εμβαδά :
- i. $18,75 \text{ m}^2$ ii. $0,2 \text{ dm}^2$ iii. 33148 mm^2 iv. $6,7 \text{ mm}^2$
- 5) Να μετατραπούν σε m^2 τα παρακάτω εμβαδά :
- i. 15 km^2 ii. 1562 cm^2 iii. $0,63572 \text{ mm}^2$ iv. $8,25 \text{ dm}^2$
- 6) Να συμπληρώσετε τις ισότητες :
- i. $1,35 \text{ km}^2 = \dots \text{m}^2 = \dots \text{dm}^2$
- ii. $37,2 \text{ m}^2 = \dots \text{dm}^2 = \dots \text{cm}^2$
- iii. $5682 \text{ mm}^2 = \dots \text{cm}^2 = \dots \text{dm}^2 = \dots \text{m}^2$
- iv. $518 \text{ dm}^2 = \dots \text{m}^2 = \dots \text{km}^2$
- 7) Να γίνουν οι παρακάτω μετατροπές :
- α) πόσα m^2 είναι τα : i. 60 στρέμματα
- ii. 2,5 στρέμματα
- β) πόσα στρέμματα είναι τα : i. 4500 m^2
- ii. 25670 m^2
- 8) Να μετατρέψετε τους παρακάτω όγκους σε cm^3 :
- α) $2,55 \text{ m}^3$ β) $0,85 \text{ dm}^3$ γ) 1556 mm^3
- 9) Να μετατρέψετε τους παρακάτω όγκους σε dm^3 :
- α) $6,75 \text{ m}^3$ β) 1568 cm^3 γ) 1600 mm^3
- 10) Να μετατρέψετε τους παρακάτω όγκους σε m^3 :
- α) 2000 cm^3 β) 1500 dm^3 γ) 6050000 mm^3

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

δ) 4,3 l ε) 2500 ml στ) 375 dm³

11) Να μετατρέψετε τους παρακάτω όγκους σε l :

α) 1000 cm³ β) 2 dm³ γ) 3,5 m³ δ) 5187 ml

12) Να βρείτε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου όταν είναι :

α) α=18 m και β=11 m

β) α=8 dm και β=13 cm

13) Ένα τετράγωνο έχει πλευρά α=5,6 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του σε dm².

14) Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 125 cm² και πλάτος 5 cm. Να βρείτε το μήκος του ορθογωνίου.

15) Να βρεθεί ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις :

α) α=5,5 m β=3 m γ=10 m

β) α=2 m β=20 dm γ=35 cm

16) Να βρεθεί ο όγκος κύβου με ακμή 5 m.

17) Να βρεθεί ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του οποίου η βάση έχει εμβαδόν 25 m² και το ύψος του είναι 250 cm.

18) Να βάλετε τα παρακάτω μήκη σε αύξουσα σειρά: 1853m, 385dm, 7824cm και 0,23 km

Β' ομάδα

1) Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 36 cm.

i. Να βρείτε την πλευρά του.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

- 2) Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 120 m^2 και πλάτος 40 dm . Να βρείτε την περίμετρό του.
- 3) Μια πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 30 m , πλάτος 15 m και βάθος $2,5 \text{ m}$. Αυτή είναι γεμάτη με νερό έτσι ώστε η επιφάνεια του νερού να απέχει από την επιφάνεια της πισίνας $0,5 \text{ m}$. Πόσα λίτρα νερό έχει η πισίνα;
- 4) Ένα δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, είναι γεμάτο με νερό. Η βάση του παραλληλεπιπέδου είναι τετράγωνο πλευράς $4,5 \text{ m}$ και το ύψος του είναι $2,5 \text{ m}$. Πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού αν αφαιρέσουμε από το δοχείο 1 m^3 νερό;

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΧΡΟΝΟΥ

Μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το **δευτερόλεπτο (s)**. Άλλες μονάδες μέτρησης είναι

- i. Το **λεπτό (min)** που είναι $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ και
 - ii. Η **ώρα (h)** που είναι $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$.
- Άρα $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

Επίσης η ημέρα χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης για μεγάλες χρονικές διάρκειες και είναι $1 \text{ ημέρα} = 24 \text{ h}$, ο μήνας που είναι $1 \text{ μήνας} = 30 \text{ ημέρες}$ και το έτος που είναι

$$1 \text{ έτος} = 12 \text{ μήνες} = 360 \text{ ημέρες}.$$

Π.χ.

- 1) Ποιά η χρονική διάρκεια από

$$\begin{array}{r} \text{i. } 9.20 \text{ h μέχρι } 17.45 \text{ h;} \\ \quad \quad \quad 17 \text{ h } 45 \text{ min} \\ \quad \quad \quad - 9 \text{ h } 20 \text{ min} \end{array}$$

$$8 \text{ h } 25 \text{ min}$$

- ii. Από 11.15 h μέχρι 20.05 h;

$$\begin{array}{r}
 19 \text{ h } 65 \text{ min} \\
 \hline
 20 \text{ h } 05 \text{ min} \\
 - 11 \text{ h } 15 \text{ min} \\
 \hline
 8 \text{ h } 50 \text{ min}
 \end{array}$$

2) Η αμαξοστοιχία ξεκινά από την πόλη Α στις 7.20 το πρωί και μετά από 35 λεπτά φτάνει στην πόλη Β. Εάν εκεί κάνει στάση για 10 λεπτά ποιά θα είναι η χρονική διάρκεια του ταξιδιού από την πόλη Β μέχρι την πόλη Γ, εάν στην Γ φτάσει στις 10.05;

$$\begin{array}{r}
 7 \text{ h } 20 \text{ min} \\
 + \quad 35 \text{ min} \\
 \hline
 \end{array}$$

7 h 55 min άρα στις 7.55 φτάνει η αμαξοστοιχία στην πόλη Β.

$$\begin{array}{r}
 7 \text{ h } 55 \text{ min} \\
 + \quad 10 \text{ min} \\
 \hline
 7 \text{ h } 65 \text{ min}
 \end{array}$$

τα 65 min όμως είναι 1 h και 5 min, άρα θα φύγει από την πόλη Β στις 8.05.

Για να βρούμε την χρονική διάρκεια από την Β στην Γ θα πούμε :

$$\begin{array}{r}
 10 \text{ h } 05 \text{ min} \\
 - \quad 8 \text{ h } 05 \text{ min} \\
 \hline
 2 \text{ h } 00 \text{ min}
 \end{array}$$

επομένως η διάρκεια του ταξιδιού από την Β στην Γ είναι 2 ώρες.

(βλέπε επίσης Εφαρμογή 3 σχολικού βιβλίου σελ. 66)

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΑΖΑΣ

Μάζα ενός σώματος λέμε την ποσότητα ύλης από την οποία αποτελείται. Μονάδα μέτρησης της μάζας είναι το **1 κιλό ή χιλιόγραμμα (kg)**.

→ Πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο τόνος (t) που είναι μάζα ίση με 1000 kg, δηλαδή $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$

→ Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι

i. Το γραμμάριο (g) που είναι μάζα ίση με $\frac{1}{1000} \text{ kg}$, δηλ. $1 \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{ kg} = 0,001 \text{ kg}$
ή $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$.

ii. Το χιλιοστόγραμμα (mg) που είναι μάζα ίση με το $\frac{1}{1000} \text{ g}$, δηλ.
 $1 \text{ mg} = \frac{1}{1000} \text{ g} = 0,001 \text{ g}$ ή $1 \text{ g} = 1000 \text{ mg}$

Μεταξύ τους σχέσεις: $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 1000000 \text{ mg}$$

$$1 \text{ g} = 1000 \text{ mg}$$

Π.χ.

Να γίνουν οι μετατροπές :

$$1257 \text{ g} \rightarrow \text{kg} : 1257 : 1000 = 1,257 \text{ kg}$$

$$15,2 \text{ kg} \rightarrow \text{g} : 15,2 \cdot 1000 = 15200 \text{ g}$$

$7,8 \text{ t} \rightarrow \text{g} :$ μετατρέπουμε πρώτα τους τόνους σε κιλά:

$$7,8 \text{ t} \cdot 1000 = 7800 \text{ kg} \text{ και στη συνέχεια τα κιλά σε}$$

$$\text{γραμμάρια } 7800 \text{ kg} \cdot 1000 = 7800000 \text{ g}$$

$$5423 \text{ mg} \rightarrow \text{kg} : 5423 \text{ mg} : 1000 = 5,423 \text{ g} \text{ και } 5,423 \text{ g} : 1000 = 0,005423 \text{ kg}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Να μετατραπούν σε min οι παρακάτω χρονικές διάρκειες :
 i. 5 h 45 min ii. 3 h 25 min iii. 1,5 h 25 min

- 2) Να μετατραπούν σε s οι παρακάτω χρονικές διάρκειες :
 i. 2 h 35 min 10 s ii. 175 min 65 s
 iii. 90 min 35 s iv. 2,5 h 150 min

- 3) Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα και τις διαφορές :
 α) 5 min 10 s + 15 min 55 s
 β) 1 h 55 min 45 s + 3 h 15 min 20 s
 γ) 18 min 20 s - 12 min 10 s
 δ) 6 h 30 s - 2 h 40 s

- 4) Να υπολογιστεί :
 α) το $\frac{1}{3}$ της ώρας β) το $\frac{1}{10}$ του λεπτού γ) το $\frac{1}{3}$ της ημέρας
 δ) τα $\frac{2}{10}$ της ώρας ε) τα $\frac{3}{5}$ της ώρας

- 5) Να συμπληρώσετε τις ισότητες :
 i. 1,5 kg=.....g
 ii. 0,03 g=.....mg
 iii. 0,0001 mg=.....g
 iv. 65000 mg=.....t
 v. 0,02 kg=.....g
 vi. 0,007 t=.....g
 vii. 0,35 g=.....mg
 viii. 3500 g=.....kg

Β' ομάδα

- 1) Μια βρύση η οποία είναι χαλασμένη στάζει ανά 3 s μια σταγόνα νερού όγκου 40 mm^3 . Να βρείτε του όγκο του νερού σε dm^3 που θα έχει στάξει η βρύση
α) σε 1 h β) σε 5 h
- 2) Η παροχή μιας βρύσης σε νερό είναι 5 l το λεπτό. Σε πόσο χρόνο η βρύση αυτή θα γεμίσει το μισό ενός δοχείου με διαστάσεις 2 m, 1,5 m και 0,80 m ;
- 3) Να υπολογίσετε το βάρος ενός σύρματος σιδήρου που είναι τυλιγμένο σε καρούλι αν είναι γνωστό ότι το μήκος του σύρματος είναι 55 m και ότι ζυγίζει 0,275 kg ανά μέτρο.
- 4) Ένας οινοπαραγωγός έκανε μίγμα από 55 kg κρασί των 4,4 ευρώ το κιλό και 35 kg κρασί των 3,8 ευρώ το κιλό. Πούλησε το μίγμα και πήρε 587 ευρώ. Πόσα ευρώ κέρδισε;

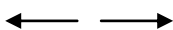
4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§4.1 Η έννοια της εξίσωσης

Εξίσωση ονομάζουμε κάθε ισότητα που περιέχει αριθμούς και μια μεταβλητή. Η μεταβλητή μέσα σε μια εξίσωση ονομάζεται **άγνωστος**.

Π.χ

$$x+3 = 12 \quad (\text{εξίσωση, το } x \text{ είναι ο άγνωστος})$$



1° 2°

μέλος μέλος

→ Στη θέση της μεταβλητής, του αγνώστου δηλαδή, μπορούμε να βάλουμε διάφορες τιμές. Με κάποια από αυτές θα προκύψει ισότητα που αληθεύει. Τότε λέμε ότι εκείνος ο αριθμός επαληθεύει την εξίσωση, είναι δηλαδή **λύση(ή ρίζα) της εξίσωσης.**

Π.χ

$$x+3=12$$

εάν βάλω στη θέση του x τους αριθμούς 7,8,9,10 θα έχω

$$7+3=12$$

$$8+3=12$$

$$9+3=12 \rightarrow \text{αληθεύει}$$

$$10+3=12$$

Άρα ο αριθμός 9 είναι η λύση της εξίσωσης.

Προσοχή!!!

Είτε γράψουμε για παράδειγμα $x+a=b$, είτε $b=x+a$ θα βρούμε την ίδια λύση. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε την ίδια εξίσωση, την ίδια ισότητα.

→ Μία εξίσωση λέγεται αόριστη ή ταυτότητα όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

Π.χ

$$0 \cdot x = 0$$

$$x = x$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αόριστες, γιατί όλοι οι αριθμοί επαληθεύουν τις ισότητες.

→ Μία εξίσωση λέγεται αδύνατη όταν κανένας αριθμός δεν είναι λύση της.

Π.χ

$$0 \cdot x = 2$$

$$x+1 = x+2$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αδύνατες, γιατί κανένας αριθμός δεν επαληθεύει τις ισότητες.

→ Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται επίλυση της εξίσωσης.

→ Στην περίπτωση που έχουμε γινόμενο αριθμού με μεταβλητή, σύμφωνα με τον ορισμό του πολλαπλασιασμού θα έχουμε :

$$0 \cdot x = 0$$

$$1 \cdot x = x$$

$$2 \cdot x = x+x$$

$$3 \cdot x = x+x+x \text{ κτλ}$$

όπου x οποιοσδήποτε φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Ή αλλιώς, όταν έχουμε άθροισμα με μεταβλητές, τότε με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας θα έχουμε :

$$x + x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = (1+1) \cdot x = 2x$$

$$3x + 2x = (3+2) \cdot x = 5x$$

Π.χ.

Να βρεθεί : 1) το διπλάσιο ενός αριθμού

2) τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού και

3) να προστεθεί ο αριθμός αυτός με τον αριθμό 5.

Παριστάνω τον αριθμό με το γράμμα a .

Βρίσκω 1) το διπλάσιό του: $2 \cdot a$

2) τα $\frac{2}{3}$ του: $\frac{2}{3} \cdot a$

3) τον προσθέτω με το 5 : $a+5$

Π.χ.

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης $x + 7 = 11$

Βάζοντας στην εξίσωση στη θέση του x το 2, θα έχουμε

$$2 + 7 = 11 \quad \text{που δεν αληθεύει.}$$

Επομένως το 2 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

Π.χ.

Να γραφτούν συντομότερα οι εκφράσεις:

α) $x + x + x = 3 \cdot x = 3x$

β) $a + a + b + b + b + \gamma = 2a + 3b + \gamma$

γ) $15a + 23a + 10a = 48a$

Επίλυση βασικών εξισώσεων:

Σύμφωνα με τον ορισμό των πράξεων έχουμε:

α) όταν $x + a = b$ τότε $x = b - a$ (ομοίως και για $a + x = b$)

β) όταν $x - a = b$ τότε $x = b + a$

γ) όταν $a - x = b$ τότε $x = a - b$

δ) όταν $a \cdot x = b$ τότε $x = b : a$ (ομοίως και για $x \cdot a = b$)

ε) όταν $x : a = b$ τότε $x = a \cdot b$

στ) όταν $a : x = b$ τότε $x = a : b$

Π.χ.

α) $x + 3 = 24$ τότε $x = 24 - 3$ ή $x = 21$

β) $x - 12 = 32$ τότε $x = 32 + 12$ ή $x = 44$

γ) $92 - y = 11$ τότε $y = 92 - 11$ ή $y = 81$

δ) $3x = 9$ τότε $x = 9 : 3$ ή $x = 3$

ε) $x : 10 = 51$ τότε $x = 51 \cdot 10$ ή $x = 510$

στ) $81 : a = 3$ τότε $a = 81 : 3$ ή $a = 27$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Να γράψετε τις παρακάτω εκφράσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής :
 - α) Ένας αριθμός αυξημένος κατά 5.
 - β) Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά οκτώ.
 - γ) Το διπλάσιο ενός αριθμού.
 - δ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένου κατά 4.
 - ε) Από το 7 αφαιρούμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το 5
 - στ) Από τον αριθμό 10 αφαιρούμε το διπλάσιο ενός αριθμού και βρίσκουμε το 6.

- 2) Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω εκφράσεις :

i.	$x+8$	ii.	$2x-1$	iii.	$7-3x$
iv.	$2x+4=12$	v.	$x<2$	vi.	$3x>6$
vii.	$3x+1>8$	viii.	$2x+1\neq 5$		

- 3) Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις :
 - i. Ο 5 είναι λύση της εξίσωσης $25=x+20$
 - ii. Ο 7 είναι λύση της εξίσωσης $21=3x$
 - iii. Ο 3 είναι λύση της εξίσωσης $2x+1=x+4$
 - iv. Ο 6 είναι λύση της εξίσωσης $x : 2=12$
 - v. Ο 2 είναι λύση της εξίσωσης $10 : x = x+3$

- 4) Ποιος από τους αριθμούς 0 , 2 , 5 , 7 επαληθεύει την εξίσωση $2x+3=13$;

- 5) Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε απλούστερη μορφή :

$A = x + x + x + x + x$	$B = 3x + 3x + 3x$	$\Gamma = x + x + x + x - x - x$
$\Delta = x + x + 2x$	$E = x + 2y + 5x + 3y$	$Z = 10x - 3y - 7x + 4y + x$

- 6) Να λυθούν οι εξισώσεις :
 - i. $5+x=16$
 - ii. $(x+2)+3=16$
 - iii. $x-15=3$

- iv. $34-x=18$ v. $x \cdot 5=35$ vi. $x \cdot 18=90$
 vii. $x : 4=5$ viii. $x : 30=6$ ix. $10 : x=2$
 x. $7 : x=1$

7) Να λυθούν οι εξισώσεις :

- i. $\frac{x+4}{7}=1$ ii. $\frac{x-10}{4}=0$ iii. $\frac{7}{10}=\frac{5}{\beta}$
 iv. $\frac{3}{8}x=1$ v. $10x=1$ vi. $\frac{3}{5}=\frac{x}{40}$
 vii. $\frac{5}{8}+x=\frac{15}{8}$ viii. $\frac{3}{4}+\frac{x+2}{8}=\frac{13}{8}$

Β' ομάδα

- Αν $\alpha \cdot \beta=12$ και $\gamma=3$ να υπολογίσετε το γινόμενο $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- Ένα ορθογώνιο έχει μήκος α και πλάτος β .
 α) Να εκφράσετε συμβολικά την περίμετρο και το εμβαδόν του.
 β) Εάν το $\alpha=3\text{m}$ και το εμβαδόν του είναι 12 m^2 , να υπολογιστεί το πλάτος του β και η περιμετρός του.
- Δίνονται οι εξισώσεις $x=2$ (1) και $2x+\alpha=7$ (2).
 α) Ποια είναι η λύση της εξίσωσης (1) ;
 β) Αν οι δύο εξισώσεις έχουν την ίδια λύση να βρείτε τον α .
- Το τετραπλάσιο ενός αριθμού είναι το 16. Ποιος είναι ο αριθμός ;

§4.2 Επίλυση προβλημάτων

Για την επίλυση προβλημάτων με την βοήθεια των εξισώσεων χρησιμοποιούμε την εξής διαδικασία :

- ❖ Προσδιορίζουμε τον άγνωστο του προβλήματος και τον εκφράζουμε με μια μεταβλητή(x, y, z ή ω κτλ.) ώστε να είναι ο άγνωστος της εξίσωσης
- ❖ Εκφράζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του προβλήματος με τη βοήθεια του αγνώστου
- ❖ Περιγράφουμε με μια εξίσωση το πρόβλημα
- ❖ Επιλύουμε την εξίσωση
- ❖ Επαληθεύουμε τη λύση που βρήκαμε.

Π.χ

Ο Κώστας είναι βαρύτερος από τη φίλη του τη Μαρία κατά 35 κιλά. Και οι δύο μαζί ζυγίζουν 135 κιλά. Να βρείτε πόσα κιλά είναι ο Κώστας και πόσα η Μαρία.

Εάν συμβολίσουμε με x τα κιλά που ζυγίζει η Μαρία, τότε ο Κώστας θα ζυγίζει $x+35$ κιλά.

Και οι δύο μαζί ζυγίζουν 135 κιλά, επομένως έχουμε

$$x + (x + 35) = 135$$

$$x + x + 35 = 135$$

$$2x + 35 = 135$$

$$2x = 135 - 35$$

$$2x = 100 \quad \text{ή} \quad x = 100 : 2 \quad \text{ή} \quad x = 50$$

Επομένως, η Μαρία ζυγίζει 50 κιλά, ενώ ο Κώστας ζυγίζει $50 + 35 = 85$ κιλά.

Π.χ

Το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών είναι 55. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Εάν ο πρώτος αριθμός είναι ο x , τότε ο δεύτερος θα είναι ο $x+1$, αφού είναι διαδοχικοί αριθμοί.

$$\text{Θα είναι λοιπόν } x + (x + 1) = 55$$

$$x + x + 1 = 55$$

$$2x + 1 = 55$$

$$2x = 55 - 1$$

$$2x = 54$$

$$x = 54 : 2 \quad \text{ή} \quad x = 27$$

Άρα ο πρώτος αριθμός είναι ο 27, ενώ ο δεύτερος θα είναι ο $27 + 1 = 28$.

(βλέπε παραδείγματα και εφαρμογές στο σχολικό βιβλίο §4.3 σελ76-77)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Ρώτησαν κάποιον για την ηλικία του και απάντησε ότι μετά από 20 χρόνια θα είναι 75 χρονών. Ποια είναι η σημερινή του ηλικία ;
- 2) Δύο άτομα, ο α και ο β, μοιράστηκαν το ποσό των 350000 ευρώ. Ο α πήρε 130000 ευρώ περισσότερες από τον β. Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.
- 3) α) Αυξάνουμε έναν αριθμό κατά 10 και βρίσκουμε τον αριθμό 22. Ποιος είναι ο αριθμός ;
β) Στο πενταπλάσιο ενός αριθμού προσθέτουμε το 2 και βρίσκουμε το 7. Ποιος είναι ο αριθμός ;
- 4) Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 4 cm και 9 cm. Να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου.
- 5) Η Α' τάξη ενός γυμνασίου έχει διπλάσιους μαθητές από τη Β' τάξη και η Γ' τάξη έχει τριπλάσιους από τη Β' τάξη. Αν οι μαθητές των τριών τάξεων είναι 360, πόσους μαθητές έχει η κάθε τάξη ;

- 6) Τρεις διαδοχικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 1059. Να βρεθούν αυτοί οι αριθμοί.
7) Το 6πλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 9 είναι ίσο με τον αριθμό αυξημένο κατά 16. Να βρείτε τον αριθμό αυτό

Β' ομάδα

- 1) Εάν το $\frac{1}{3}$ ενός αριθμού διαφέρει από το $\frac{1}{4}$ του ίδιου αριθμού κατά 6, να βρεθεί ο αριθμός.
- 2) Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα ποσό. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{5}{9}$ του ποσού, ο δεύτερος τα $\frac{2}{7}$ και το υπόλοιπο ποσό το μοιράστηκαν και οι τρεις εξίσου. Αν ο δεύτερος πήρε 19200 ευρώ, να βρεθούν τα ποσά των δύο άλλων.
- 3) Μια μοδίστρα αγόρασε ύφασμα και έδωσε 750 ευρώ. Αν αγόραζε 10 μέτρα παραπάνω, θα έδινε συνολικά 897 ευρώ. Να βρείτε πόσα μέτρα ύφασμα αγόρασε.
- 4) Ο επόμενος του φυσικού $n+1$ είναι ο 17. να βρείτε τον φυσικό n .
- 5) Ο Κώστας έχει 30 € λιγότερα από την Αντιγόνη και η Κατερίνα έχει τα διπλάσια χρήματα από την Αντιγόνη. Όλοι μαζί θέλουν να αγοράσουν ένα δώρο στον Πέτρο που κοστίζει 142 € όμως χρειάζονται άλλα 12 €. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

5. ΠΟΣΟΣΤΑ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ

Για την επίλυση διάφορων προβλημάτων, που χρειάζεται να γίνει σύγκριση κλασμάτων έχει επικρατήσει να τρέπουμε τα κλάσματα αυτά σε δεκαδικά κλάσματα με παρονομαστή το 100.

Π.χ

$$\frac{17}{20}, \frac{15}{25}$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{85}{100}$$

$$\frac{15}{25} = \frac{15 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{60}{100}$$

$$\text{Επομένως } \frac{17}{20} > \frac{15}{25}$$

Κάθε δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100, $\frac{\alpha}{100}$, το συμβολίζουμε α% και διαβάζεται «ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙ ΤΟΙΣ ΕΚΑΤΟ» ή απλά «ΠΟΣΟΣΤΟ».

Το ποσοστό α% ενός αριθμού β είναι $\frac{\alpha}{100} \cdot \beta$.

→ Εκτός από το ποσοστό επί τοις εκατό έχουμε και το «ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙ ΤΟΙΣ ΧΙΛΙΟΙΣ» που συμβολίζεται α‰ και σημαίνει κλάσμα με παρονομαστή το χίλια.

Π.χ

$$2\text{‰} = \frac{2}{1000} \text{ και διαβάζεται 2 τοις χιλίοις.}$$

→ Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha\% > \beta\%$ και αντίστροφα.

→ Ισχύει πάντα ότι $\alpha\% > \alpha\text{‰}$

ΠΟΣΟΣΤΑ

Π.χ

Να μετατραπούν τα παρακάτω ποσοστά σε κλάσματα :

$$8\% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} \qquad 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$37,8\% = \frac{37,8}{100} = \frac{378}{1000} = \frac{189}{500} \qquad 102\% = \frac{102}{100} = \frac{51}{50}$$

Π.χ

Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά :

$$\frac{7}{100} = 7\% \qquad \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{100} = 10\% \qquad \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

$$\frac{4}{25} = \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{16}{100} = 16\%$$

ή

$$\frac{4}{25} = 4 \div 25 = 0,16 = \frac{16}{100} = 16\%$$

$$\frac{8}{29} = 8 \div 29 = 0,27 = \frac{27}{100} = 27\%$$

$$\frac{110}{3000} = \frac{11}{300} = \frac{11:3}{300:3} = \frac{3,666}{100} = 0,0366\%$$

Π.χ

Να βρεθεί το 26% του αριθμού 236.

$$\text{Θα είναι } \frac{26}{100} \cdot 236 = \frac{6136}{100} = 61,36.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Α' ομάδα**

1) Να γράψετε με τη μορφή ποσοστών τα παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{25}$

β) $\frac{3}{5}, \frac{11}{25}, \frac{14}{50}$

γ) $\frac{8}{100}, \frac{54}{100}, \frac{21}{100}$

δ) $\frac{15,7}{100}, \frac{3,4}{100}, \frac{0,7}{100}, \frac{1,62}{100}$

ε) $\frac{4,5}{250}, \frac{50}{600}, \frac{36}{1000}, \frac{28}{2000}$

2) Να γράψετε με μορφή κλάσματος τα παρακάτω ποσοστά :

α) 3% , 12% , 27%

β) 3,7% , 8,33% , 55,1% , 73,2%

γ) 351% , 157,3% , 115,5%

δ) 0,55% , 0,17% , 0,115% , 7,25%

3) Να γράψετε με μορφή ποσοστών τους παρακάτω δεκαδικούς :

α) 0,1 , 0,24 , 0,60

β) 0,05 , 0,003 , 0,055

γ) 1,1 , 1,12 , 1,35 , 3,25

δ) 37,8 , 62,50 , 15,20 , 33,05

4) Να υπολογίσετε :

i. Το 5% του 1 kg

ii. Το 15% του 1 m

- iii. Το 1,6% των 150 cm
- iv. Το 3,5% των 6 m
- v. Το 6% των 2 l
- vi. Τα 25% των 2 στρεμμάτων
- vii. Τα 4,5% των 150 g
- viii. Το 3% του 1 kg

Β' ομάδα

- a. Το σαπούνι χάνει 15% του αρχικού του βάρους όταν ξεραθεί. Πόσο θα ζυγίζουν 2500 kg νωπό σαπούνι όταν ξεραθούν;
- b. Για να κατασκευάσουμε ένα κεραμικό χρησιμοποιήσαμε 5 kg πηλό και 3 kg άργιλο. Να υπολογίσετε το ποσοστό του πηλού και του άργιλου που υπάρχει στο κεραμικό.
- c. Οι ελιές όταν επεξεργαστούν μας δίνουν 25% λάδι. Πόσα κιλά ελιές πρέπει να επεξεργαστούμε για να πάρουμε 5,5 t λάδι ;
- d. Τα σταφύλια μας δίνουν 65% κρασί. Ένας έμπορος κρασιού, για να γεμίσει 5 βαρέλια των 300 kg, πόσα ευρώ θα πληρώσει για να αγοράσει σταφύλια προς 0,8 ευρώ το κιλό ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΣΟΣΤΑ

Προβλήματα με ΦΠΑ :

Π.χ

Να βρείτε τον ΦΠΑ σ'ένα προϊόν αξίας 25000 ευρώ, αν έχει συντελεστή ΦΠΑ 19%.

Ο ΦΠΑ που αντιστοιχεί στην τιμή 25000 ευρώ με συντελεστή 19%, είναι το

$$19\% = \frac{19}{100} \text{ της αρχικής αξίας, δηλ. } \frac{19}{100} \cdot 25000 = 0.19 \cdot 25000 = 4750 \text{ ευρώ}$$

Επομένως εμείς για το προϊόν αυτό που αξίζει 25000 ευρώ θα πληρώσουμε

$$25000 + 4750 = 29750 \text{ ευρώ}$$

Π.χ

Για την αγορά ενός προϊόντος που έχει συντελεστή ΦΠΑ 19% πληρώσαμε συνολικά (αξία + ΦΠΑ) 650 ευρώ. Να υπολογίσετε :

α) την αξία του προϊόντος χωρίς ΦΠΑ

β) τον ΦΠΑ

α) Ο ΦΠΑ είναι $19\% = \frac{19}{100}$ της αρχικής τιμής, άρα η τιμή του προϊόντος με

ΦΠΑ θα είναι $\frac{100}{100} + \frac{19}{100} = \frac{119}{100}$ της αρχικής αξίας.

Επομένως αν τα $\frac{119}{100}$ της αρχικής αξίας είναι 650 ευρώ

το $\frac{1}{100}$ είναι 650:119

οπότε τα $\frac{100}{100}$ είναι $\frac{650}{119} \cdot 100 = 546.22$ ευρώ.

ή αλλιώς

αν x είναι η αξία του προϊόντος χωρίς ΦΠΑ, τότε τα $\frac{119}{100}$ της αρχικής

αξίας είναι

$$650 \text{ ευρώ} , \text{ δηλ } \frac{119}{100} \cdot x = 650$$

$$x = 650 \div \frac{119}{100}$$

$$x = 650 \cdot \frac{100}{119}$$

$$x = 546,22 \text{ ευρώ.}$$

β) Ο ΦΠΑ είναι το 19% της αρχικής αξίας, δηλ. των 546.22 ευρώ. Επομένως

ο ΦΠΑ είναι ίσος με $\frac{19}{100} \cdot 546.22 = 103.78$ ευρώ περίπου

ή αλλιώς

ο ΦΠΑ είναι τα $\frac{19}{119}$ της συνολικής αξίας, δηλ. των 650 ευρώ

$$\frac{19}{119} \cdot 650 = 103.78 \text{ ευρώ}$$

Προβλήματα με τόκους-επιτόκια :

Τόκος (Τ) λέγεται το κέρδος που παίρνει κάποιος όταν αποταμιεύει σε κάποια τράπεζα ή δανείζει τα χρήματά του.

Επιτόκιο (Ε) λέγεται ο τόκος των 100 ευρώ για ένα έτος.

Π.χ

Επιτόκιο 3% σημαίνει ότι στα 100 ευρώ που καταθέτουμε, στο τέλος του χρόνου η τράπεζα θα μας δώσει επιπλέον 3 ευρώ, δηλ.

$$100 + 3 = 103 \text{ ευρώ}$$

Ο τόκος δηλ. θα είναι 3 ευρώ.

Ο τόκος είναι $T = \text{κεφάλαιο} \cdot \text{επιτόκιο}$, για ολόκληρο χρόνο , ενώ

$$T = \text{κεφάλαιο} \cdot \text{επιτόκιο} \cdot \frac{x}{12} , \text{ για } x \text{ μήνες (λιγότερο από χρόνο).}$$

Π.χ

Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 400000 ευρώ με επιτόκιο 3,5% για δύο χρόνια. να βρείτε τους τόκους που θα πάρουμε :

α) στο τέλος του πρώτου χρόνου

β) στο τέλος του δεύτερου χρόνου, με την προϋπόθεση ότι δεν θα βγάλουμε καθόλου χρήματα.

ΠΟΣΟΣΤΑ

α) Στο τέλος του πρώτου χρόνου θα πάρουμε τόκο ίσο με :

$$T = \text{κεφάλαιο} \cdot \text{επιτόκιο} = 400000 \cdot \frac{3,5}{100} = 14000 \text{ ευρώ.}$$

β) Το κεφάλαιο στο τέλος του πρώτου χρόνου γίνεται

$$400000 + 14000 = 414000 \text{ ευρώ.}$$

Ο τόκος που θα πάρουμε επομένως στο τέλος του δεύτερου χρόνου θα είναι

$$T = \text{κεφάλαιο} \cdot \text{επιτόκιο} = 414000 \cdot \frac{3,5}{100} = 14490 \text{ ευρώ.}$$

→ Για να υπολογίσουμε το ποσοστό μεταβολής ενός μεγέθους A, όταν αυτό μεταβληθεί κατά B, βρίσκουμε το πηλίκο $\frac{B}{A}$ το οποίο μετατρέπουμε σε ποσοστό.

Π.χ

Σε ένα αυτοκίνητο αξίας 11500 ευρώ γίνεται έκπτωση 1265 ευρώ. Να βρείτε το ποσοστό έκπτωσης.

Η έκπτωση των 1265 ευρώ είναι τα $\frac{1265}{11500}$ της αρχικής τιμής του αυτοκινήτου.

$$\text{Είναι } \frac{1265}{11500} = 0,11 = \frac{11}{100} = 11\%$$

Άλλος τρόπος

$$\text{Θέλουμε το } \frac{\alpha}{100} \text{ ώστε } \frac{\alpha}{100} \cdot 11500 = 1265$$

$$11500\alpha = 1265 \cdot 100$$

$$11500\alpha = 126500$$

$$\alpha = \frac{126500}{11500}$$

$$\alpha = 11$$

Άρα το ποσοστό έκπτωσης είναι 11%.

Π.χ

Ένα οικόπεδο κοστίζει 15500 ευρώ. Να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε αν :

α) η τιμή του αυξηθεί κατά 10%

β) μας γίνει έκπτωση 15%.

α) Η αύξηση 10% είναι ίση με $\frac{10}{100} \cdot 15500 = 1550$ ευρώ.

Επομένως θα πληρώσουμε για το οικόπεδο $15500 + 1550 = 17050$ ευρώ.

β) Η έκπτωση 15% είναι ίση με $\frac{15}{100} \cdot 15500 = 2325$ ευρώ.

Επομένως θα πληρώσουμε $15500 - 2325 = 13175$ ευρώ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Αγοράσαμε εμπόρευμα αξίας 45000 ευρώ και μας έγινε έκπτωση 5500 ευρώ. Να υπολογίσετε το ποσοστό έκπτωσης.
- 2) Ένα εμπορικό κατάστημα έκανε τζίρο τον μήνα Α 125000 ευρώ, ενώ τον μήνα Β 135000 ευρώ. Πόσο % αυξήθηκε ο τζίρος του καταστήματος ;
- 3) Ένας μεσίτης αγόρασε ένα σπίτι με 130000 ευρώ και το πούλησε με κέρδος 10% στην τιμή της αγοράς. Πόσα χρήματα κέρδισε ;
- 4) Αγοράσαμε ένα προϊόν και πληρώσαμε συνολικά μαζί με τον ΦΠΑ 366 ευρώ. Αν ο συντελεστής ΦΠΑ είναι 19% , να βρείτε : α) την αξία του προϊόντος και β) τον ΦΠΑ που πληρώσαμε για το προϊόν.
- 5) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσουμε στο ταμείο για είδη αξίας 180 ευρώ και 230 ευρώ αν έχουν συντελεστή ΦΠΑ 19%.

- 6) Ένα κεφάλαιο 150000 ευρώ τοκίζεται με επιτόκιο 3%. Να βρείτε το ποσό που θα εισπράξουμε μετά από 6 μήνες.
- 7) Ποιο είναι το κεφάλαιο το οποίο μας αποφέρει τόκο 964 ευρώ σε έναν χρόνο με επιτόκιο 3,2%;
- 8) Ένα κεφάλαιο 18000 ευρώ τοκίζεται με επιτόκιο 4,3%. Να βρείτε το ποσό που θα εισπράξουμε μετά από :
- α) 1 χρόνο
- β) 18 μήνες
- γ) 36 μήνες
- αν οι τόκοι στο τέλος κάθε έτους κεφαλοποιούνται.

Β' ομάδα

- 1) Ο μηνιαίος μισθός ενός υπαλλήλου αυξήθηκε κατά 25% και έτσι παίρνει τον χρόνο (12 μήνες) 21504 ευρώ. Να βρείτε πόσος ήταν ο αρχικός μηνιαίος μισθός.
- 2) Ένας έμπορος ηλεκτρικών ειδών αγοράζει μια συγκεκριμένη μάρκα τηλεόρασης με 300 ευρώ και την πουλάει 350 ευρώ. Ένας άλλος έμπορος ηλεκτρικών ειδών αγοράζει την τηλεόραση με 350 ευρώ και την πουλάει 400 ευρώ. Ποιος από τους δύο κερδίζει περισσότερα ;
- 3) Πόσος είναι ο χρόνος τοκισμού (σε μήνες) ενός κεφαλαίου 80000 ευρώ που απέφερε τόκο 2880 ευρώ με επιτόκιο 4,6%;
- 4) Κεφάλαιο 92000 ευρώ τοκίστηκε με επιτόκιο 4,5%. Σε πόσο χρόνο θα γίνει μαζί με τους τόκους 95450 ευρώ;
- 5) Σε έναν αθλητικό όμιλο τα $\frac{5}{12}$ των μελών του είναι γραμμένα στο ποδοσφαιρικό τμήμα. Τα $\frac{3}{7}$ των υπολοίπων ασχολούνται με το μπάσκετ και τα υπόλοιπα μέλη του ομίλου είναι γραμμένα στο τμήμα του τέννις.

ΠΟΣΟΣΤΑ

- α) Να βρείτε το ποσοστό των μελών που ασχολείται με το ποδόσφαιρο, το μπάσκετ και το τέννις.
- β) Να παρουσιάσετε τα παραπάνω ποσοστά με διαγράμματα (ραβδόγραμμα, ορθογώνιο διάγραμμα και κυκλικό διάγραμμα).
- 6) Ένα κράμα ζυγίζει 200 g και περιέχει 70 g χρυσό, 80 g άργυρο και λευκόχρυσο.
- α) Να βρείτε το ποσοστό κάθε μετάλλου στο κράμα
- β) Να παρουσιάσετε τα ποσοστά αυτά με διαγράμματα (ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα).

6. ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Για τον προσδιορισμό ενός σημείου στο επίπεδο, την θέση δηλ. που καταλαμβάνει στο επίπεδο, είναι απαραίτητοι 2 αριθμοί, ένα ζεύγος αριθμών δηλ. το οποίο το ονομάζουμε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών.

Π.χ

Το ζεύγος (3,6) προσδιορίζει τη θέση του σημείου Α.

Ο πρώτος αριθμός του ζεύγους, το 3 εδώ, συμβολίζει τη στήλη στην οποία βρίσκεται το σημείο και ονομάζεται τετμημένη του σημείου, ενώ ο δεύτερος αριθμός, το 6 εδώ, συμβολίζει τη γραμμή και ονομάζεται τεταγμένη του σημείου. Γι' αυτό εξάλλου το ζεύγος ονομάζεται διατεταγμένο. Γιατί αν αλλάξουμε τη σειρά των αριθμών θα γίνει (6,3) και τότε θα έχουμε τη θέση ενός άλλου σημείου.

Οι αριθμοί που αποτελούν το διατεταγμένο ζεύγους λέγονται συντεταγμένες του σημείου.

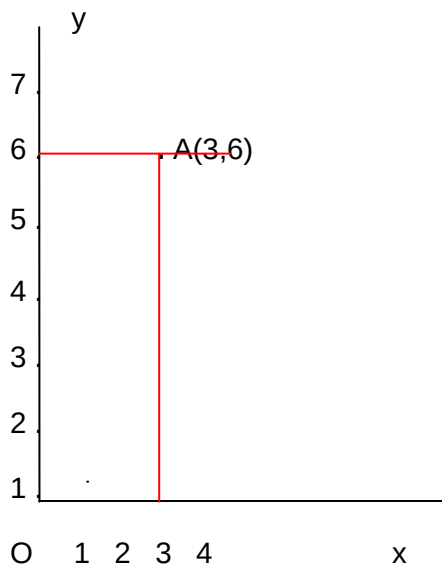
$$\overbrace{M(x, y)}^{\text{συντεταγμένες}}$$

↓ ↓

τετμημένη τεταγμένη

→ Για να παραστήσουμε σημεία στο επίπεδο, αρκεί να κατασκευάσουμε δύο κάθετους άξονες Οx και Οy και στο επίπεδο που δημιουργούν να προσδιορίσουμε τις θέσεις των σημείων που θέλουμε, σύμφωνα με τα διατεταγμένα ζεύγη αριθμών τους.

Π.χ



Οι κάθετοι άξονες Ox και Oy ονομάζονται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το O . Το O έχει συντεταγμένες $(0,0)$. Ο άξονας Ox λέγεται άξονας των τετμημένων ενώ ο Oy λέγεται άξονας των τεταγμένων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

1) Να παραστήσετε σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων τα σημεία :

- i. $A(1,0)$, $B(3,0)$, $\Gamma(5,0)$, $\Delta(7,0)$, $E(8,0)$
- ii. $Z(0,1)$, $H(0,2)$, $\Theta(0,4)$, $I(0,6)$

2) Να παραστήσετε σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων τα σημεία :

- i. $A(3,1)$, $B(3,2)$, $\Gamma(3,4)$, $\Delta(3,7)$
- ii. $E(0,2)$, $Z(3,2)$, $H(5,2)$, $\Theta(7,2)$

Τί παρατηρείτε ;

3) Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται όλα τα σημεία που έχουν :

- i. Τετμημένη 5
- ii. Τεταγμένη 7

Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών αυτών.

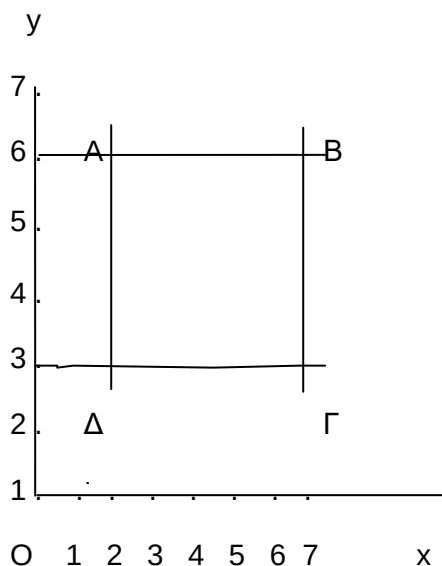
- 4) Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τα τρίγωνα που έχουν κορυφές τα σημεία :

- i. $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(4,1)$ ii. $O(0,0)$, $A(2,0)$, $\Gamma(0,3)$
 iii. $A(2,1)$, $B(1,2)$, $\Gamma(5,8)$

- 5) Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $A(0,4)$ και $B(4,0)$. Στη συνέχεια να φέρετε από τα σημεία A και B καθέτους προς τους άξονες Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των καθέτων αυτών.

Β' ομάδα

- 1) Αν το παρακάτω σχήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.



- 2) Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων A(1,6) και Γ(7,2). Αν τα σημεία αυτά είναι οι απέναντι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες στους άξονες Οx και Οy, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ.
- 3) Τα σημεία A(3,7) και B(9,7) είναι οι δύο κορυφές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του, αν είναι γνωστό ότι αυτές βρίσκονται πάνω στον άξονα Οx.

ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι το πηλίκο των μέτρων τους.

Π.χ



Ο λόγος των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι $\frac{3}{5}$.

→ Η ισότητα δύο λόγων ονομάζεται **αναλογία**.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad (1)$$

Από την αναλογία αυτή προκύπτει η σχέση $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \quad (2)$

→ Αν οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών δυο παραλληλογράμμων είναι ίσοι, τότε αυτοί θα είναι ίσοι και με το λόγο των περιμέτρων τους.

Όμοια λέγονται δύο σχήματα, όταν το ένα αποτελεί σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου.

Κλίμακα ονομάζουμε το λόγο της απόστασης δύο σημείων στο σχέδιο προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων.

Επειδή τα μήκη στο σχέδιο είναι ανάλογα με τα πραγματικά ισχύει ότι

$$\text{Κλίμακα} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\text{απόσταση σχεδίου}}{\text{πραγματική απόσταση}} \quad (1)$$

Προσοχή!!!

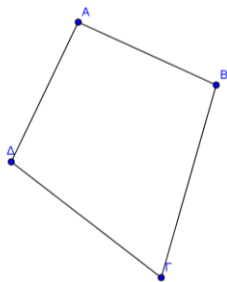
Οι αποστάσεις αυτές πρέπει να μετριοούνται με την ίδια μονάδα.

Όταν σε ένα χάρτη επομένως η κλίμακα είναι 1 : 1000000, τότε η απόσταση 1 cm στο χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 1000000 cm = 10000 m = 10 km.

→ Όταν η κλίμακα είναι μεγαλύτερη της μονάδας έχουμε μεγέθυνση, ενώ όταν η κλίμακα είναι μικρότερη της μονάδας έχουμε σμίκρυνση.

Π.χ

Το παρακάτω σχήμα δείχνει το σχέδιο ενός οικοπέδου. Αν $AB = AD = 3 \text{ cm}$, $B\Gamma = 7 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 6,5 \text{ cm}$, να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του οικοπέδου.



κλίμακα 1 : 1200

Έστω ότι x, y, z, ω είναι οι πραγματικές διαστάσεις των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και AD αντίστοιχα.

Επειδή τα μήκη είναι ανάλογα θα ισχύει $\frac{AB}{x} = \frac{B\Gamma}{y} = \frac{\Gamma\Delta}{z} = \frac{DA}{\omega} = \frac{1}{1200}$

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Θα είναι : $\frac{AB}{x} = \frac{1}{1200}$ ή $\frac{3}{x} = \frac{1}{1200}$ ή $x = 3 \cdot 1200 = 3600 \text{ cm}$

Άρα $x = 36 \text{ m}$

ομοίως : $\frac{B\Gamma}{y} = \frac{1}{1200}$ ή $\frac{7}{y} = \frac{1}{1200}$ ή $y = 7 \cdot 1200 = 8400 \text{ cm}$

άρα $y = 84 \text{ m}$

$\frac{\Gamma\Delta}{z} = \frac{1}{1200}$ ή $\frac{6.5}{z} = \frac{1}{1200}$ ή $z = 6,5 \cdot 1200 = 7800 \text{ cm}$ άρα $z = 78 \text{ m}$

και τέλος επειδή $AD = AB$ έχουμε $\omega = 36 \text{ m}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Αν $AB = 2 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 1 \text{ m}$, να βρείτε το λόγο $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.
- 2) Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 10 \text{ cm}$, $A\Gamma = 8$ και $AB = 6 \text{ cm}$. Να βρείτε τους λόγους : $\frac{A\Gamma}{AB}$, $\frac{B\Gamma}{AB}$, $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$, $\frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{B\Gamma}$.
- 3) Να συμπληρωθεί ο πίνακας :

Κλίμακα	Μήκος στο σχέδιο	Πραγματικό μήκος
1 : 3	4 cm	
	2 cm	8 cm
2 : 5		9,2 cm

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

- 4) Να βρεθεί η κλίμακα σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

Πραγματικό μήκος

Απόσταση στον χάρτη

500 km

1 cm

250 km

2,5 cm

10 km

1 cm

35 km

3,5 cm

1 km

1 cm

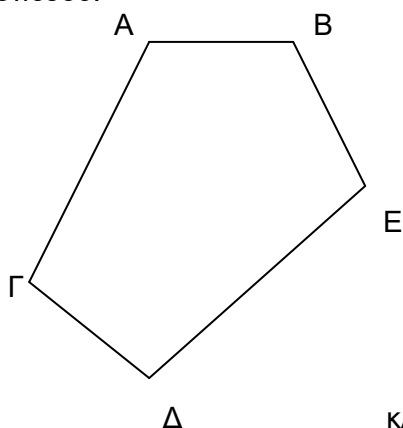
2 m

1 cm

5 km

10 cm

- 5) Το παρακάτω σχήμα δείχνει το σχέδιο ενός οικοπέδου. Αν $AB = 2$ cm, $BΓ = 4$ cm, $ΓΔ = ΑΕ = 5$ cm και $ΔΕ = 3$ cm, να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του οικοπέδου.



κλίμακα 1 : 1000

- 6) Αν το υδρογόνο και το οξυγόνο σχηματίζουν νερό σε αναλογία μαζών 1:8, να βρείτε πόσα γραμμάρια οξυγόνου ενώνονται με 5,5 γραμμάρια υδρογόνου.

Β' ομάδα

- 1) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις 250 m και 120 m. Πόσο είναι το εμβαδόν ενός σχεδίου του παραπάνω ορθογωνίου με κλίμακα $\frac{1}{500}$;
- 2) Σε ένα σχέδιο που έχει κλίμακα 50 είναι σχεδιασμένα 3 τμήματα με μήκη 40 cm, 35 cm και 22 cm. Να βρείτε τα πραγματικά μήκη των 3 αυτών τμημάτων.
- 3) Ένας φωτογράφος ρυθμίζει το μηχάνημα μεγέθυνσης έτσι ώστε οι διαστάσεις των φωτογραφιών να αυξηθούν κατά $\frac{1}{3}$.
 - α) Αν οι διαστάσεις ενός μεγεθυμένου αντικειμένου είναι 52 mm και 30 mm, ποιες είναι οι αντίστοιχες διαστάσεις του αντικειμένου αυτού στην αρχική φωτογραφία ;
 - β) Αν μια φωτογραφία παριστάνει ένα αντικείμενο σε κλίμακα $\frac{1}{2}$, ποια θα είναι η κλίμακα της μεγεθυμένης φωτογραφίας ;

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ

Δύο ποσά x και y λέγονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας (ή διαιρώντας) με έναν αριθμό τις τιμές του ενός, πολλαπλασιάζονται (ή διαιρούνται) με τον ίδιο αριθμό οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού.

→ Ο λόγος $\frac{y}{x}$ των τιμών των ανάλογων ποσών είναι **σταθερός**, είναι πάντοτε δηλ. ο ίδιος αριθμός.

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

Ο αριθμός α λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.

Από τον παραπάνω λόγο προκύπτει η σχέση $y = \alpha \cdot x$, με την οποία συνδέονται δύο ανάλογα ποσά.

Π.χ

Ένα τετράγωνο με πλευρά 2cm θα έχει περίμετρο 8 cm.

Εάν η πλευρά είναι 4 cm θα έχει περίμετρο 16 cm.

Εάν η πλευρά είναι 6 cm θα έχει περίμετρο 24 cm.

Εάν η πλευρά είναι 8 cm θα έχει περίμετρο 32 cm κλπ...

Βάζοντας τα ποσά αυτά σε ένα πίνακάκι θα έχουμε :

πλευρά	2	4	6	8
περίμετρος	8	16	24	32

Βλέπουμε ότι όταν διπλασιάζεται το μήκος της πλευράς, διπλασιάζεται και το μήκος της περιμέτρου. Όταν τριπλασιάζεται το μήκος της πλευράς, τριπλασιάζεται

και το μήκος της περιμέτρου κλπ.

Επίσης, εάν πάρουμε τους λόγους των τιμών των ανάλογων ποσών θα έχουμε :

$$\frac{8}{2} = 4 \quad , \quad \frac{16}{4} = 4 \quad , \quad \frac{24}{6} = 4 \quad , \quad \frac{32}{8} = 4 \quad \text{τον ίδιο αριθμό.}$$

→ Βρίσκοντας το λόγο των ποσών μπορούμε να ελέγχουμε εάν αυτά είναι ανάλογα.

Εφόσον δηλ. ο λόγος είναι σταθερός, τότε τα ποσά είναι ανάλογα. Εάν δεν είναι σταθερός, τότε δεν έχουμε ανάλογα ποσά.

→ Όταν το ποσό y είναι ποσοστό του ποσού x, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

$$y = \frac{\alpha}{100} \cdot x \text{ και είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας το } \frac{\alpha}{100} \text{ ή } \alpha\%.$$

Π.χ

Δύο ανάλογα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση $y = 3x$.

α) Να βρείτε το y όταν είναι $x=4$.

β) Να βρείτε το x όταν είναι $y=27$.

α) Για $x=4$ θα έχουμε για το y : $y = 3 \cdot 4 = 12$

β) Για $y=27$ θα έχουμε για το x : $27 = 3x$ ή $x = 27 : 3 = 9$

Π.χ

Για 25 κιλά μπανάνες πληρώνουμε 45 ευρώ. Πόσο θα πληρώσουμε για 36 κιλά μπανάνες ;

κιλά	25	36
αξία σε €	45	x

Θα έχουμε $\frac{25}{45} = \frac{36}{x}$ άρα $25x = 45 \cdot 36$

$$25x = 1620$$

$$x = \frac{1620}{25} = 64,8\text{€}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες είναι πίνακες ανάλογων ποσών :

i.

x	3	5	7
y	9	15	21

ii.

X	3	5	7	9
Y	9	25	49	81

iii.

x	2	3	5	8
y	5	7.5	12.5	20

iv.

x	1	2	3	4	7
y	3	5	7	9	15

v.

x	25	50	150
y	1.6	3.2	9.6

- 2) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών :

x	4	5	6	7	15
y	8	10	12	14	30

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

β) Ποιος είναι ο συντελεστής αναλογίας των τιμών των ανάλογων ποσών ;

3) Δύο ανάλογα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση $y = \frac{3}{5}x$. Να βρείτε :

α) το y όταν $x = \frac{5}{3}$

β) το x όταν $y = \frac{1}{5}$

4) Δύο ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση $y = 0,1x$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί για τις διάφορες τιμές που παίρνουν τα x και y τα ποσά αυτά είναι ανάλογα.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

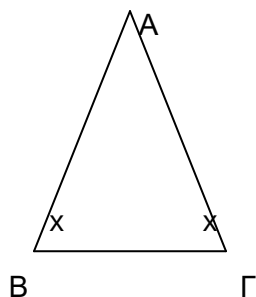
X		2		
Y	0,1		0,4	0,075

5) Οι εργάτες ενός εργοστασίου παίρνουν σε 6 μήνες 60000 ευρώ. Πόσα ευρώ θα πάρουν σε 2 χρόνια ;

6) Ένας ράφτης για να ράψει 3 κουστούμια χρειάζεται 15 m ύφασμα. Πόσα κουστούμια μπορεί να ράψει αν έχει 52 m ύφασμα ;

Β' ομάδα

- 1) Για το παρακάτω σχήμα να γράψετε συμβολικά τη σχέση που συνδέει την περίμετρο Π του τριγώνου με το x . Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί τα ποσά Π και x είναι ανάλογα και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

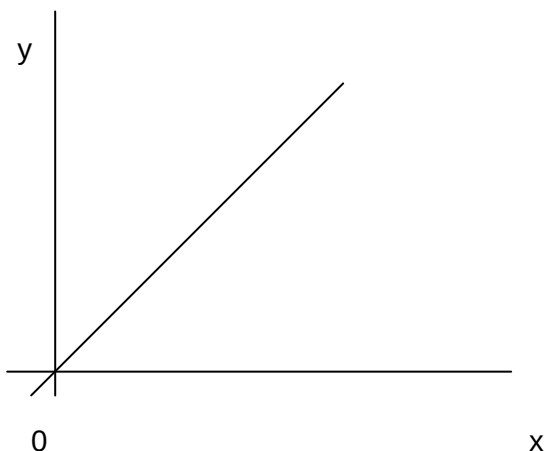


x		3		$\frac{9}{49}$
Π	$\frac{2}{7}$		$\frac{9}{21}$	

- 2) Αν x είναι το μέτρο της πλευράς ενός ισόπλευρου τριγώνου και Π η περίμετρός του, να γράψετε συμβολικά τη σχέση που συνδέει τα μεγέθη Π και x . Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί τα ποσά αυτά είναι ανάλογα.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΧΕΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ

Εάν παραστήσουμε τα ζεύγη των τιμών δύο ανάλογων ποσών σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, τότε θα προκύψουν σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων.



→ Όταν τα ποσά δεν είναι ανάλογα και παραστήσουμε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα ζεύγη των τιμών τους, θα προκύψουν σημεία του επιπέδου που αν τα ενώσουμε δεν θα σχηματίζουν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Π.χ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών των ανάλογων ποσών x και y .

x	0,1	0,2	1,1
y	0,4	0,8	4,4

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα ποσά x και y .

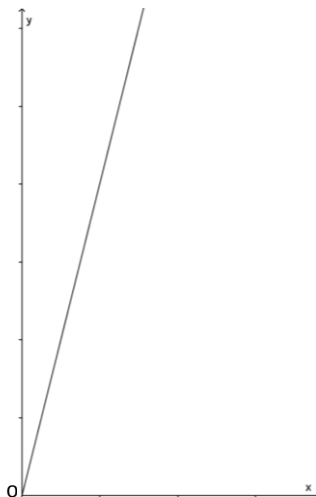
β) Να παραστήσετε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη (x,y) των τιμών που προκύπτουν.

α) Για τις τιμές των x και y του πίνακα, έχουμε ότι

$$\frac{y}{x} = \frac{0,4}{0,1} = \frac{0,8}{0,2} = \frac{4,4}{1,1} = 4$$

Επομένως η σχέση που συνδέει τα x και y είναι η $y = 4x$.

β) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θα έχουμε :



Απ' όπου προκύπτει μια ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων.

→ Για την περίπτωση που ο συντελεστής αναλογίας a είναι 1, και επομένως η σχέση που συνδέει τα ανάλογα ποσά είναι η $y = x$, τότε η ημιευθεία που προκύπτει με παράσταση των σημείων σε σύστημα αξόνων έχει αρχή την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ των ημιαξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Αν δύο ποσά x και y είναι ανάλογα και συνδέονται με τη σχέση $y=2,5x$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

x	0	2		
y			0,6	10

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Στη συνέχεια να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη (x,y) των τιμών που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα.

2) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών :

x	3	5	6	8	12
y	6	10	12	16	24

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

β) Ποιος είναι ο συντελεστής αναλογίας των τιμών των ανάλογων ποσών ; Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα x και y

γ) Να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη (x,y) των τιμών που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα. Τί παρατηρείτε ;

3) Έστω x η πλευρά ενός τετραγώνου και E το εμβαδόν του.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

x	1	2	3	4	5
x^2					
E					

β) Σε διαφορετικά ορθογώνια συστήματα να παραστήσετε τα ζεύγη (x,E) και (x^2 ,E) των τιμών που προκύπτουν από αυτόν τον πίνακα.

γ) ποιά από τα παραπάνω ποσά είναι ανάλογα ;

4) Να γίνουν σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις για κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις αναλογίας.

α) $y = 0,2x$ β) $y = 2x$ γ) $y = \frac{1}{2}x$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

Π.χ

Ένας έμπορος αγόρασε εμπορεύματα αξίας 7000 € και του έγινε έκπτωση 25 %. Να βρείτε :

α) πόσα ευρώ είναι η έκπτωση που του έγινε ;

β) πόσα ευρώ θα πληρώσει ;

α) Τα ποσά «αξία» και «έκπτωση» είναι ανάλογα. Αν x ευρώ είναι η έκπτωση που του έγινε, έχουμε :

αξία	100	7000
έκπτωση	25	x

$$\text{συνεπώς θα έχουμε : } \frac{100}{25} = \frac{7000}{x} \quad \text{ή}$$

$$100x = 25 \cdot 7000 \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{25 \cdot 7000}{100} \quad \text{ή}$$

$$x = 25 \cdot 70 \quad \text{ή}$$

$$x = 1750$$

Άρα του έγινε έκπτωση 1750 ευρώ.

β) Ο έμπορος άρα θα πληρώσει $7000 - 1750 = 5250$ ευρώ.

Π.χ

Η τιμή ενός καινούργιου αυτοκινήτου χωρίς ΦΠΑ είναι 35000 ευρώ. Με δεδομένο ότι ο ΦΠΑ είναι 20%, να υπολογιστεί πόσο στοιχίζει η αγορά του αυτοκινήτου.

ΦΠΑ 20% σημαίνει ότι αν αγοράζαμε το αυτοκίνητο χωρίς ΦΠΑ 100 ευρώ, με ΦΠΑ θα το αγοράζαμε $100 + 20 = 120$ ευρώ.

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Τα ποσά «αξία χωρίς ΦΠΑ» και «αξία με ΦΠΑ» είναι ανάλογα, επομένως έχουμε :

αξία χωρίς ΦΠΑ	100	35000
αξία με ΦΠΑ	120	x

$$\text{συνεπώς θα έχουμε : } \frac{100}{120} = \frac{35000}{x} \quad \text{ή}$$

$$100x = 120 \cdot 35000 \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{120 \cdot 35000}{100} \quad \text{ή}$$

$$x = 120 \cdot 350 \quad \text{ή}$$

$$x = 42000$$

Άρα η αγορά του αυτοκινήτου στοιχίζει 42000 ευρώ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

- 1) Για 18,5 m μεταξωτού υφάσματος πληρώνουμε 500 ευρώ. Πόσα μέτρα μεταξωτό ύφασμα αγοράζουμε με 750 ευρώ ;
- 2) Τα 12 βαζάκια μέλι κοστίζουν 60 ευρώ. Πόσα ευρώ κοστίζουν τα 25 βαζάκια μέλι ;
- 3) Ένα αυτοκίνητο για 10 km καίει 1 λίτρο βενζίνη.
 - α) πόσα λίτρα βενζίνη θα κάψει σε 17 km ;
 - β) πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει με 70 λίτρα βενζίνη ;
- 4) Ένα αυτοκίνητο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, διανύει τα 120 km σε 1,5 h.
 - α) πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει σε 3,2 h ;
 - β) πόσες ώρες θα χρειαστεί για να διανύσει τα 90 km ;

- 5) Ένα σπίτι πουλήθηκε με έκπτωση 8%. Ποια ήταν η αρχική τιμή του σπιτιού αν το ποσό που πληρώθηκε είναι 69920 ευρώ ;
- 6) Η τιμή ενός φορητού ραδιοκασετόφωνου αυξήθηκε από 150 ευρώ σε 200 ευρώ. Να βρείτε το ποσοστό της αύξησης της τιμής του.

Β' ομάδα

- 1) Μια ηλεκτρική σκούπα πουλήθηκε με έκπτωση 30% αντί 385 ευρώ.
α) Να βρείτε πόσο κόστιζε η ηλεκτρική σκούπα
β) Πόσα ευρώ ήταν η έκπτωση ;
- 2) Ένας έμπορος πούλησε εμπόρευμα με κέρδος 20% και εισέπραξε 3600 ευρώ. Να βρείτε την αξία του εμπορεύματος.
- 3) 2 κουταλιές της σούπας περιέχουν 30 ml ενός φαρμάκου.
α) Να βρείτε πόσες κουταλιές είναι τα 120 ml του φαρμάκου
β) Πόσες μέρες θα χρειαστούν για να καταναλώσουμε φάρμακο 240 ml, αν η ημερήσια δόση είναι 3 κουταλιές της σούπας ;
- 4) Μία βιοτεχνία παράγει βίδες. Από αυτές το 3% είναι ελαττωματικές.
α) σε 930 βίδες, πόσες θα είναι ελαττωματικές ;
β) πόσες βίδες πρέπει να αγοράσουμε ώστε από αυτές οι 720 να μην είναι ελαττωματικές ;

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

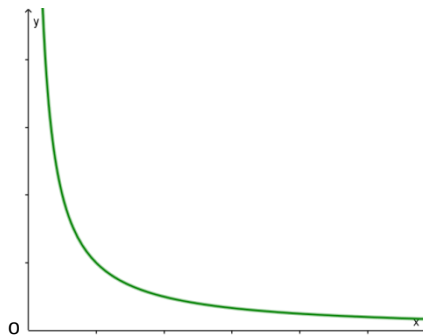
Δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός με έναν αριθμό, οι αντίστοιχες τιμές του άλλου διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.

→ Για δύο ποσά που είναι αντιστρόφως ανάλογα το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό.

Αν είναι δηλ. x, y οι αντίστοιχες τιμές δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών, θα είναι $xy = \alpha$ με $\alpha \neq 0$

Στην περίπτωση που $\alpha = 1$ έχουμε $xy = 1$. Οι x, y δηλ. είναι αντίστροφοι αριθμοί.

→ Τα ζεύγη (x, y) που προκύπτουν από τις τιμές δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x, y αν παρασταθούν σε ένα σύστημα αξόνων, βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη γραμμή, η οποία ονομάζεται υπερβολή.



Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy , γιατί οι συντεταγμένες των σημείων της, τα x, y δηλ., δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0.

Π.χ

Για να βάψουν 3 εργάτες έναν μεγάλο χώρο, χρειάζονται 5 ώρες. Σε πόσες ώρες θα βάψουν τον ίδιο χώρο :

α) 7 εργάτες

β) 2 εργάτες.

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Τα ποσά «αριθμός εργατών» και «ώρες» είναι αντιστρόφως ανάλογα, επομένως θα έχουν σταθερό γινόμενο.

α) Αν οι 7 εργάτες βάψουν τον ίδιο χώρο σε x ώρες, τότε θα ισχύει

$$7 \cdot x = 3 \cdot 5 \quad \text{ή} \quad 7 \cdot x = 15 \quad \text{ή} \quad x = \frac{15}{7} = 2,1 \text{ ώρες.}$$

β) Αν οι 2 εργάτες βάψουν τον ίδιο χώρο σε x ώρες, τότε θα ισχύει

$$2 \cdot x = 3 \cdot 5 \quad \text{ή} \quad 2x = 15 \quad \text{ή} \quad x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ ώρες.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

1) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες είναι πίνακες αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

α)

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

β)

x	1	2	3
y	12	6	3

2) Αν είναι $xy = 4$ να συμπληρώσετε τον πίνακα

x	5	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$		
y						0,5	2

3) Για την περίφραξη ενός οικοπέδου, όταν την κάνουν 3 εργάτες, χρειάζονται 5 ώρες. Σε πόσες ώρες θα κάνουν την ίδια περίφραξη 4 εργάτες ;

4) Ένα κουτί κακάο κρατάει 12 ημέρες, εάν καταναλώνουμε 2 κουταλιές την ημέρα. Πόσες μέρες θα κρατήσει εάν καταναλώνουμε 3 κουταλιές την ημέρα ;

Β' ομάδα

1) Ένα έργο συμφωνήθηκε να τελειώσει σε 26 ημέρες. Εάν 8 εργάτες εκτέλεσαν το μισό του έργου σε 10 ημέρες, πόσοι εργάτες πρέπει να χρησιμοποιηθούν, για να τελειώσει το υπόλοιπο έργο μέσα στην προθεσμία των 26 ημερών ;

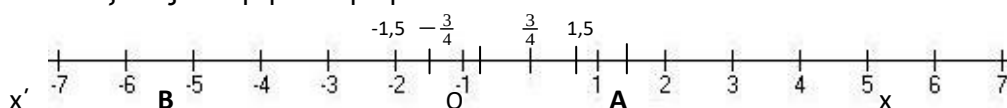
2) Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 30 cm^2 . Να βρείτε τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει το μήκος α , όταν το πλάτος πάρει τις τιμές : $\beta = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Να παρασταθούν σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τα σημεία που παριστάνουν κάθε ζευγάρι τιμών (x, y) και να σχεδιάσετε την υπερβολή.

3) Μια βρύση μπορεί να γεμίσει μια δεξαμενή που χωράει 80 lt νερό σε 4 ώρες. Εάν η παροχή της βρύσης μειωθεί κατά το $\frac{1}{5}$, σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή ;

ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§7.1 Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (ρητοί αριθμοί) – η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

➤ **Ο Άξονας Ρητών Αριθμών:** Αυτός ρητούς αριθμούς (σύνολο $\mathbb{Q}$) μπορούμε να αυτός τοποθετήσουμε πάνω σε έναν άξονα σε αύξουσα σειρά. Ο άξονας αυτός καλείται άξονας των ρητών αριθμών.



Σχήμα 1

Η θέση ενός σημείου **A** στον άξονα ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου

Πχ. Η τετμημένη του **A** είναι 3 και του **B** είναι -5

- Τα σύμβολα “ + ” και “ - ” τα ονομάζουμε **πρόσημα**. Γράφονται μπροστά από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν αντίστοιχα, σε **θετικούς** ή **αρνητικούς**. (το «+» μπορεί να παραλείπεται μπροστά από έναν θετικό. Δηλαδή $+8 = 8$.)
- Το 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.
- **Ομόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν **ίδιο πρόσημο**
- **Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί με **διαφορετικό πρόσημο**
- **Ακέραιοι** είναι όλοι οι φυσικοί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους (με τους αντίθετους τους)
- **Ρητοί** είναι όλοι οι ακέραιοι μαζί με τους δεκαδικούς τα κλάσματα και τους αντίστοιχους αρνητικούς τους

Ασκήσεις

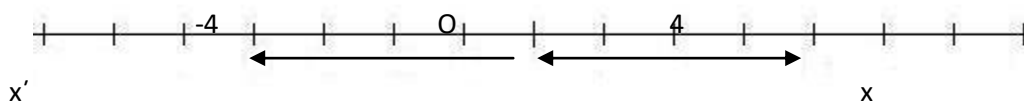
1. Να χωρίσετε τους παρακάτω αριθμούς σε θετικούς και αρνητικούς
-43 , 6, -12, 8 , -7 , -34 , 0 , 23
2. Να βρείτε ποια από τα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν είναι ομόσημα και ποια ετερόσημα -2 και -9 , 34 και 23 , -9 και 0 , 4 και -376 , 10,4 και 23 , +56 και 43 , +4 και +29 , -74 και +23.
3. Να εκφράσετε με ρητούς τις παρακάτω εκφράσεις
α) ανάληψη 10200 ευρώ

- β) κατάθεση 23700 ευρώ
 γ) αύξηση μισθού κατά 250 ευρώ
 δ) μείωση φόρου κατά 1 μονάδα

4. Έστω δύο σημεία A και B με τετμημένες α και β αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου M του τμήματος AB, όταν
 α) $\alpha=3$ και $\beta=+8$
 β) $\alpha=-9$ και $\beta=-4$ και
 γ) $\alpha=-3$ και $\beta=2$

§7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – αντίθετοι αριθμοί – σύγκριση ρητών

Απόλυτη Τιμή Αριθμού: Αν α ένας ρητός αριθμός, η απόλυτη τιμή του α συμβολίζεται με $|a|$ και είναι η απόσταση του α από το μηδέν.



Σχήμα 2

Αντίθετοι Αριθμοί: Είναι οι αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, αλλά διαφορετικό πρόσημο (Σχήμα 2).

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού είναι ο αντίθετός του
- Η απόλυτη τιμή του μηδέν είναι 0

Πχ, $|56| = 56$, $|-4| = 4 = -(-4)$ και $|0|=0$

Σχόλιο. γενικά ο μεγαλύτερος από δυο αριθμούς είναι αυτός που βρίσκεται πιο δεξιά στο άξονα αλλά μαθαίνουμε ότι: **το μηδέν είναι μικρότερος από κάθε θετικό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό**

Όσο μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ένας θετικός τόσο μεγαλύτερος είναι ,ενώ όσο μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ένας αρνητικός τόσο μικρότερος είναι. Εννοείται ότι κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Πχ

$$-4 < 3 ,$$

$$0 > -12$$

$$-34 < -1$$

$$5 > 3$$

$$-1 > -1000$$

Ασκήσεις

- Βρείτε τις απόλυτες τιμές των παρακάτω αριθμών
α) +23,5
β) -3,8
γ) -56
δ) +1
ε) -101
στ) -9
ζ) 0
η) 10,5
θ) -10
- Βρείτε τους αριθμούς που μπορούν να έχουν απόλυτη τιμή ίση με
α) 5
β) 0
γ) 56
δ) 11
- Τοποθετήστε στον άξονα τα σημεία με τετμημένες -1 , -4 , 0 , 5 , -2,5 , 4 , -2 , 3 , -6 , 1,5
- Να συγκριθούν οι αριθμοί
α) 3 και +45 β) 9 και 23 γ) 34 και 12

δ) -23 και 1 ε) -6 και -23 στ) 0 και -26
ζ) 32 και -100 η) -3 και 0 θ) -32 και 32

5. Να συγκριθούν οι αριθμοί -8 , 8 , $|8|$. Τι συμπέρασμα βγαίνει?
6. Αν το α είναι ακέραιος για ποιες τιμές του θα ισχύει
 - α) $-12 < \alpha < -9$
 - β) $5 > \alpha > -1$
 - γ) $-2 < \alpha < 6$
7. Για ποιες τιμές του α θα ισχύουν οι σχέσεις στην άσκηση 6 αν το α εκτός από ακέραιος είναι και άρτιος?
8. Να γράψετε τους αριθμούς της άσκησης 1 σε αύξουσα σειρά (ή να διατάξετε τους αριθμούς...)

§7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις αναλόγως αν προστίθενται ομόσημοι ή ετερόσημοι αριθμοί

1. **Ομόσημοι:** Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς βάζουμε το πρόσημό τους και στη συνέχεια προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.
2. **Ετερόσημοι:** Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς βάζουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή και στη συνέχεια αφαιρούμε τη μικρότερη από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

• **Ιδιότητες Πρόσθεσης:**

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
1. Αντίθετοι αριθμοί:	$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$
2. Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

3. Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
4. Προσεταιριστική	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

Παραδείγματα:

- 1) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\alpha)(+5) + (+8) \qquad \beta)(-11) + (-14)$$

$$\gamma)(+25) + (-16) \qquad \delta)(-8) + (+3)$$

Λύση:

α) Οι αριθμοί (+5) και (+8) είναι ομόσημοι (θετικοί).

Επειδή $5 + 8 = 13$ είναι $(+5) + (+8) = +13$

β) Οι αριθμοί (-11) και (-14) είναι ομόσημοι (αρνητικοί).

Επειδή $11 + 14 = 25$ είναι $(-11) + (-14) = -25$

γ) Οι αριθμοί (+25) και (-16) είναι ετερόσημοι. Το 25 είναι μεγαλύτερο από το 16 κατα απόλυτη τιμή. Επειδή $25 - 16 = 9$ είναι $(+25) + (-16) = +9$

δ) Οι αριθμοί (-8) και (+3) είναι ετερόσημοι. Το 8 είναι μεγαλύτερο από το 3 κατα απόλυτη τιμή και έχει το (-) μπροστά. Επειδή $8 - 3 = 5$ είναι $(-8) + (+3) = -5$

- 2) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\alpha)(-4) + (+7) + (-12) + (+8) \qquad \beta)(-11) + (+9) + (-5) + (+2)$$

$$\gamma)\left(+\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{11}{8}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right)$$

Λύση:

Όταν έχουμε ένα άθροισμα με περισσότερους από δύο όρους, χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς όρους.

$$\begin{aligned} \alpha)(-4) + (+7) + (-12) + (+8) &= (+7) + (+8) + (-12) + (-4) = \\ &= (+15) + (-16) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta)(-11) + (+9) + (-5) + (+2) &= (+2) + (+9) + (-11) + (-5) = \\ &= (+11) + (-16) = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma)\left(+\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{11}{8}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right) &= \left(+\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{11}{8}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = \\ &= \left(+\frac{20}{8}\right) + \left(+\frac{11}{8}\right) + \left(-\frac{14}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(+\frac{31}{8}\right) + \left(-\frac{17}{4}\right) = \\ &= \left(+\frac{31}{8}\right) + \left(-\frac{34}{8}\right) = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\begin{array}{ll} \alpha) (+23) + (+12) & \beta) (+2,34) + (+6,73) \\ \gamma) (+12,75) + (+11,25) & \delta) (-3,6) + (-7,6) \\ \epsilon) (-1) + (-43,1) & \sigma\tau) (-5,34) + (-4,66) \end{array}$$

2. Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\begin{array}{ll} \alpha) (+4) + (-10) & \beta) (+34) + (-23,5) \\ \gamma) (-7,65) + (+3,24) & \delta) (-67,4) + (+93,5) \\ \epsilon) (+2,35) + (-4,45) & \sigma\tau) (+5,43) + (-7,64) \end{array}$$

3. Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\begin{array}{l} \alpha) (+3,5) + (-5) + (+3,4) + (-6,7) \\ \beta) (-23,5) + (+0,5) + (-14) + (-3,4) + (+6,43) \end{array}$$

4. Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\begin{array}{l} \alpha) \left(-\frac{3}{10}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{4}{20}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right) + \left(\frac{7}{10}\right) \\ \quad \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) \\ \beta) \left(-\frac{3}{10}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{4}{20}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right) + \left(\frac{7}{10}\right) \end{array}$$

5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) (+5) + (+6) & \beta) (+8) + (+3) & \gamma) (-7) + (-9) \\ \delta) (-6) + (-2) & \epsilon) (+10) + (-7) & \sigma\tau) (-9) + (+3) \\ \zeta) (-4) + (+4) & \eta) (+7) + (-5) & \end{array}$$

6) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) (+15) + (+16) & \beta) (+28) + (+13) & \gamma) (-17) + (-19) \\ \delta) (-62) + (-21) & \epsilon) (+25) + (-11) & \sigma\tau) (-19) + (+13) \\ \zeta) (-44) + (+45) & \eta) (+27) + (-25) & \end{array}$$

7) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha)(+\frac{5}{2})+(+\frac{6}{2}) & \beta)(+\frac{8}{17})+(+\frac{3}{17}) & \gamma)(-\frac{7}{5})+(-\frac{9}{5}) \\ \delta)(-\frac{6}{10})+(-\frac{2}{10}) & \varepsilon)(+\frac{10}{8})+(-\frac{7}{8}) & \sigma\tau)(-\frac{9}{24})+(+\frac{3}{24}) \\ \zeta)(-\frac{4}{13})+(+\frac{4}{13}) & \eta)(+\frac{7}{4})+(-\frac{5}{4}) & \end{array}$$

8) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha)(+\frac{3}{2})+(+\frac{4}{3}) & \beta)(+\frac{5}{7})+(+\frac{3}{5}) & \gamma)(-\frac{6}{4})+(-\frac{9}{6}) \\ \delta)(-\frac{7}{9})+(-\frac{5}{4}) & \varepsilon)(+\frac{14}{3})+(-\frac{7}{8}) & \sigma\tau)(-\frac{9}{13})+(+\frac{5}{2}) \\ \zeta)(-\frac{8}{6})+(+\frac{4}{3}) & \eta)(+\frac{6}{9})+(-\frac{5}{12}) & \end{array}$$

9) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha)(+4,3)+(5,7) & \beta)(+9,6)+(3,1) & \gamma)(-5,4)+(-7,7) \\ \delta)(-3,1)+(-1,9) & \varepsilon)(+0,7)+(-0,4) & \sigma\tau)(-8,3)+(8,1) \\ \zeta)(-6,7)+(6,9) & \eta)(+9,7)+(-5,9) & \end{array}$$

10) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha)(+7,8)+(2,7) & \beta)(+12,2)+(5,5) & \gamma)(-14,2)+(-9,7) \\ \delta)(-23,1)+(-6,9) & \varepsilon)(+15,6)+(-15,5) & \sigma\tau)(-28,9)+(15,4) \\ \zeta)(-9,4)+(15,1) & \eta)(+6,3)+(-13,2) & \end{array}$$

11) Να συμπληρώσετε τα κενά με τα κατάλληλα πρόσημα, για να προκύψουν σωστές ισότητες:

$$\begin{array}{lll} \alpha)(+5)+(\dots 6)=-1 & \beta)(\dots 4)+(5)=+1 & \gamma)(\dots 5)+(-2)=+3 \\ \delta)(\dots 6)+(-7)=-13 & \varepsilon)(+10)+(\dots 7)=+3 & \sigma\tau)(-7)+(\dots 3)=-4 \\ \zeta)(-9)+(\dots 9)=0 & \eta)(\dots 7)+(-5)=-12 & \end{array}$$

12) Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) A = (-4) + (+3) + (-8) + (+2) + (-6)$$

$$\beta) B = (+9) + (-7) + (+2) + (-1) + (+5)$$

$$\gamma) \Gamma = (-2) + (-5) + (-7) + (+6)$$

$$\delta) \Delta = (+7) + (-9) + (+1) + (+2) + (-5)$$

13) Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) A = \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{8}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right)$$

$$\beta) B = \left(+\frac{8}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{9}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{6}{5}\right)$$

$$\gamma) \Gamma = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{6}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) + \left(+\frac{17}{3}\right)$$

$$\delta) \Delta = \left(+\frac{9}{13}\right) + \left(-\frac{25}{13}\right) + \left(+\frac{4}{13}\right) + \left(+\frac{6}{13}\right) + \left(-\frac{8}{13}\right)$$

§7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών

Αφαίρεση: Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου. Δηλαδή αν α και β δύο ρητοί αριθμοί:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Καταλαβαίνουμε ότι στους ρητούς η **αφαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πρόσθεση!**

Απαλοιφή Παρενθέσεων:

Όταν θέλουμε να απαλείψουμε μία παρένθεση, κοιτάμε τι πρόσημο υπάρχει μπροστά από αυτή:

- Αν το πρόσημο είναι θετικό (+), ή δεν έχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε το πρόσημο + και την παρένθεση και γράφουμε τους όρους της παράστασης με τα **ίδια** πρόσημα.
- Αν το πρόσημο είναι αρνητικό (-), τότε απαλείφουμε το πρόσημο - και την παρένθεση και γράφουμε τους όρους της παράστασης με **αντίθετα** πρόσημα.

$$\text{Πχ. } +(3 - 6 + 9) = 3 - 6 + 9 \text{ ενώ}$$

$$-(2,3 + 7,2 - 6,1) = -2,3 - 7,2 + 6,1$$

Παραδείγματα:

1) Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) (-9) - (+6)$$

$$\beta) (+6) - (-4)$$

$$\gamma) (-15) - (-9)$$

$$\delta) (+7) - (+10)$$

Λύση:

Επειδή η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση, σύμφωνα με τον

τύπο:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

έχουμε:

$$\alpha)(-9) - (+6) = (-9) + (-6) = -15$$

$$\beta)(+6) - (-4) = (+6) + (4) = +10$$

$$\gamma)(-15) - (-9) = (-15) + (+9) = -6$$

$$\delta)(+7) - (+10) = (+7) + (-10) = -3$$

2) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) -(-6) + (-5) - (-9) + (-4)$$

$$\beta) -(+5) + (-2) - (-7) + (-3)$$

Λύση:

Απαλείφουμε τις παρενθέσεις:

Όταν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει το πρόσημο (+), οι όροι μένουν όπως είναι.

Όταν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει το πρόσημο (-), γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με αντίθετο πρόσημο.

Άρα:

$$\begin{aligned} \alpha) -(-6) + (-5) - (-9) + (-4) &= +6 - 5 + 9 - 4 = +9 + 6 - 5 - 4 = \\ &= +15 - 9 = +6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) -(+5) + (-2) - (-7) + (-3) &= -5 - 2 + 7 - 3 = +7 - 5 - 3 - 2 = \\ &= +7 - 10 = -3 \end{aligned}$$

3) Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) -3 + 9 + 5 - 7$$

$$\beta) -1 + 6 - 3 - 5$$

$$\gamma) +8 - 12 + 9 - 7$$

$$\delta) +2 + 14 + 4 - 16$$

Λύση:

Χωρίζουμε για ευκολία τους όρους της κάθε παράστασης σε δύο ομάδες: η μία περιέχει τους θετικούς αριθμούς και η άλλη τους αρνητικούς αριθμούς:

$$\alpha) -3 + 9 + 5 - 7 = +9 + 5 - 3 - 7 = +14 - 10 = +4$$

$$\beta) -1 + 6 - 3 - 5 = +6 - 5 - 3 - 1 = +6 - 9 = -3$$

$$\gamma) +8 - 12 + 9 - 7 = +9 + 8 - 12 - 7 = +17 - 19 = -2$$

$$\delta) +2 + 14 + 4 - 16 = +14 + 4 + 2 - 16 = +20 - 16 = +4$$

4) Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{aligned}\alpha) A &= -[-(-4+2) - (-6+1-7)] + \\ &\quad + [-(-3) - (-8+4)] - (-1+3) \\ \beta) B &= -[(-5+8-1) - (-7+4)] + \\ &\quad + [(-11+14) - (1+3+8)] - (-5+2)\end{aligned}$$

Λύση:

Όταν στην παράστασή μας υπάρχουν παρενθέσεις, αγκύλες και άγκυστρα αρχίζουμε από μέσα προς τα έξω, εφαρμόζοντας για τις αγκύλες και τα άγκυστρα ότι και για τις παρενθέσεις.

$$\begin{aligned}\alpha) A &= -[-(-4+2) - (-6+1-7)] + [-(-3) - (-8+4)] - (-1+3) = \\ &= -[+4-2+6-1+7] + [+3+8-4] + 1-3 = \\ &= -4+2-6+1-7+3+8-4+1-3 = \\ &= +8+3+2+1+1-7-6-4-4-3 = \\ &= +15-24 = -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) B &= -[(-5+8-1) - (-7+4)] + [(-11+14) - (1+3+8)] - (-5+2) = \\ &= -[(8-5-1) - (+4-7)] + [(+14-11) - (8+3+1)] - (2-5) = \\ &= -[2+3] + [3-12] + 3 = -5-9+3 = -14+3 = -11\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις

$$\begin{array}{lll}\alpha) 100 - (-100) & \beta) -6,2 - (-4,3) & \gamma) 3 - (-\frac{3}{4}) \\ \delta) \frac{3}{4} - (-\frac{1}{5}) & \epsilon) (-7) - (+10) - (-9) & \sigma) (-5) + (-3,4) - (-7,8)\end{array}$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha + 5 + \beta - \gamma - 4$ αν

$$\begin{array}{lll}\alpha) \alpha = -4 & \beta = 0 & \gamma = +6 \\ \beta) \alpha = 4 & \beta = -3 & \gamma = -7 \\ \gamma) \alpha = 5 & \beta = -7 & \gamma = 9\end{array}$$

3. Να γίνουν οι πράξεις

$$\begin{array}{ll}\alpha) |-4| - |+6| + |-6| & \beta) |-34| + |-23| - |-57| \\ \gamma) |-10| - |+10| + |-12| - 20 + |-20| & \delta) |-3| - |-4| - |-5| - |-6| - 3\end{array}$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) x + 17 = 20 \quad \beta) x - 18 = -24 \quad \gamma) x - \frac{2}{5} = 4$$

$$\delta) x + \frac{3}{4} = 10 \quad \epsilon) x - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} \quad \sigma\tau) x + 3 - 6 = \frac{3}{5}$$

5. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις $x + y + z$ και $x - y - z$ όταν

$$\alpha) x=3 \ y=7 \ z=-1 \quad \beta) x=-4 \ y=10 \ z=7,2$$

$$\gamma) x=\frac{3}{5} \ y=-\frac{2}{5} \ z=\frac{1}{10} \quad \delta) x=2,56 \ y=9,33 \ z=-0,23$$

6. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους

$$\alpha) -2 - (3 - 4) + (8 - 11)$$

$$\beta) -(-4 - 7) - (11 - 5) - (10,6 - 2,7 - 6,4)$$

$$\gamma) \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - (\frac{3}{4} - \frac{4}{8}) - (\frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2})$$

7. Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές:

$$\alpha)(+2) - (+7) \quad \beta)(+4) - (-9) \quad \gamma)(-1) - (-5)$$

$$\delta)(-8) - (+6) \quad \epsilon)(+4) - (+7) \quad \sigma\tau)(+9) - (+3)$$

$$\zeta)(-11) - (+6) \quad \eta)(-22) - (-15)$$

8. Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές:

$$\alpha)(+\frac{2}{3}) - (+\frac{1}{5}) \quad \beta)(+\frac{6}{4}) - (-\frac{7}{6}) \quad \gamma)(-\frac{1}{7}) - (-\frac{4}{3})$$

$$\delta)(-\frac{5}{2}) - (+\frac{4}{3}) \quad \epsilon)(+\frac{3}{12}) - (+\frac{5}{4}) \quad \sigma\tau)(+\frac{2}{9}) - (+\frac{1}{12})$$

$$\zeta)(-\frac{7}{11}) - (+\frac{3}{2}) \quad \eta)(-\frac{4}{5}) - (-\frac{2}{7})$$

9. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 2 - 5$$

$$\beta) -4 - 6$$

$$\gamma) -15 + 33$$

$$\delta) -7 - 4 + 2$$

$$\varepsilon) 6 - 3 + 7$$

$$\sigma\tau) -12 + 16 - 17 - 3$$

$$\zeta) 22 - 5 + 8 - 16$$

$$\eta) -1 - 2 - 8 + 14$$

10. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) -3 + 7 - 1 - 8 + 3$$

$$\beta) 10 - 4 + 9 - 13 - 2$$

$$\gamma) 29 - 18 - 5 - 19 + 35$$

$$\delta) 2 - 8 + 5 + 3 - 13$$

$$\varepsilon) 48 - 23 - 39 - 5 + 75$$

$$\sigma\tau) -14 + 9 - 7 - 2 + 8$$

$$\zeta) -33 - 16 + 27 + 19 + 5$$

11. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{2} + \frac{8}{3}$$

$$\beta) -\frac{7}{5} + \frac{2}{9} - \frac{4}{3} - \frac{14}{5}$$

$$\gamma) -\frac{9}{12} - \frac{7}{6} + \frac{5}{4} + \frac{9}{3} - \frac{14}{2}$$

$$\delta) \frac{8}{13} - \frac{5}{7} - \frac{1}{14} - \frac{6}{21} + \frac{11}{7}$$

$$\varepsilon) -\frac{9}{25} + \frac{16}{10} + \frac{7}{4} - \frac{12}{20} - \frac{5}{2}$$

$$\sigma\tau) -\frac{15}{8} + \frac{29}{32} - \frac{25}{64} + \frac{7}{16} + \frac{9}{4}$$

12. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις, αφού γίνει πρώτα απαλοιφή των παρενθέσεων:

$$\alpha) A = (5 - 7 + 3)$$

$$\beta) B = (-9 + 14 - 6)$$

$$\gamma) \Gamma = -(-3 - 9 + 5 - 2)$$

$$\delta) \Delta = -(14 - 6 + 7 - 5)$$

$$\varepsilon) E = (22 - 10 - 9 - 6 + 4)$$

$$\sigma\tau) Z = -(-18 + 5 - 9 + 17 - 3)$$

$$\zeta) H = (38 - 27 + 8 + 11 - 24)$$

$$\eta) \Theta = -(-47 - 15 + 32 + 8 - 9)$$

13. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\alpha) -7 - (-4) + 9$$

$$\beta) 14 - 8 + 5$$

$$\gamma) -11 + 5 - (-7) + 9$$

$$\delta) 24 - (-13) - 18 + 5$$

$$\varepsilon) -8 - 7 - (-13) + 3 + 11$$

$$\sigma\tau) 17 - (-11) - 27 + 9 - 22$$

$$\zeta) -5 - (-9) + 2 - (-2) + 1$$

$$\eta) 8 + 5 - 13 - (-4) - 7 - (-2)$$

14. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) A = (6 - 8) + (-5 + 2)$$

$$\beta) B = -(-7 + 3 - 1) + (10 - 4 - 2)$$

$$\gamma) \Gamma = (-9 + 4 - 2 + 1) - (6 - 3 + 10) + (-8 + 2)$$

$$\delta) \Delta = (14 - 5 + 8 - 9 + 3) - (7 - 2 - 3 - 1) + (-11 + 13 - 6) + (9 - 3)$$

$$\varepsilon) E = -(9 + 2 - 3) + (-21 + 8 + 4) + (14 + 3 - 1) - (-16 - 3 + 21)$$

$$\sigma\tau) Z = (13 - 7) - (22 + 3) - (-9 - 5) + (31 - 15) - (-36 + 12)$$

15. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{2}{5} - (-3) + \frac{4}{3}$$

$$\beta) B = 7 - \frac{3}{2} - (-5) + \frac{5}{4}$$

$$\gamma) \Gamma = -\frac{3}{7} - \frac{2}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{21}\right) + 1$$

$$\delta) \Delta = 10 - \frac{31}{11} + \frac{9}{2} - 4 - \left(-\frac{5}{2}\right) + 1$$

$$\varepsilon) E = -\frac{2}{3} + 5 - (-7) - \frac{4}{9} + \frac{7}{12} - 8 - \frac{5}{3}$$

16. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) A = 1,23 - 2,54 + 3,01$$

$$\beta) B = -(-5,6) + 3,92 + 1,45 - 8,43$$

$$\gamma) \Gamma = 4,04 + 5,29 - 7,62 - (-0,78) - 1,45$$

$$\delta) \Delta = 9,21 - (-7,13) - 11,42 + 2,34 - 8,91 + 0,65$$

$$\varepsilon) E = -10,25 - (-6,23) + 7,71 - 13,84 - 0,39 + 4,12 + 2,79$$

§7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Γινόμενο δύο παραγόντων:

1. **Ομόσημων:** Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε το πρόσημο συν (+).

2. **Ετεροσήμων:** Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε το πρόσημο πλην (-).

<u>ΟΜΟΣΗΜΟΙ</u>	$(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$
<u>ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ</u>	$(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

Πχ $(-3) \cdot (-4) = +(3 \cdot 4) = +12$

$(-3) \cdot (+5) = -(3 \cdot 5) = -15$ (σελ 131 σχολικού παραδείγματα εφαρμογές)

- Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
1. Αντίστροφοι αριθμοί:	$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$
2. Απορροφητικό στοιχείο	$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
3. Μοναδιαίο Στοιχείο	$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
4. Αντιμεταθετική ιδιότητα	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
5. Προσετεριστική ιδιότητα	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

*Επιμεριστική Ιδιότητα ή Ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:

$$\alpha(\beta \pm \gamma) = \alpha\beta \pm \alpha\gamma \quad \text{ή} \quad \alpha\beta \pm \alpha\gamma = \alpha(\beta \pm \gamma)$$

Τα παραπάνω τα είδαμε για περιπτώσεις πολλαπλασιασμού **δύο μόνο** αριθμών. Με τον κανόνα που ακολουθεί μαθαίνουμε πώς να πολλαπλασιάσουμε πολλούς αριθμούς ανεξαρτήτως πρόσημου.

Παρατηρούμε ότι το **γινόμενο θετικών είναι θετικό**. Αν σε αυτούς πολλαπλασιαστεί ένας περιττός θα τους αλλάξει πρόσημο ενώ αν ξαναπολλαπλασιαστεί το ίδιο γινόμενο με αρνητικό ξαναγίνεται θετικό, βγάζουμε τα παρακάτω συμπεράσματα

Γινόμενο Πολλών Παραγόντων: Για να υπολογίσουμε το γινόμενο πολλών παραγόντων διαφορετικών του μηδενός, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των

παραγόντων και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο:

- **Συν (+)** αν το **πλήθος των αρνητικών** παραγόντων (πρόσημων) είναι **άρτιο**.
- **Μείον (-)** αν το **πλήθος των αρνητικών** παραγόντων (πρόσημων) είναι **περιττό**.

Παραδείγματα:

1) Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

$$\alpha)(+2)(+5) \quad \beta)(+3)(-8) \quad \gamma)(-5)(+9)$$

$$\delta)(-4)(-7) \quad \varepsilon)(+12)(-5) \quad \sigma\tau)(-9)(-8)$$

Λύση:

Όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, το γινόμενο είναι θετικό. Όταν είναι ετερόσημοι το γινόμενο είναι αρνητικό.

$$\alpha)(+2)(+5) = +10, \text{ γιατί } 2 \cdot 5 = 10 \text{ και } (+)(+) = (+)$$

$$\beta)(+3)(-8) = -24, \text{ γιατί } 3 \cdot 8 = 24 \text{ και } (+)(-) = (-)$$

$$\gamma)(-5)(+9) = -45, \text{ γιατί } 5 \cdot 9 = 45 \text{ και } (-)(+) = (-)$$

$$\delta)(-4)(-7) = 28, \text{ γιατί } 4 \cdot 7 = 28 \text{ και } (-)(-) = (+)$$

$$\varepsilon)(+12)(-5) = -60, \text{ γιατί } 12 \cdot 5 = 60 \text{ και } (+)(-) = (-)$$

$$\sigma\tau)(-9)(-8) = 72, \text{ γιατί } 9 \cdot 8 = 72 \text{ και } (-)(-) = (+)$$

2) Να υπολογιστούν οι παρατάξεις:

$$\alpha) A = (-3)(+7)(-2) + (-6)(+4)(+2)$$

$$\beta) B = (+8)(+4)(-1) - (-5)(-7)(+2)$$

Λύση:

Όταν έχουμε ένα γινόμενο αριθμών πάνω από δύο στο πλήθος, τότε ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων του γινομένου είναι άρτιο, τότε το γινόμενο είναι θετικό.
- Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων του γινομένου είναι περιττό, τότε το γινόμενο είναι αρνητικό.

$$\alpha) A = (-3)(+7)(-2) + (-6)(+4)(+2)$$

Παρατηρούμε ότι στο γινόμενο $(-3)(+7)(-2)$ έχουμε 2 αρνητικούς παράγοντες.

Στο γινόμενο $(-6)(+4)(+2)$ έχουμε έναν αρνητικό παράγοντα.

Άρα στο πρώτο γινόμενο αφού έχουμε άρτιο πλήθος αρνητικών παραγόντων,

θα είναι θετικό το αποτέλεσμα: $(-3)(+7)(-2) = (-21)(-2) = +42$

ενώ στο δεύτερο έχουμε περιττό πλήθος άρα θα είναι αρνητικό το αποτέλεσμα:

$$(-6)(+4)(+2) = (-24)(+2) = -48$$

Οπότε:

$$A = 42 - 48 = -6$$

$$\beta) B = (+8)(+4)(-1) - (-5)(-7)(+2) = (+32)(-1) - (+35)(+2) = -32 - 70 = -102$$

3)

Αν $\alpha = -2$, $\beta = -1$ και $\gamma = +5$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \alpha(\beta + \gamma) - \beta(\gamma - \beta) - \alpha(\alpha - \beta)$$

$$\beta) B = \alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma$$

Λύση:

Τους αριθμούς κατά την αντικατάσταση τους βάζουμε με παρενθέσεις:

$$\alpha) A = \alpha(\beta + \gamma) - \beta(\gamma - \beta) - \alpha(\alpha - \beta)$$

$$A = (-2)[(-1) + (+5)] - (-1)[(+5) - (-1)] - (-2)[(-2) - (-1)] =$$

$$= (-2)(+4) - (-1)(+6) - (-2)(-1) = -8 - (-6) - (+3) =$$

$$= -8 + 6 - 3 = -11 + 6 = -5$$

$$\beta) B = \alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma$$

$$B = (-2)(-1) - (-2)(+5) - (-2)[(-1) + (+5)] + (-1)(+5) =$$

$$= 2 - (-10) - (-2)(+4) + (-5) = 2 + 10 - (-8) - 5 = 12 + 8 - 5 =$$

$$= 20 - 5 = 15$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα γινόμενα
 α) $(-1)(-2)$ β) $-2(-4)$ γ) $-1,5(-0,4)$
 δ) $0(-45000)$ ε) $-1(+12450)$ στ) $-0,363(-1000)$
 ζ) $5 : (-2) = \frac{5}{-2} = 5 \cdot \frac{1}{-2} = -5 \cdot \frac{1}{2} = -2,5 \frac{24}{15} \cdot (-\frac{3}{8})$

2. Να γίνουν οι πράξεις
 α) $-7(-4 - 5+8)$ β) $(-0,75+0,25)(-4+2)$
 γ) $-20 - 7(23 - 8)$ δ) $(\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 1) \cdot (-2 + \frac{4}{10})$

3. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων
 α) $(-2 - 4 + 5) - (-3 - 1)(5 - 9)$ β)
 $(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 3) \cdot (-5 + \frac{7}{15}) - (3 - 6 + 8) \cdot (-\frac{1}{5} - \frac{4}{3}) + 10$
 γ) $[0,24 - 0,78 - (-0,2 + 1,5)] - (3,6 - 4,5)(0 - 0,45)$

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων
 α) $A=(\alpha+1)(\alpha-1)(1-\alpha)$ όταν $\alpha=2$
 β) $B=-\beta(3-\beta)(2-\beta)(1-\beta)$ όταν $\beta=5$
 γ) $\Gamma=\gamma(\gamma-3)(2\gamma-4)(3\gamma-8)$ όταν $\gamma=6$

5. Να γίνουν οι πράξεις
 α) $-[-(9-3)+(5-6-7)](-3)$
 β) $-[-(-6)]9+53-(-1)$
 γ) $-4(32-11-19)(5-7)$

6. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:
 α) $(+5)(+6)$ β) $(+7)(-3)$ γ) $(-4)(+8)$
 δ) $(-4)(-8)$ ε) $(-12)(+2)$ στ) $(+9)(-7)$
 ζ) $(+10)(+5)$ η) $(-8)(-9)$

7. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:
 α) $(-13)(+5)$ β) $(-0,3)(-1,6)$ γ) $(+5)(-3,75)$
 δ) $0 \cdot (-34)$ ε) $(-2,3)(+6,5)$ στ) $(-1)(+37)$
 ζ) $(-26)(-1)$ η) $(-73) \cdot 0$ θ) $(-5,8)(-3,9)$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

$$\alpha) \left(-\frac{4}{5}\right) \left(+\frac{6}{7}\right) \quad \beta) \left(-\frac{12}{9}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \gamma) \left(+\frac{15}{2}\right) \left(+\frac{6}{16}\right)$$

$$\delta) \left(-\frac{3}{8}\right) \left(+\frac{9}{5}\right) \quad \varepsilon) \left(+\frac{3}{10}\right) \left(-\frac{7}{5}\right) \quad \sigma\tau) \left(-\frac{10}{11}\right) \left(+\frac{13}{6}\right)$$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

$$\alpha) (-1) \left(-\frac{2}{5}\right) \quad \beta) (+5) \left(-\frac{6}{7}\right) \quad \gamma) \left(+\frac{3}{10}\right) (+13)$$

$$\delta) \left(-\frac{7}{9}\right) (+8) \quad \varepsilon) (-9) \left(-\frac{1}{14}\right) \quad \sigma\tau) \left(+\frac{5}{13}\right) (-16)$$

$$\zeta) \left(-\frac{32}{14}\right) \left(-\frac{6}{12}\right) \quad \eta) \left(+\frac{5}{26}\right) \left(+\frac{17}{9}\right) \quad \theta) \left(+\frac{43}{21}\right) \left(-\frac{11}{15}\right)$$

10. Να κάνετε τις πράξεις στα γινόμενα:

$$\alpha) (-4)(-2)(+7) \quad \beta) (-9)(+5)(-3) \quad \gamma) (-3)(-4)(-5)$$

$$\delta) (-5)(+6)(+3) \quad \varepsilon) (+12)(-7)(-5) \quad \sigma\tau) (-1)(+17)(+23)$$

11. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

$$\alpha) \left(-\frac{3}{5}\right) (-2)(+6) \quad \beta) \left(+\frac{4}{7}\right) (-5) \left(+\frac{8}{3}\right) \quad \gamma) (-10) \left(-\frac{5}{6}\right) (-3)$$

$$\delta) \left(-\frac{1}{4}\right) \left(+\frac{10}{3}\right) (-6) \quad \varepsilon) (+5)(+9) \left(+\frac{8}{11}\right) \quad \sigma\tau) (+9) \left(-\frac{6}{7}\right) (-2)$$

12. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω αριθμοί είναι θετικοί ή αρνητικοί:

$$\alpha) A = (-1)(-3)(+5)(-13)(+25)(+4)$$

$$\beta) B = (-8)(+12)(-4)(-11)(-7)(+9)$$

$$\gamma) \Gamma = (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)$$

$$\delta) \Delta = (+5)(-55)(+555)(-5555)(+55555)(-555555)$$

13. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = (-3)(-4)\left(+\frac{1}{8}\right)(+2)(-1)(+5)\left(+\frac{6}{10}\right)$$

$$\beta) B = (-1)(+2)(+3)(-4)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$\gamma) \Gamma = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

14. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) A = (-4) + (-5)(+8) - (-7)(+6) - (+2)(+7)$$

$$\beta) B = (-2)(-8)(-1) + (+4)(+3) - (-10)(-2) + 7$$

$$\gamma) \Gamma = (-3 - 5)(4 - 2)(-1 + 3) - (-9 + 6)(+3) + (-3)(+2)$$

$$\delta) \Delta = -(12 - 10)(8 - 1) + (9 - 4)(7 - 11) - (-13 + 15)$$

15. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) A = -4 + 12(-3) - 3(-5) -$$

$$\beta) B = \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{5}{3} + 7\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{3}$$

$$\gamma) \Gamma = -\frac{4}{5} + (-3)\left(-\frac{2}{7}\right) + 6 \cdot \frac{2}{5}$$

$$\delta) \Delta = -\frac{13}{3} \cdot \frac{4}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)$$

§7.6 Διάρθρωση ρητών αριθμών

- Για να **διαιρέσουμε δύο ρητούς** διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε **(+) αν είναι ομόσημοι (-) αν είναι ετερόσημοι**
Πχ. $(+10):(+2)=+5$ $(-20):(-10)=+2$ ενώ $(+100):(-25)=-4$
- Το πηλίκο (αποτέλεσμα) της διαίρεσης $\alpha:\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται λόγος του α προς β και είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta x = \alpha$
- Γενικά για να διαιρέσουμε δύο οποιουδήποτε αριθμούς, αρκεί να διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη, δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

πχ. $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$, $5 : (-2) = \frac{5}{-2} = 5 \cdot \frac{1}{-2} = -5 \cdot \frac{1}{2} = -2,5$

Παρατήρηση: Δεν ορίζεται διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν

(Βλέπε παραδείγματα σχολικού σελ.133-134.

Παραδείγματα:

- 1) Να υπολογιστούν τα παρακάτω πηλίκα:

$\alpha)(+14):(+7)$ $\beta)(+6):(-2)$ $\gamma)(-35):(+5)$

$\delta)(-20):(-4)$ $\varepsilon)(-39):(+13)$ $\sigma\tau)(+63):(-7)$

Λύση:

Σύμφωνα με τον κανόνα των προσήμων για τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό:

- $(+):(+)=(+)$, $(-):(-)=(+)$
- $(-):(+)=(-)$, $(+):(-)=(-)$

$$\alpha)(+14):(+7) = +2, \text{ γιατί } 14:7 = 2 \text{ και } (+):(+) = (+)$$

$$\beta)(+6):(-2) = -3, \text{ γιατί } 6:2 = 3 \text{ και } (+):(-) = (-)$$

$$\gamma)(-35):(+5) = -7, \text{ γιατί } 35:5 = 7 \text{ και } (-):(+) = (-)$$

$$\delta)(-20):(-4) = +5, \text{ γιατί } 20:4 = 5 \text{ και } (-):(-) = (+)$$

$$\varepsilon)(-39):(+13) = -3, \text{ γιατί } 39:13 = 3 \text{ και } (-):(+) = (-)$$

$$\sigma\tau)(+63):(-7) = -9, \text{ γιατί } 63:7 = 9 \text{ και } (+):(-) = (-)$$

2) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha)A = (-24):(+6) - (+80):(-16) + (-9):(+3)$$

$$\beta)B = (-10):(-2) + (-8+5):(-4+1) - (-6):(-8+11-5)$$

Λύση:

Επειδή η διαίρεση έχει προτεραιότητα έναντι της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, έχουμε:

$$\alpha)A = (-24):(+6) - (+80):(-16) + (-9):(+3) =$$

$$= -4 - (-5) + (-3) = -4 + 5 - 3 = -8 + 5 = -3$$

$$\beta)B = (-10):(-2) + (-8+5):(-4+1) - (-6):(-8+11-5) =$$

$$= 5 + (-3):(-3) - (-6):(-2) = 5 + 1 - 3 = 3$$

3) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha)A = \frac{(-9) - (+8):(-4)}{(-35):(-7) - 14}$$

$$\beta)B = \frac{(-6)(+8) - (+42):(-7)}{(-16):(-8) + (-3)(+4) + (-11)}$$

Λύση:

Ακολουθούμε την προτεραιότητα των πράξεων:

$$\alpha)A = \frac{(-9) - (+8):(-4)}{(-35):(-7) - 14} = \frac{(-9) - (-2)}{5 - 14} =$$

$$= \frac{-9 + 2}{5 - 14} = \frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$$

$$\beta)B = \frac{(-6)(+8) - (+42):(-7)}{(-16):(-8) + (-3)(+4) + (-11)} =$$

$$= \frac{(-48) - (-6)}{2 + (-12) - 11} = \frac{-48 + 6}{2 - 12 - 11} = \frac{-42}{-21} = 2$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογίσετε τα πηλίκα

α) $(+10):(2,5)$

β) $(+10):(-2,5)$

γ) $(-24):(3,5)$

δ) $\frac{-3}{5}:\frac{5}{12}$

ε) $(-\frac{5}{8}):(-\frac{4}{15})$

στ) $(-0,75):(-0,25)$

2) Να υπολογίσετε τα πηλίκα

α) $\frac{84}{8}$

β) $\frac{3^{-2}}{(-12)^{-2}} + \frac{24^3}{12^3} - \frac{10^{-5}}{10^{-4}} - \frac{-102}{6}$

γ) $\frac{-150}{(-6)+(-9)}$

δ) $\frac{-0,54}{(-0,6)+0,51}$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $-4x = 16$

β) $-4x = -16$

γ) $x(-0,15) = 3$

δ) $\frac{2}{3}x = -10$

ε) $\frac{3}{5}x = -\frac{6}{20}$

4) Να γίνουν οι πράξεις

α) $\frac{-3}{8} + \frac{6}{-4} - \frac{-2}{5}$

β) $\frac{-(-3)(-4)(-2)}{48}$

γ) $(\frac{-(-1)}{4} + \frac{8}{-3}):(\frac{-1}{2})$

5) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$[(\frac{-1}{4})(-8) - 10:(-2)][(-10:(\frac{-1}{2}) + 4:(-1)) + 2]$$

6) Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις:

α) $(+6):(+3)$

β) $(-12):(+4)$

γ) $(+15):(-3)$

δ) $(-18):(-6)$

ε) $(-48):(+12)$

στ) $(+144):(-36)$

ζ) $(-32):(+8)$

η) $(+63):(-7)$

7) Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαιρέσεις;

$$\begin{array}{lll} \alpha) 5,6 : (-2) & \beta) -6,4 : (-4) & \gamma) -9 : (-1,5) \\ \delta) 18,1 : (-10) & \varepsilon) -10,2 : (-1,2) & \sigma\tau) -8,6 : (-10) \\ \zeta) -7 : 0,01 & \eta) 0,86 : (-100) & \end{array}$$

8) Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{-48}{6} & \beta) -\frac{36}{-4} & \gamma) -\frac{12}{-3} \\ \delta) \frac{-72}{-8} & \varepsilon) \frac{49}{-7} & \sigma\tau) -\frac{125}{25} \\ \zeta) -\frac{36}{3} & \eta) -\frac{-144}{-12} & \end{array}$$

9) Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{array}{ll} \alpha) (-32) : (-5+1) & \beta) (21-3) : (-6) \\ \gamma) (2 \cdot 8 - 34) : 9 & \delta) (-6+22) : (6-2) \\ \varepsilon) (2 \cdot 6 + 8) : (-9+4) & \sigma\tau) -42 : (7 \cdot (-2) + 2 \cdot 4) \end{array}$$

10) Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \left(-\frac{18}{4}\right) : \frac{3}{2} & \beta) -\frac{4}{7} : \left(-\frac{5}{6}\right) & \gamma) \frac{3}{8} : \frac{5}{9} \\ \delta) \frac{7}{12} : \left(-\frac{10}{6}\right) & \varepsilon) -\frac{19}{2} : \frac{15}{6} & \sigma\tau) -\frac{23}{5} : \left(-\frac{32}{9}\right) \end{array}$$

11) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{lll} \alpha) -3 : \frac{7}{4} & \beta) \frac{5}{9} : (-8) & \gamma) 18 : \left(-\frac{3}{8}\right) \\ \delta) 27 : \frac{25}{3} & \varepsilon) -\frac{13}{41} : 0,02 & \sigma\tau) -81 : \left(-\frac{37}{6}\right) \end{array}$$

12) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = (-4)(-5) + (-36) : 3 - 18 : 2$$

$$\beta) B = 42 : (-7) + [2 : (-1) - 16] : (-3) - (-2) \cdot 8$$

$$\gamma) \Gamma = -16 : 2 - (-5) \cdot 3 - [81 : (-9) + 15 - 12]$$

$$\delta) \Delta = [6 : (-2) - 14 : 7 + 3 \cdot (-1)] + 35 : 5 - 42 : (-7)$$

13) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{7} - 1\right) + 6 \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{6}{7}$$

$$\beta) B = (-9) \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{4}\right) - [48 : (-6) - 15] + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5}$$

14) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \left[\left(-\frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{8}{3} : \frac{1}{5} \right] : \left(-\frac{8}{37}\right)$$

$$\beta) B = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{9} \cdot 27}{6 - \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right] : 0,1}$$

$$\gamma) \Gamma = \left[8 - \frac{5}{6} : \frac{2}{7} + 5 : \left(-\frac{3}{2}\right) \right] : \left(\frac{23}{6} - \frac{8}{3}\right)$$

15) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$a) A = \frac{16 : (-6 + 2) - 15 : [(-4)(-1) - 28 : 7]}{-9 + 36 : (-12) - (-5 + 13 - 9) - 2}$$

$$\beta) B = \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{3}\right) \right] : \frac{7}{5}}{\left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 8 : \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right]}$$

$$\gamma) \Gamma = \left[-3 - \left(-2 + \frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) \right] : \left[5 : (-15) + \frac{3}{2} : \left(-\frac{2}{3}\right) \right]$$

§7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών**Δεκαδική μορφή ρητών**

- Το πηλίκο $1:3$ είναι ένας αριθμός $0,3333....$ με άπειρα δεκαδικά ψηφία.
- Το πηλίκο $13:6=2,16666666...$ είναι ένας αριθμός άπειρα δεκαδικά.

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι προκύπτουν πηλικά δεκαδικοί με **άπειρα ψηφία** που κάποια από αυτά **επαναλαμβάνονται**

- Τους παραπάνω αριθμούς τους ονομάζουμε **περιοδικούς**, ενώ το **πλήθος των επαναλαμβανόμενων ψηφίων** το ονομάζουμε **περίοδος**.

Μετατροπή περιοδικού σε ρητό (βλέπε παράδειγμα σελ. 136 σχολικού) και άλυτες ασκήσεις σχολικού.

§7.8-7.9 Δυνάμεις ρητών με εκθέτη φυσικό-ακέραιο

Δυνάμεις: Δύναμη α^v με βάση τον ρητό α και εκθέτη το φυσικό $v>1$, είναι το

γινόμενο v παραγόντων που είναι ίση με α , δηλαδή :

$$\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{v-\text{παράγοντες}}$$

- **Πρόσημο Δυνάμεων:**

- ♦ Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι πάντα θετικός.
- ♦ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό:
 1. Είναι θετική αν ο εκθέτης είναι άρτιος.
 2. Είναι αρνητική αν ο εκθέτης είναι περιττός.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ			
$\alpha^0=1$	$\alpha^1=\alpha$	$\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{v-\text{παράγοντες}}$	$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$

- Σχόλιο: η δύναμη κάθε αριθμού διάφορου του 0 με εκθέτη το 0 είναι ίση με τη μονάδα.
- Η δύναμη κάθε αριθμού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με τον αντίστροφο του αριθμού υψωμένο στον αντίθετο εκθέτη

$$\text{Πχ } (-5)^0 = 1, \quad (5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ		
Κοινής Βάσεως	Κοινού Εκθέτη	Δύναμη σε Δύναμη
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$	$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$
$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$\alpha^\nu : \beta^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$	

Ασκήσεις

- 1) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις

α) $(-2)^5$ β) $(-3)^3$ γ) $(-345)^0$
 δ) 2^{-2} ε) $(-2)^{-2}$ στ) -2^{-2}

- 2) Να γίνουν οι πράξεις

α) $[(-3)(-3)]^3$ β) $(-2)^2(-2)^3$ γ) $\left(\frac{(-4)^2}{(-4)^3}\right)^{-1}$
 δ) $(-1)^2 + (-1)^0 - (-1)^3 + (-1)^{-1}$ ε) $\frac{(-20)^{-2}}{5^{-2}}$

στ) $\frac{-20^{-2}}{(-5)^{-2}}$

- 3) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων

$A = [(-3)^2]^2 [(-2)^3]^{-3} - [(101)^5 (101)^{-5}]^{200}$ $B = \frac{3^{-2}}{(-12)^{-2}} + \frac{24^3}{12^3} - \frac{10^{-5}}{10^{-4}}$

- 4) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$A = 4^2 \cdot [(3^2 - 7) + (3 \cdot 2^3 - 10^3 : 50)] - 6^2 : 3^2 \cdot 2$

$B = (7^2 - 5 \cdot 10)^8 + (2 \cdot 3^2 - 51) \cdot (64 - 2 \cdot 5^2) - 4 \cdot (2 \cdot 13 - 4^2)$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του κλάσματος

$$\Gamma = \frac{(2A^3) \cdot B^2}{(A+1)^3 \cdot (B+1)}$$

5) Αν

$$\alpha = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5} \right) - \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{14}{4} : \frac{15}{8} - \frac{7}{3} : \frac{5}{3} \right)$$

$$\beta = 2 \cdot \left[\left(2 - \frac{4}{3} \right) \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1}{5} : 3 \right] - \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{3} \right]$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 + \beta^2$.

6) Να υπολογίσετε τον αριθμό

$$\chi = (5 \cdot 2)^2 - \left(15 : \frac{3}{5} + 2^2 \cdot 6 \right) - 3 \cdot (2^5 - 2^3 - 1)$$

και στη συνέχεια να αναλύσετε τον αριθμό χ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

7) Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) : \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2} \right) \cdot 20}{\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{3 \cdot 5 - 6}{11}} \text{ και } B = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{3 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right)}{10}$$

i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις A και B

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\Gamma = \frac{A}{\frac{1}{2}} : \frac{1}{B}$$

8) Αν $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 5$ να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

i) $A = \alpha \cdot \beta + (\beta - \gamma) : \alpha$

ii) $B = (2 \cdot \alpha^2) : (-\beta - \gamma) - \alpha$

9) Αν $\alpha + \beta = -8$ να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = (\alpha + \beta) \cdot \alpha + (3^2 - 2^3) \cdot \alpha + 3^2 - \beta$$

➤ **Προτεραιότητα των πράξεων:** Εκτελούμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την ακόλουθη σειρά:

1. Εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.
2. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
3. Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
4. Εκτελούμε προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ		
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
<u>Αντιμεταθετική</u>	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο	$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$	$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
Μοναδιαίο	--	$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
Αντίθετος	$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$	--
Αντίστροφος	--	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ή $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$ $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$ ή $\alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta - \gamma)$	

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

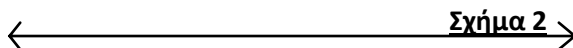
➤ **Γεωμετρικό Σχήμα:** Είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου.

- **Επίπεδα Σχήματα:** Είναι τα σχήματα που αποτελούνται από σημεία που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
- **Στερεά Σχήματα:** Είναι το σύνολο των σημείων που δεν βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο.
- **Ευθύγραμμο Τμήμα:** Θεωρούμε την πλευρά AB ενός ορθογωνίου ή το τεντωμένο νήμα μίας κλώστης. Το ευθύ αυτό τμήμα με αρχή A και τέλος B, λέγεται ευθεία AB.



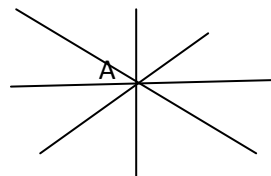
Σχήμα 1

- **Ευθεία:** Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα το προεκτείνουμε και από τις δύο μεριές απεριόριστα έχουμε μία ευθεία. Η ευθεία συμβολίζεται ϵ ή AB (από δύο σημεία της A, B) ή $x'x$.



• **Ιδιότητες Ευθείας:**

1. Από ένα σημείο περνάνε άπειρες ευθείες.



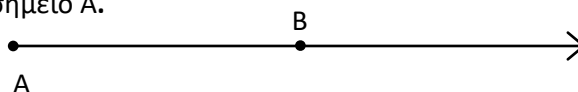
Σχήμα 3

2. Από δύο σημεία περνάει μόνο μια ευθεία.



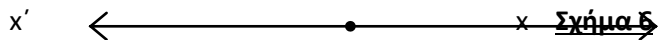
Σχήμα 4

- **Ημιευθεία:** Αν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πάρουμε ένα σημείο A και προεκτείνουμε απεριόριστα από το ένα άκρο του τότε προκύπτει η ημιευθεία Ax (ή AB) με αρχή το σημείο A.



Σχήμα 5

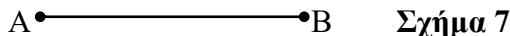
- **Αντικείμενες ημιευθείες:** Αν πάρουμε μία ευθεία ϵ και ένα σημείο A σε αυτή τότε η ευθεία χωρίζεται σε δύο ημιευθείες Ax και Ax' που έχουν αρχή το A και προεκτείνονται και από τις δύο μεριές.



Οι ευθείες αυτές Ax και Ax' που έχουν κοινή αρχή και η μία είναι προέκταση της άλλης λέγονται αντικείμενες ημιευθείες.

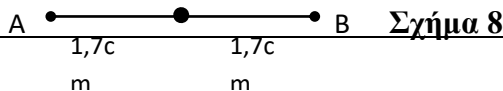
- **Απόσταση δύο σημείων:** Ονομάζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει αυτά τα σημεία.

3,4 cm



Γράφουμε $AB=3,4\text{cm}$

- **Μέσο Ευθυγράμμου τμήματος:** Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζεται το σημείο M του AB που το χωρίζει σε δύο τμήματα MA και MB που έχουν το ίδιο μήκος.

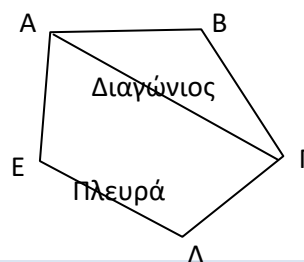


- **Ίσα Ευθύγραμμα Τμήματα:** Δύο τμήματα που έχουν το ίδιο μήκος λέμε ότι είναι ίσα.

Ευθύγραμμα Τμήματα μπορούμε να συναντήσουμε και σε σχήματα του επιπέδου

- **Πλευρά Πολυγώνου:** Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο διαδοχικές κορυφές ενός πολυγώνου (πχ. AB , $BΓ$, κτλ.).

Σχήμα 9



Διαγώνιος Πολυγώνου : Είναι το Ευθύγραμμο Τμήμα που ενώνει δύο μη

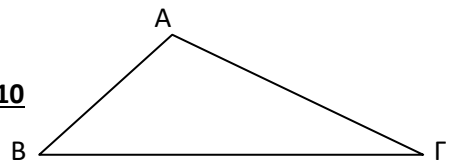
διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου (π.χ $AΓ$).

Παρατήρηση: Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$\delta = \frac{v(v-3)}{2}$$

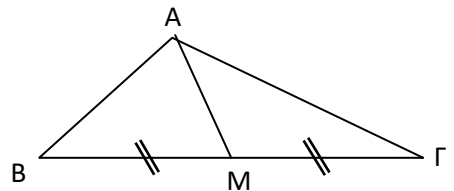
- **Πλευρά Τριγώνου:** Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο διαδοχικές κορυφές ενός τριγώνου (πχ. ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.).

Σχήμα 10



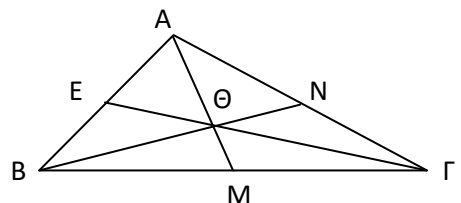
- **Διάμεσος Τριγώνου:** Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Σχήμα 11



- **Κέντρο Βάρους Τριγώνου (Βαρύκεντρο):** Είναι το σημείο τομής των τριών διαμέσων ενός τριγώνου (Σημείο Θ).

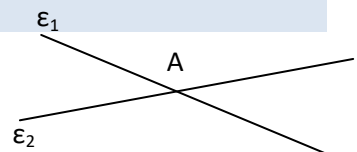
Σχήμα 12



- **Σχετικές Θέσεις Ευθειών (Δύο ή Περισσοτέρων):**

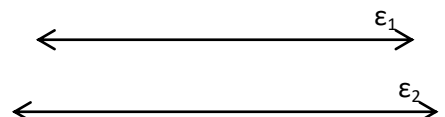
Δύο ευθείες ενός επιπέδου μπορεί να είναι :

- ♦ **Τεμνόμενες:** Να έχουν δηλαδή ένα κοινό σημείο (Το Α)



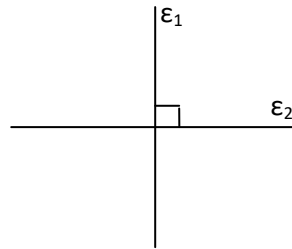
Σχήμα 13

- ♦ **Παράλληλες ($\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$) :** Είναι οι ευθείες που όσο και αν προεκταθούν δεν έχουν κοινά σημεία και συμβολίζονται $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.

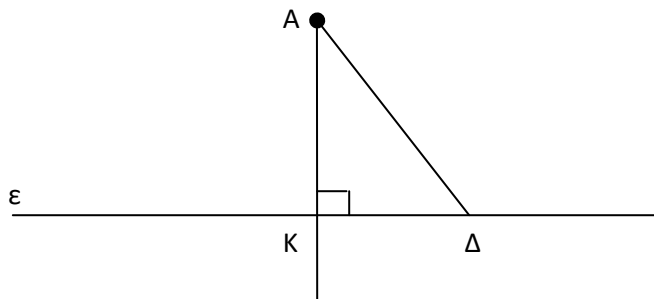


Σχήμα 14

- **Κάθετες Ευθείες ($\epsilon_1 \perp \epsilon_2$):** Είναι οι τεμνόμενες ευθείες που συμπίπτουν με τις δύο πλευρές του γνώμονα και συμβολίζονται $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

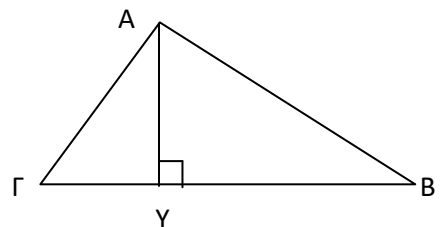
**Σχήμα 15**

- **Απόσταση Σημείου από Ευθεία:** Είναι η απόσταση ενός σημείου A του επιπέδου, που βρίσκεται έξω από μία ευθεία ϵ , από αυτή. Για να το βρούμε αρκεί να φέρουμε την κάθετο από το σημείο A στην ευθεία ϵ .

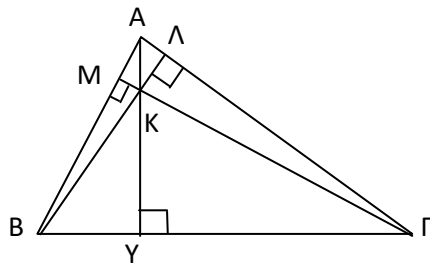
**Σχήμα 16**

- **Ίχνος Καθέτου:** Είναι το σημείο τομής K της καθέτου AK πάνω στην ευθεία ϵ .
- **Προβολή Σημείου:** Το σημείο K αποτελεί την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ϵ .
Αν Δ ένα τυχαίο σημείο της ϵ διαφορετικό από το ίχνος K τότε $AK < A\Delta$.

- **Ύψος Τριγώνου:** Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κορυφή ενός τριγώνου και καταλήγει κάθετα στην απέναντι πλευρά, δηλαδή η απόσταση της κορυφής από την απέναντι πλευρά.

**Σχήμα 17**

- **Ορθόκεντρο τριγώνου:** Είναι το σημείο τομής των τριών υψών ενός τριγώνου.

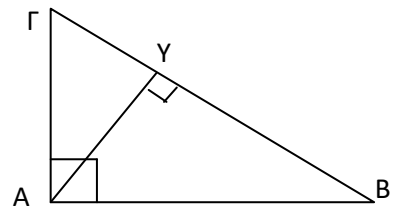


Σχήμα 18

Παρατήρηση:

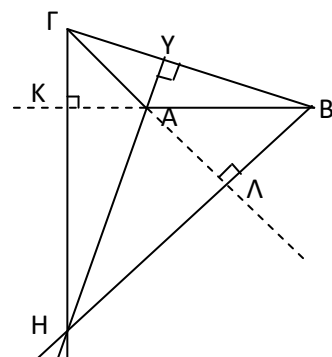
1. Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου μπορεί να βρίσκεται
α) μέσα στο τρίγωνο όταν αυτό είναι οξυγώνιο (Σχήμα 18)

- β) πάνω στην κορυφή A που είναι η ορθή γωνία του τριγώνου, όταν αυτό είναι ορθογώνιο (Σχήμα 19)



Σχήμα 19

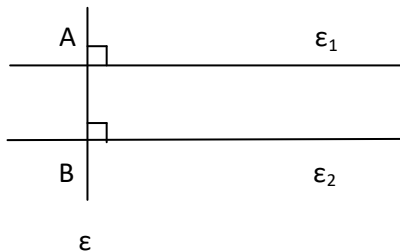
- γ) έξω από αυτό όταν είναι αμβλυγώνιο στο A στο σημείο H (Σχήμα 20)



Σχήμα 20

2. Οι κάθετες ευθείες μπορούν να μας βοηθήσουν στη σχεδίαση παραλλήλων ευθειών. Αυτό γίνεται γιατί, αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μία ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Σχήμα 21

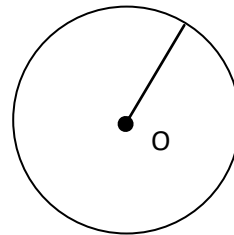


Η ευθεία $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$ και $\varepsilon_2 \perp \varepsilon$. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

➤ Κύκλος :

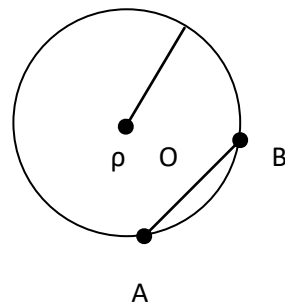
- Ορισμός Κύκλου: Είναι το επίπεδο σχήμα (ή το σύνολο των σημείων του επιπέδου) που όλα τα σημεία του απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ . Τον συμβολίζουμε κύκλο (O, ρ) , με Ο το **κέντρο** του κύκλου και ρ την **ακτίνα** του.

- Ακτίνα Κύκλου: Είναι η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου από το κέντρο του Ο.



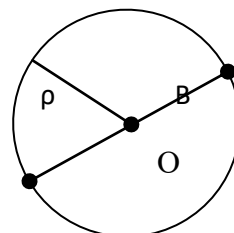
Σχήμα 22

- Χορδή Κύκλου: Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του κύκλου.



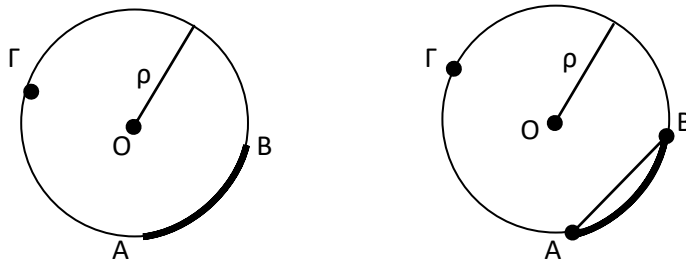
Σχήμα 23

- Διάμετρος Κύκλου: Είναι μία χορδή ενός κύκλου που περνάει από το κέντρο του.



Σχήμα 24

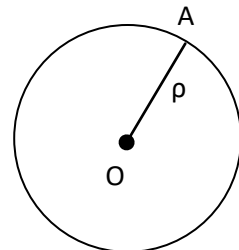
- **Τόξο Κύκλου:** Είναι καθένα από τα δύο μέρη στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από δύο σημεία του. Δηλαδή το τμήμα του κύκλου που δημιουργείται από μία χορδή.



Σχήμα 25

Για να ξεχωρίσουμε τα δύο τόξα, γράφουμε για το μικρό AB και για το μεγάλο $A\Gamma B$.

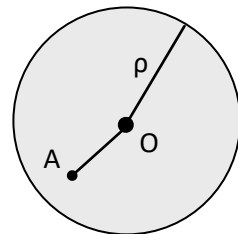
- **Σημεία του Κύκλου:** Είναι τα σημεία του κύκλου που απέχουν από το κέντρο του απόσταση ρ , δηλαδή όσο η ακτίνα, δηλαδή $\rho = OA$



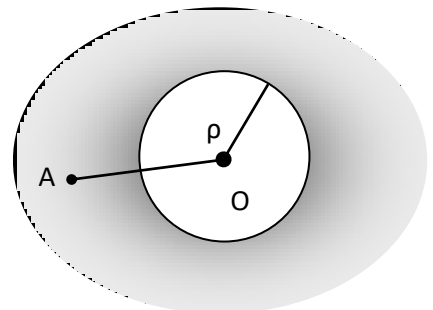
Σχήμα 26

- **Εσωτερικά σημεία του κύκλου:** Είναι τα σημεία του κύκλου που απέχουν από το κέντρο του απόσταση μικρότερη από ρ , δηλαδή μικρότερη από την ακτίνα, $OA < \rho$.

Σχήμα 27

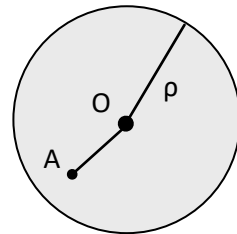


- **Εξωτερικά σημεία του κύκλου:** Είναι τα σημεία του κύκλου που απέχουν από το κέντρο του απόσταση μεγαλύτερη από ρ , δηλαδή μεγαλύτερη από την ακτίνα, $OA > \rho$.



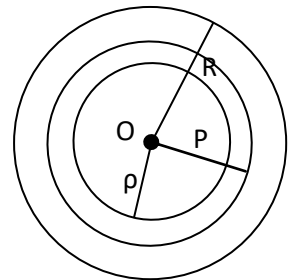
Σχήμα 28

- **Κυκλικός Δίσκος :** Είναι το επίπεδο σχήμα (ή το σύνολο των σημείων του επιπέδου) που αποτελείται από τα σημεία του κύκλου και από τα εσωτερικά σημεία του κύκλου.



Σχήμα 29

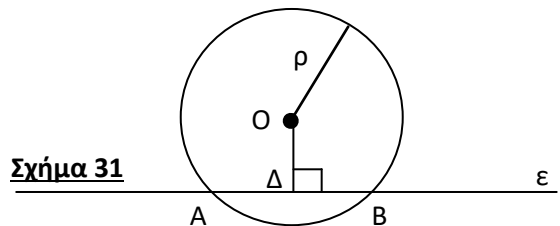
- **Ομόκεντροι Κύκλοι:** Είναι οι κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο, αλλά διαφορετική ακτίνα. Παράδειγμα (O, ρ) , (O, P) , (O, R) με $\rho < P < R$.



Σχήμα 30

➤ **Σχετικές Θέσεις Ευθείας και Κύκλου:**

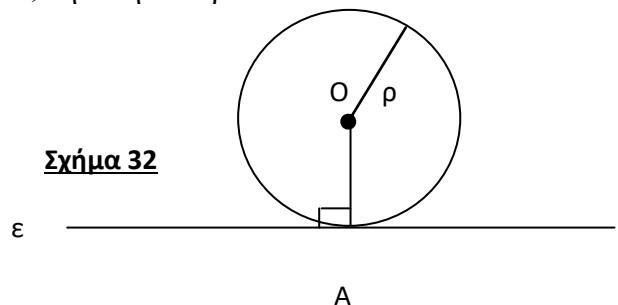
- **Τέμνουσα Κύκλου:** Είναι η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία (ή έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο).



Σχήμα 31

Η απόσταση OD της ευθείας ε (τέμνουσας) από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $OD < \rho$.

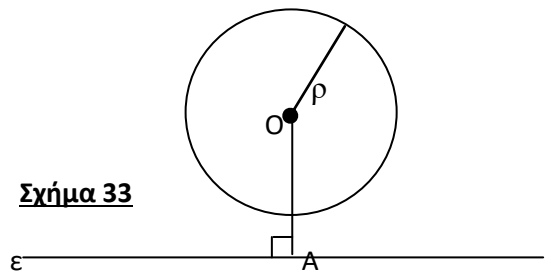
- **Εφαπτομένη κύκλου:** Είναι η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο (ή έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο).



Σχήμα 32

Η απόσταση OA της ευθείας ε (εφαπτόμενης) από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $OA = \rho$.

- **Εξωτερική ευθεία Κύκλου:** Είναι η ευθεία που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.



Σχήμα 33

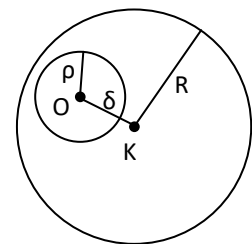
➤ **Σχετικές Θέσεις δύο Κύκλων:**

- **Διάκεντρος δύο Κύκλων:** Ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων και συμβολίζεται με το γράμμα δ .
- **Κύκλοι Χωρίς Κοινά Σημεία:** Δύο κύκλοι (O, ρ) και (K, R) με $\rho < R$ μπορεί να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Τότε:

α) Ο ένας θα είναι εσωτερικός του άλλου (Σχήμα 34).

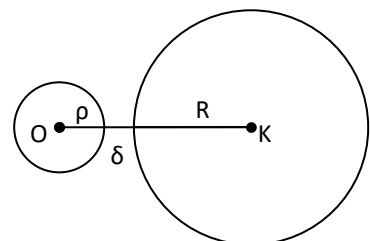
Στην περίπτωση αυτή η διάκεντρος δ είναι μικρότερη από τη διαφορά των δύο ακτινών. Δηλαδή $\delta < R - \rho$.

Σχήμα 34



β) Ο ένας θα είναι εξωτερικός του άλλου (Σχήμα 35).

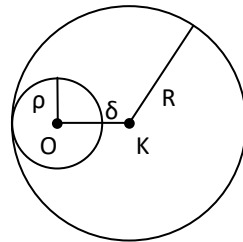
Στην περίπτωση αυτή η διάκεντρος δ είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο ακτινών. Δηλαδή: $\delta > R + \rho$.



Σχήμα 35

- **Εφαπτόμενοι Κύκλοι (Κύκλοι με ένα κοινό σημείο):** Δύο κύκλοι, (O, ρ) και (K, R) με $\rho < R$ μπορεί να έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε:

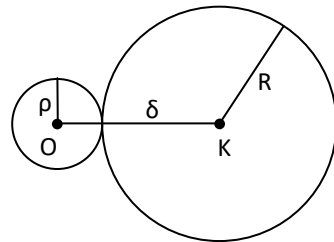
α) Ο ένας θα είναι μέσα από τον άλλο (Σχήμα 36). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. Η διάκεντρος δ είναι ίση με την διαφορά των δύο ακτινών.

**Σχήμα 36**

Δηλαδή : $\delta = R - \rho$.

β) Ο ένας θα είναι έξω από τον άλλο (Σχήμα 37). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Η διάκεντρος δ είναι ίση με το άθροισμα των δύο ακτινών.

Δηλαδή : $\delta = R + \rho$.

**Σχήμα 37**

Παρατήρηση: Το κοινό σημείο των εφαπτομένων κύκλων ονομάζεται **Σημείο Επαφής**.

- **Τεμνόμενοι Κύκλοι (Κύκλοι με δύο κοινά σημεία):** Δύο κύκλοι, (O, ρ) και (K, R) με $\rho < R$ μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Οι κύκλοι

αυτοί ονομάζονται τεμνόμενοι

και το ευθύγραμμο τμήμα AB

με άκρα τα σημεία τομής τους

ονομάζεται κοινή χορδή των

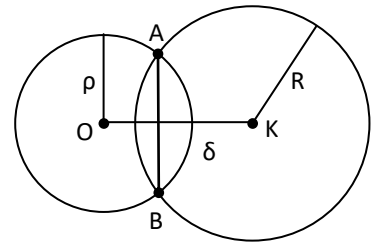
τεμνόμενων κύκλων (Σχήμα 38).

Η διάκεντρος δ είναι μεγαλύτερη

από τη διαφορά των δύο ακτινών

και μικρότερη από το άθροισμα των δύο ακτινών. Δηλαδή: $R - \rho < \delta < R + \rho$.

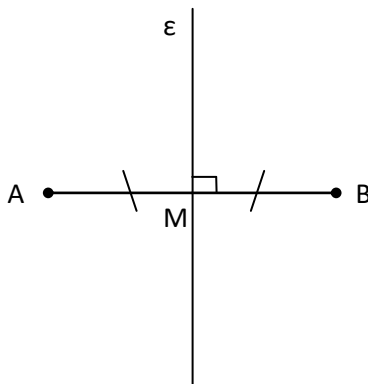
Παρατήρηση: Δύο κύκλοι μπορεί να έχουν το πολύ μέχρι δύο κοινά σημεία.



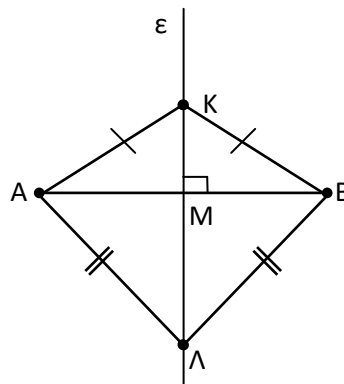
Σχήμα 38

➤ **Μεσοκάθετος**

- **Μεσοκάθετος Ευθυγράμμου Τμήματος:** Είναι η ευθεία ϵ που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και περνάει από το μέσο του (Σχήμα 39).



Σχήμα 39

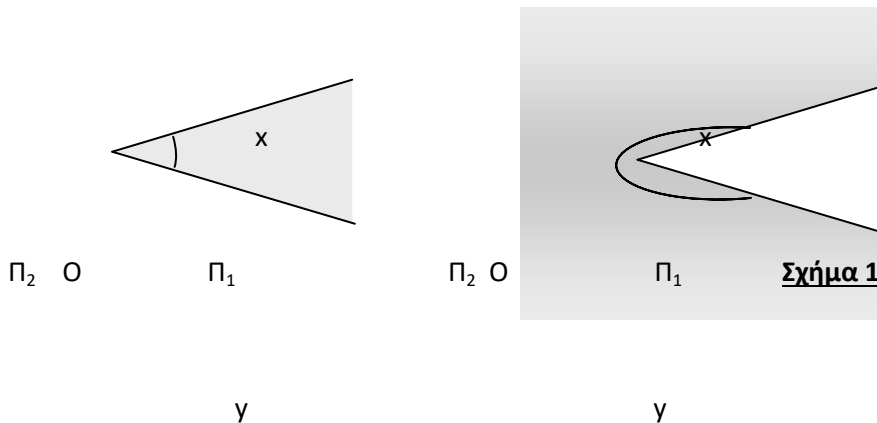


Σχήμα 40

- **Ιδιότητα Μεσοκαθέτου:** Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος AB ($KA=KB$ και $LA=LB$) και αντίστροφα, δηλαδή κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται στην μεσοκάθετο του (Σχήμα 40).

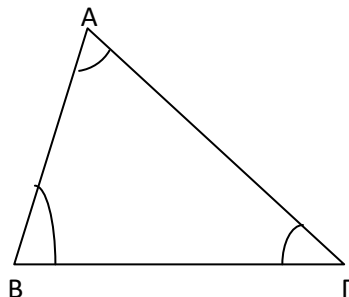
ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ

➤ **Γωνία:** Αν σχεδιάσουμε σε ένα χαρτί δύο ημιευθείες Ox και Oy με κοινή αρχή, τότε το επίπεδο χωρίζεται σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2 . Οι περιοχές αυτές λέγονται γωνίες. Η Π_1 θα λέγεται κυρτή ενώ η Π_2 μη κυρτή.



Τις γωνίες μπορούμε να τις ονομάσουμε είτε με το γράμμα της κορυφής, δηλαδή $\hat{O}$, είτε με τρία γράμματα, δηλαδή $x\hat{O}y$.

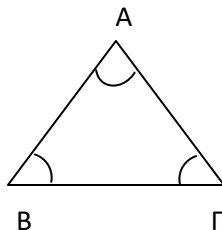
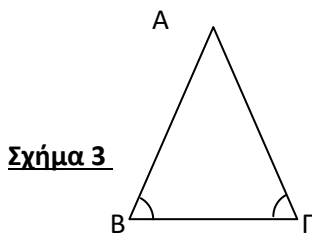
- **Ίσες Γωνίες:** Είναι οι γωνίες που αν οι πλευρές τους τοποθετηθούν με διαφανές χαρτί, η μία πάνω στην άλλη θα συμπίπτουν.
- **Γωνίες Τριγώνου:** Γωνία τριγώνου $\hat{A}$ λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από τις πλευρές του τριγώνου. Δηλαδή η $\hat{A}$ ή $B\hat{A}G$ δημιουργείται από τις πλευρές BA και GA .



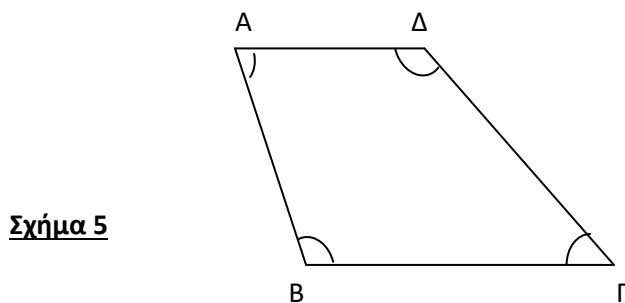
Σχήμα 2

Όμοια η $\hat{B}$ δημιουργείται από τις πλευρές BA και GB και η $\hat{G}$ από τις πλευρές GA και GB .

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες (Σχήμα 3),
ενώ στο **ισόπλευρο** όλες είναι ίσες (Σχήμα 4).

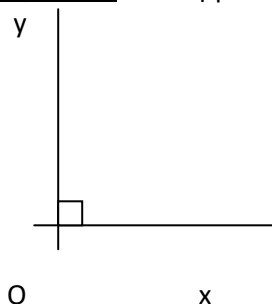


- **Γωνίες Τετραπλεύρου:** Είναι αντίστοιχα οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του τετραπλεύρου.



ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

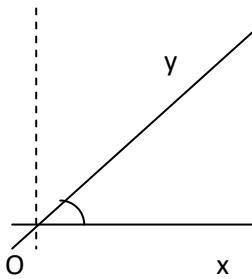
- **Ορθή Γωνία:** Είναι η γωνία που οι πλευρές της είναι κάθετες.



1 Ορθή γωνία = 90°

Σχήμα 5

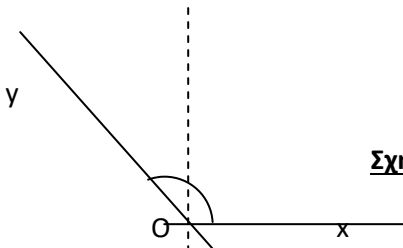
- **Οξεία Γωνία:** Είναι η γωνία που είναι μικρότερη από την ορθή (ή από 90°).



1 Οξεία γωνία $< 90^\circ$

Σχήμα 6

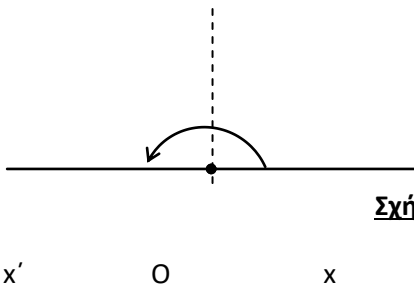
- **Αμβλεία Γωνία:** Είναι η γωνία που είναι μεγαλύτερη από την ορθή (ή από 90°).



1 Αμβλεία γωνία $> 90^\circ$

Σχήμα 7

- **Ευθεία Γωνία:** Είναι η γωνία που οι πλευρές της είναι αντικείμενες ημιευθείες.

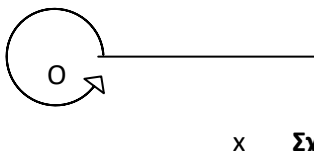


1 Ευθεία γωνία $= 180^\circ$

Σχήμα 8

Παρατήρηση: Μία ευθεία γωνία χωρίζεται σε δύο ορθές γωνίες.

- **Πλήρης Γωνία:** Είναι η γωνία που δημιουργείται από την περιστροφή της ημιευθείας Ox μέχρι να συμπίψει με την αρχική της θέση.

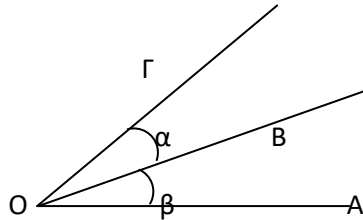


1 Πλήρης γωνία $= 360^\circ$

Σχήμα 9

Παρατήρηση: Μία πλήρης γωνία χωρίζεται σε δύο ευθείες γωνίες ή σε τέσσερις ορθές.

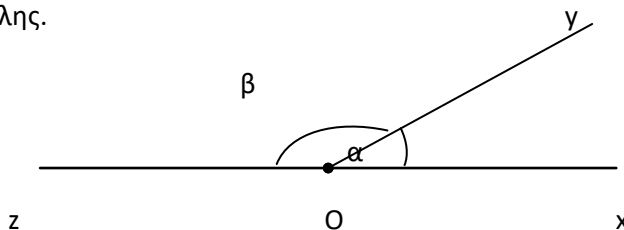
- **Εφεξής Γωνίες:** Είναι οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ που έχουν την ίδια κορυφή O , μία κοινή πλευρά OB και κανένα άλλο κοινό σημείο.



Σχήμα 10

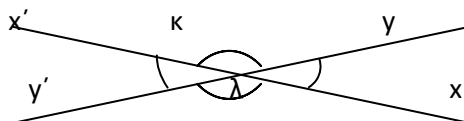
Παρατήρηση: Για να προσθέσουμε δύο γωνίες πρέπει να τις κάνουμε εφεξής

- **Παραπληρωματικές γωνίες:** Είναι οι γωνίες $(\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{y}\hat{O}z)$ που το άθροισμα τους είναι 180° . Η καθεμία από αυτές τις γωνίες καλείται παραπληρωματική της άλλης.



Σχήμα 11

- **Κατακορυφήν γωνίες:** Είναι οι γωνίες $(\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y')$ που έχουν κοινή αρχή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.



Σχήμα 12

Στο παραπάνω σχήμα κατακορυφήν γωνίες είναι οι $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ αλλά και οι $\hat{\kappa}$ και $\hat{\lambda}$.

Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

➤ **Σχήματα Με Άξονα Συμμετρίας:**

Υπάρχουν σχήματα που χωρίζονται από μία νοητή ευθεία ϵ σε δύο μέρη, τα οποία ταυτίζονται όταν διπλώσουμε το χαρτί στο οποίο είναι σχεδιασμένα κατά μήκος της ευθείας ϵ .

Ένα τέτοιο σχήμα λέμε ότι έχει **άξονα συμμετρίας**

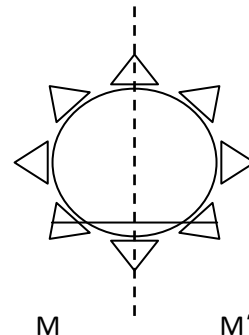
την ευθεία ϵ , ενώ δύο σημεία του M και M' , που

ταυτίζονται κατά την δίπλωση του χαρτιού, λέγονται

συμμετρικά ως προς την ϵ . Τα δύο αυτά τα σχήματα

που δημιουργούνται κατά τη δίπλωση του χαρτιού,

είναι ίσα.



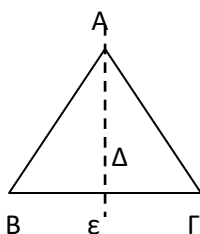
Σχήμα 1

• **Βασικά Σχήματα Με Άξονα Συμμετρίας:**

**ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ
ΤΡΙΓΩΝΟ**

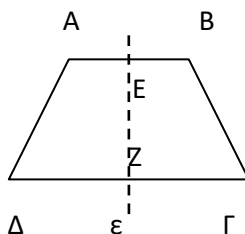
**ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ
ΤΡΑΠΕΖΙΟ**

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



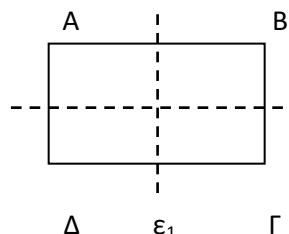
Σχήμα 1

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει άξονα συμμετρίας τη διάμεσο του AD .



Σχήμα 2

Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία EZ που συνδέει τα μέσα των δύο βάσεων του.

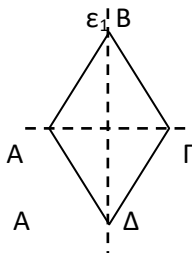


Σχήμα 3

Το ορθογώνιο έχει δύο άξονες συμμετρίας, τις ευθείες που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

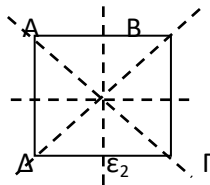
ΡΟΜΒΟΣ



Σχήμα 4

Ο ρόμβος έχει δύο άξονες συμμετρίας, τις διαγώνιες του.

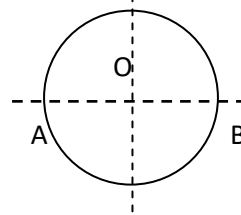
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



Σχήμα 5

Το τετράγωνο έχει τέσσερις άξονες συμμετρίας, τις δύο ευθείες που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του και τις δύο διαγώνιες του.

ΚΥΚΛΟΣ



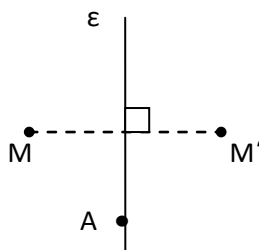
Σχήμα 6

Ένας κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος, έχουν άξονα συμμετρίας κάθε διάμετρο τους AB.

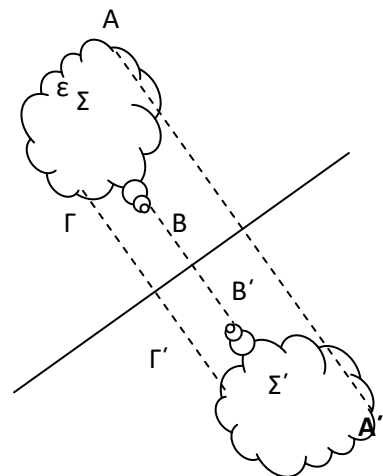
➤ Συμμετρικά Σχήματα ως προς Ευθεία:

Δύο σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε, όταν η ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος MM'. Το σημείο M λέγεται **συμμετρικό** του M' και αντίστροφα (Σχήμα 7).

Δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία ε, όταν κάθε ένα από αυτά αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ευθεία ε.



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Παρατηρήσεις:

1. Τα συμμετρικά σχήματα ως προς μία ευθεία ϵ είναι ίσα.
2. Αν ένα σημείο A βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας ϵ , τότε έχει συμμετρικό τον εαυτό του (Σχήμα 7).

• Σχεδίαση Συμμετρικών ως προς Ευθεία :

Για να σχεδιάσουμε το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς μία ευθεία πρέπει:

1. Επιλέγουμε ένα ή περισσότερα σημεία του σχήματος που θέλουμε να σχεδιάσουμε το συμμετρικό τους.
2. Φέρουμε την κάθετη ή τις κάθετες από τα σημεία που επιλέξαμε πάνω στην ευθεία ϵ και τις προεκτείνουμε.
3. Μετράμε τις αποστάσεις των σημείων από την ευθεία ϵ και παίρνουμε ίσες αποστάσεις στις προεκτάσεις, ώστε να βρούμε τα συμμετρικά σημεία.
4. Ενώνουμε τα σημεία αυτά και δημιουργούμε το συμμετρικό σχήμα.

➤ Σχήματα με Κέντρο Συμμετρίας:

Ένα σχήμα Σ θα λέμε ότι έχει **κέντρο συμμετρίας** ένα σημείο O , όταν το στρέψουμε γύρω από τον O κατά γωνία

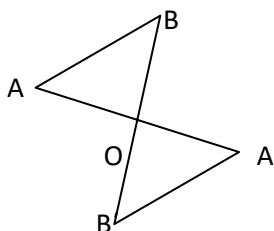
180° , εφαρμόζει απόλυτα στην αρχική

του θέση. Δύο σημεία M και M' ενός

σχήματος Σ τα οποία μετά την

περιστροφή του Σ ταυτίζονται, λέγονται

συμμετρικά ως προς το σημείο O .



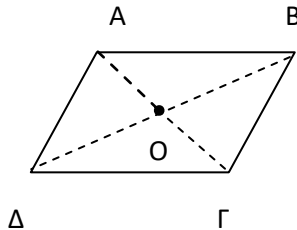
Σχήμα 12

Δύο στοιχεία του σχήματος Σ που ταυτίζονται κατά την περιστροφή του είναι ίσα.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

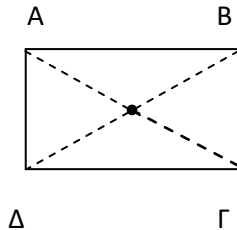
- Βασικά Σχήματα Με Κέντρο Συμμετρίας:

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ



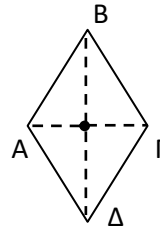
Σχήμα 13

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



Σχήμα 14

ΡΟΜΒΟΣ



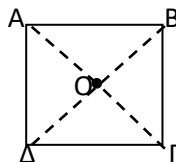
Σχήμα 15

Το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του

Το ορθογώνιο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του

Ο ρόμβος έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του

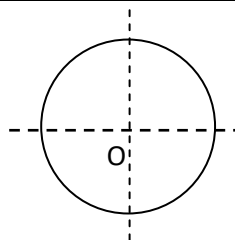
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



Σχήμα 16

Το τετράγωνο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων.

ΚΥΚΛΟΣ



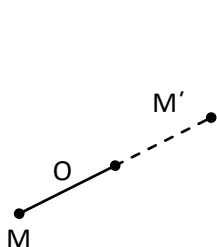
Σχήμα 17

Ένας κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος, έχουν κέντρο συμμετρίας το κέντρο του.

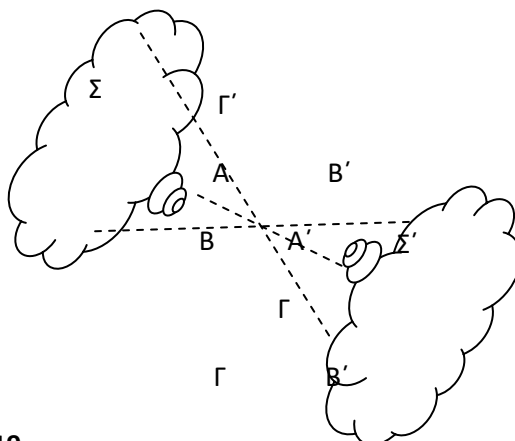
➤ Σχήματα Συμμετρικά ως προς Σημείο:

Αν O είναι το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος MM' , τα σημεία M και M' λέγονται **συμμετρικά ως προς το σημείο O** και καθένα από αυτά λέγεται **συμμετρικό** του άλλου ως προς το O .

Δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται **συμμετρικά** ως προς ένα σημείο O , όταν κάθε ένα από αυτά αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς το κέντρο O .



Σχήμα 18



Σχήμα 19

Παρατηρήσεις:

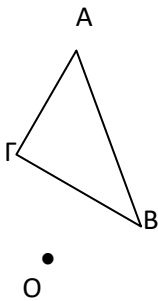
1. Τα συμμετρικά σχήματα ως προς κέντρο O είναι ίσα.
2. Το συμμετρικό του κέντρου συμμετρίας O , είναι το ίδιο το O .

• Σχεδίαση Συμμετρικών ως προς Κέντρο Συμμετρίας :

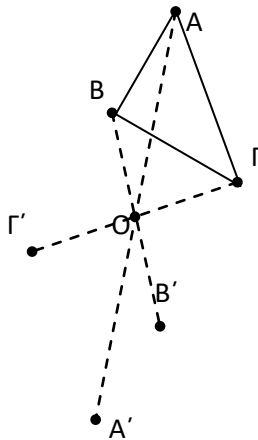
Για να σχεδιάσουμε το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς ένα σημείο :

1. Επιλέγουμε ένα ή περισσότερα σημεία του σχήματος που θέλουμε να σχεδιάσουμε το συμμετρικό τους.
2. Φέρουμε την ευθεία ή τις ευθείες από τα επιλεγμένα σημεία και το κέντρο O και τις προεκτείνουμε.
3. Μετράμε τις αποστάσεις των σημείων από το κέντρο O και παίρνουμε ίσες αποστάσεις στις προεκτάσεις, ώστε να βρούμε τα συμμετρικά σημεία.

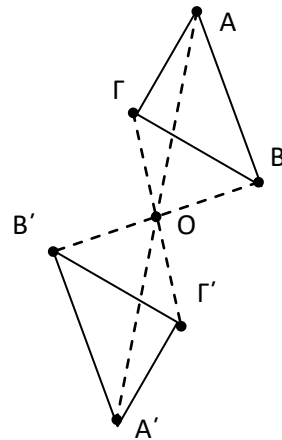
4. Ενώνουμε τα σημεία αυτά και δημιουργούμε το συμμετρικό σχήμα.



Σχήμα 20

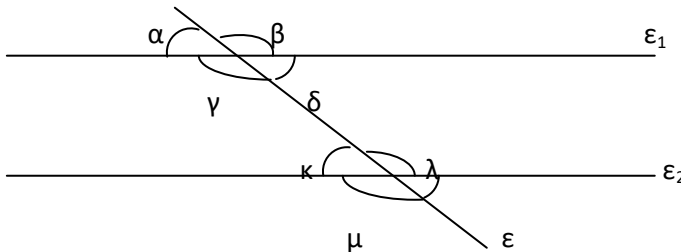


Σχήμα 21



Σχήμα 22

- Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία (παράλληλες και τεμνόμενη ευθεία):



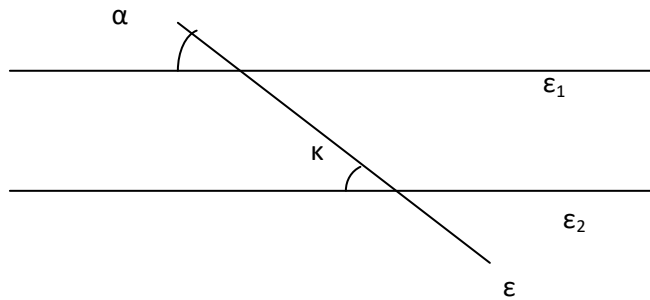
Σχήμα 13

Στο παραπάνω σχήμα (13) οι δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και η ευθεία που τις τέμνει ϵ , δημιουργούν τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$.

Οι γωνίες αυτές ανά δύο παίρνουν το όνομα τους ανάλογα με το πού βρίσκονται:

- ◆ Αυτές που βρίσκονται εντός των δύο παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 , δηλαδή $\hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda}$ καλούνται εντός, ενώ οι $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$, που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 καλούνται εκτός.
- ◆ Αυτές που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ϵ καλούνται επί τα αυτά, ενώ αυτές που βρίσκονται σε διαφορετικά μέρη (περιοχές) της ϵ καλούνται εναλλάξ.

ΕΝΤΟΣ ΕΚΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ ΜΕΡΗ ΓΩΝΙΕΣ



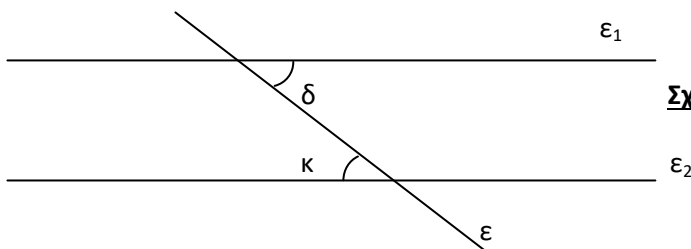
Σχήμα 14

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\kappa}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά. Άλλες εντός εκτός και επί τα

αυτά γωνίες είναι τα ακόλουθα ζεύγη: $\hat{\beta} - \hat{\lambda}$, $\hat{\gamma} - \hat{\mu}$, $\hat{\delta} - \hat{\nu}$.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα, δηλαδή αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ ΓΩΝΙΕΣ



Σχήμα 15

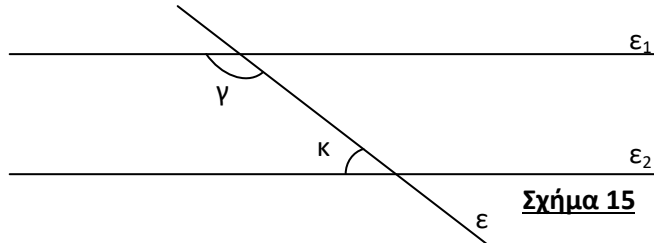
Οι γωνίες $\hat{\delta}$, $\hat{\kappa}$ είναι εντός εναλλάξ. Άλλες εντός εναλλάξ γωνίες είναι το

ζεύγος: $\hat{\gamma} - \hat{\lambda}$,.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα. Δηλαδή αν δύο ευθείες τέμνονται

από μία τρίτη και οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

ΕΝΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ ΜΕΡΗ ΓΩΝΙΕΣ

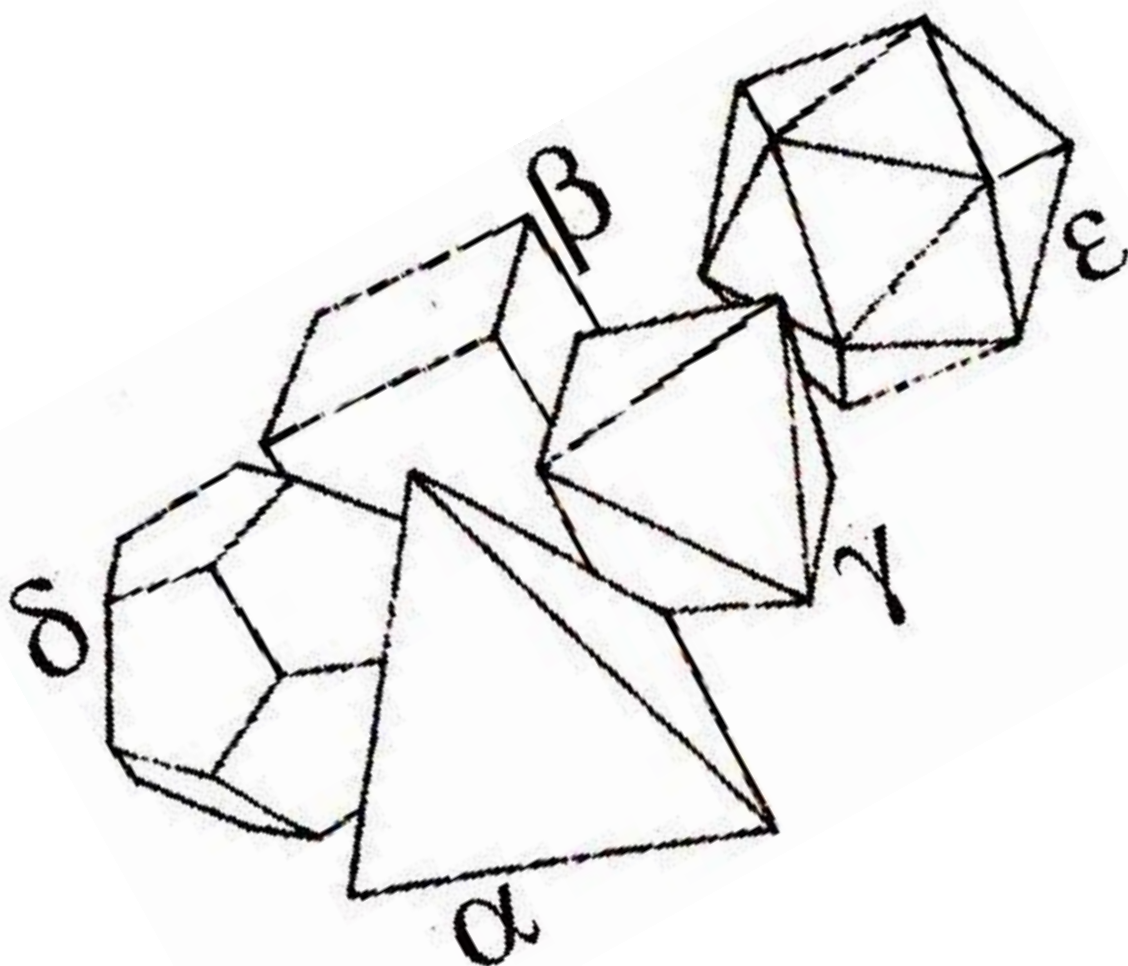


Σχήμα 15

Οι γωνίες $\hat{\gamma}$, $\hat{\kappa}$ είναι εντός και επί τα αυτά. Άλλες εντός και επί τα

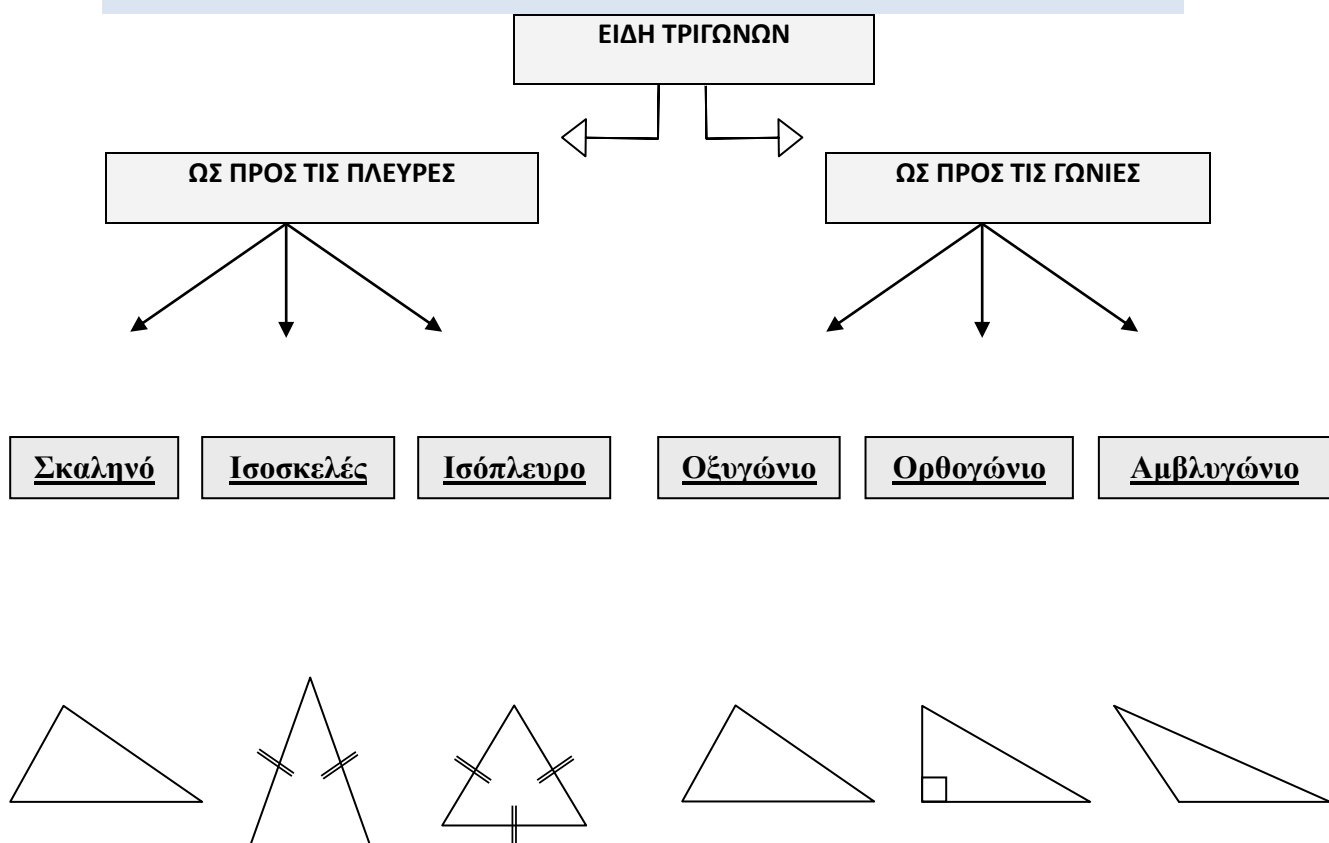
αυτά γωνίες είναι το ζεύγος: $\hat{\delta} - \hat{\lambda}$.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές και αντίστροφα. Δηλαδή, αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.



ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

➤ **ΤΡΙΓΩΝΑ**

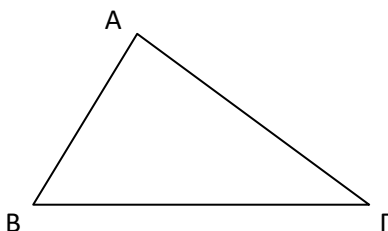


Σχήμα 16

Τρίγωνα ως προς τις πλευρές:	Τρίγωνα ως προς τις γωνίες
• Σκαληνό: Είναι το τρίγωνο που έχει όλες του τις πλευρές άνισες. • Ισοσκελές: Είναι το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. • Ισόπλευρο: Είναι το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές ίσες.	• Οξυγώνιο: Είναι το τρίγωνο που έχει όλες του τις γωνίες οξείες. • Ορθογώνιο: Είναι το τρίγωνο που έχει μόνο μία ορθή. • Αμβλυγώνιο: Είναι το τρίγωνο που έχει μία μόνο αμβλεία.

• **Άθροισμα γωνιών τριγώνου:**

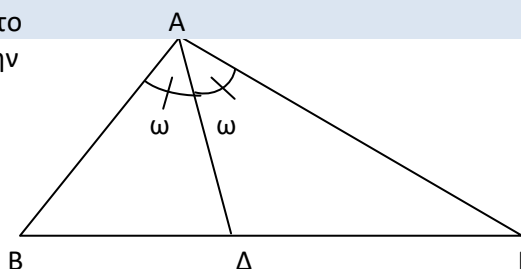
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

Σχήμα 17

- **Διχοτόμος Γωνίας Τριγώνου:** Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κορυφή ενός τριγώνου, και χωρίζει τη γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες.

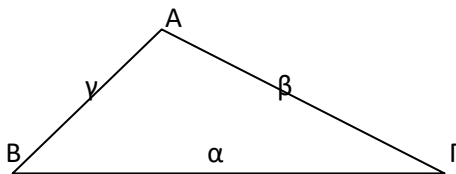


Σχήμα 1

➤ **Ίσα Τρίγωνα:** Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, και αντίστροφα.

Δηλαδή, όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

- **Τριγωνική Ιδιότητα:** Αν α , β , γ , οι πλευρές ενός τριγώνου, τότε το άθροισμα δύο πλευρών είναι πάντα μικρότερο από την τρίτη (Σχήμα 1).



$$\alpha < \beta + \gamma$$

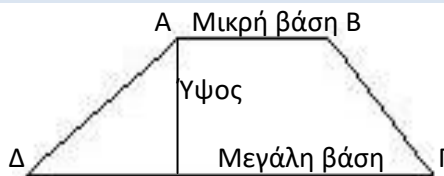
$$\beta < \alpha + \gamma$$

$$\gamma < \alpha + \beta$$

Σχήμα 1

➤ Είδη Τετραπλεύρων:

- Τραπεζίο:** Είναι το τετράπλευρο που έχει δύο πλευρές (βάσεις) παράλληλες (Σχήμα 2). Οι πλευρές αυτές ονομάζονται βάσεις, μεγάλη και μικρή.

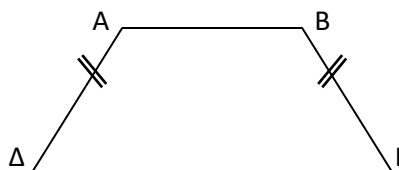


Σχήμα 2

Εμβαδόν Τραπεζίου:

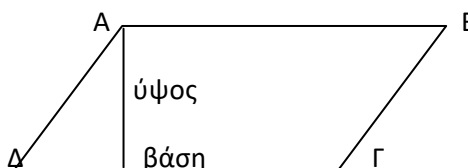
$$E = \frac{(B + \beta) \upsilon}{2}$$

Ισοσκελές Τραπεζίο: Είναι το τραπέζιο που οι δύο μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.



Σχήμα 3

- Παραλληλόγραμμο:** Είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες



Σχήμα 4

Ιδιότητες Παραλληλογράμμου:

- α) Κάθε διαγώνιος το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.
- β) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- γ) Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
- δ) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Αντίστροφα: Ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν ισχύει

ένα από τα παρακάτω:

- α) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- β) Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
- γ) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου:

$$E = \beta \cdot \upsilon$$

3. Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο:

Είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.



Ιδιότητες Ορθογωνίου:

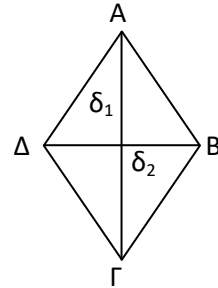
Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τις ίδιες ιδιότητες που έχει και το παραλληλόγραμμο και επιπλέον,

- ε) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου:

$$E = \alpha \cdot \beta$$

4. **Ρόμβος:** Είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



Σχήμα 6

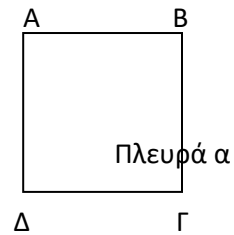
Ιδιότητες Ρόμβου:

Ο ρόμβος έχει τις ίδιες ιδιότητες που έχει και το παραλληλόγραμμο και επιπλέον,

- ε) Οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα.
- στ) Οι διαγώνιοι του διχοτομούν τις γωνίες του.

Εμβαδόν Ρόμβου: $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ με δ_1, δ_2 οι διαγώνιοι του ρόμβου

5. **Τετράγωνο:** Είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες.



Σχήμα 7

Ιδιότητες Τετραγώνου:

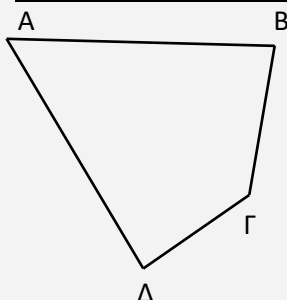
Το τετράγωνο έχει τις ίδιες ιδιότητες που έχει και το παραλληλόγραμμο και επιπλέον έχει και τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του ρόμβου.

Εμβαδόν Τετραγώνου:

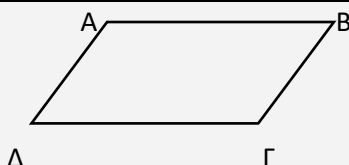
$$E = \alpha^2$$

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

ΚΥΡΤΟ
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ



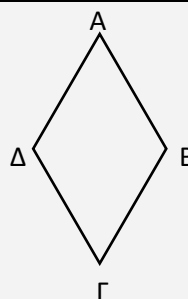
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ



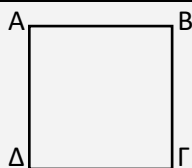
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



ΡΟΜΒΟΣ



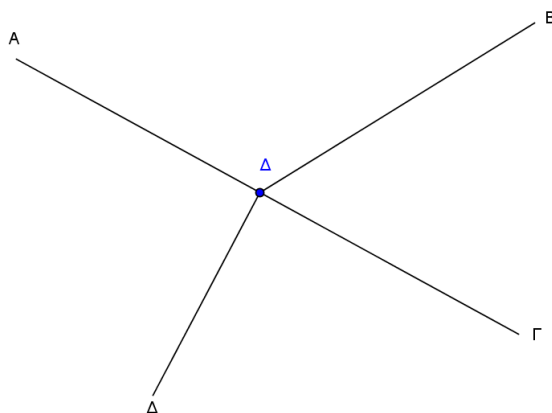
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



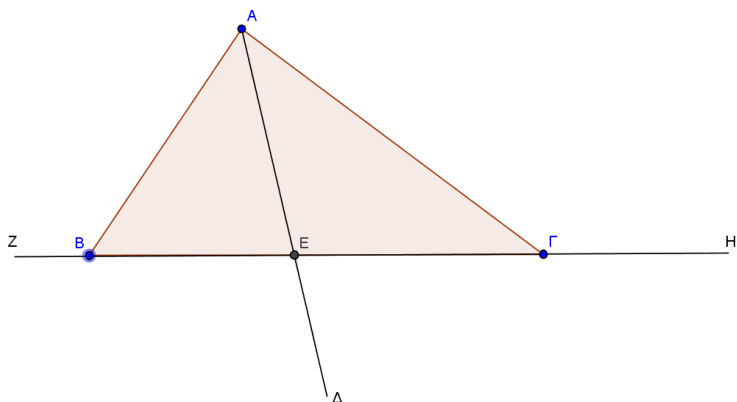
Γεωμετρία – Ασκήσεις

Σημείο – Ευθεία – Ευθύγραμμο τμήμα – Ημιευθεία
Σημείο – Ευθεία – Ευθύγραμμο τμήμα – Ημιευθεία

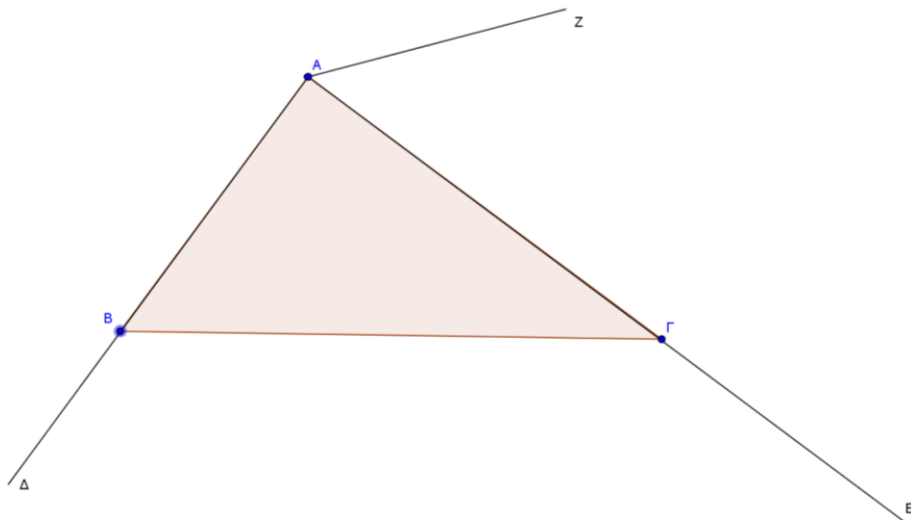
1. Δίνεται ένα σημείο A του επιπέδου.
 - i) Πόσες ευθείες διέρχονται από το A;
 - ii) Θεωρήστε και ένα σημείο B, διαφορετικό του A. Πόσες ευθείες διέρχονται από τα A και B;
 - iii) Να σχεδιάσετε τις ημιευθείες AB και BA. Είναι αντικείμενες;
2. Στο επόμενο σχήμα να βρεθούν
 - i) Οι ημιευθείες
 - ii) Τα ζεύγη των αντικείμενων ημιευθειών



3. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 8 cm. Να πάρετε δύο εσωτερικά σημεία Γ, Δ τέτοια ώστε τα σημεία A, B, Γ, Δ, να είναι διαδοχικά. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται.
4. Να σχεδιάσετε μία ευθεία χγ και τα σημεία A, B και Γ πάνω σε αυτή.
 - i) Ποια ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούνται;
 - ii) Να αναφέρετε τις αντικείμενες ημιευθείες που δημιουργούνται.
5. Στο επόμενο σχήμα να βρεθούν
 - i) Τα ευθύγραμμα σχήματα
 - ii) Οι ημιευθείες
 - iii) Τα ζεύγη των αντικείμενων ημιευθειών.



6. Να σχεδιάσετε δύο ευθείες $x'x$, $y'y$ που τέμνονται στο σημείο O . Αν A , B είναι σημεία της ευθείας $x'x$ και τα σημεία Γ , Δ της ευθείας $y'y$:
- να ονομάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία αυτά
 - να ονομάσετε τις σχεδιασμένες αντικείμενες ημιευθείες του σχήματος.
7. Στο επόμενο σχήμα να βρεθούν
- Τα ευθύγραμμα τμήματα.
 - Οι ημιευθείες.
 - Τα ζεύγη των αντικείμενων ημιευθειών.



8. Να σχεδιάσετε τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δύο. Να βρείτε πόσες ευθείες, πόσα ευθύγραμμα τμήματα και πόσες ημιευθείες σχηματίζονται.
9. Να υπολογίσετε πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν
- 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 8
- διαφορετικά σημεία που ανά τρία δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

10. Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων ενός

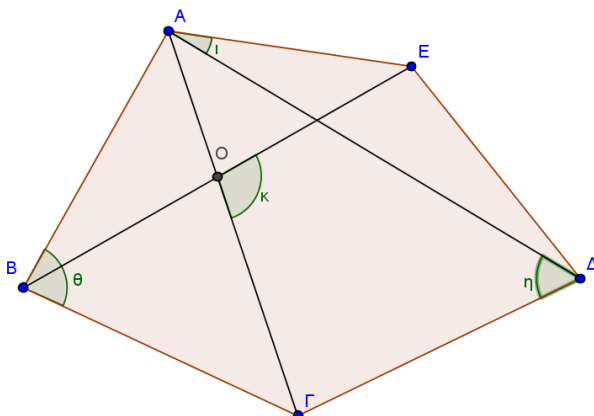
- i) Τετραγώνου ii) Πενταγώνου iii) Εξαγώνου iv) Οκταγώνου.

Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα

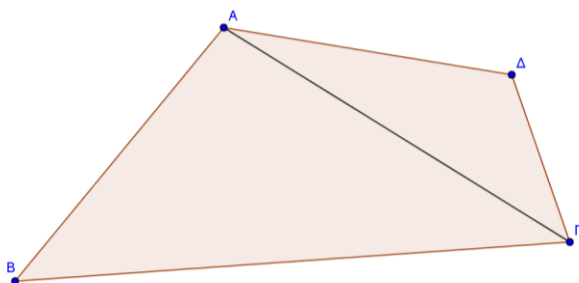
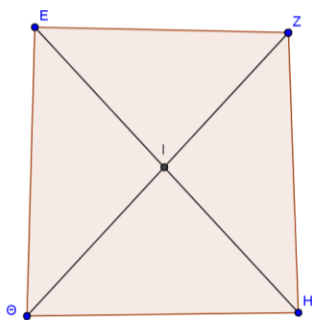
1.

- i) Στο τρίγωνο MNO οι γωνίες που είναι προσκείμενες στην πλευρά OM είναι η γωνία _____ και η γωνία _____.
- ii) Στο τρίγωνο ΔΑΝ η περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΔΝ και ΑΝ είναι η γωνία _____.
- iii) Στο τρίγωνο ΖΗΘ η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\theta \hat{H} Z$ είναι η πλευρά _____.
- iv) Στο τρίγωνο ΒΓΔ η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΔΒ είναι η γωνία _____.

2. Να ονομάσετε με τρία γράμματα τις γωνίες η, θ, ι κ.

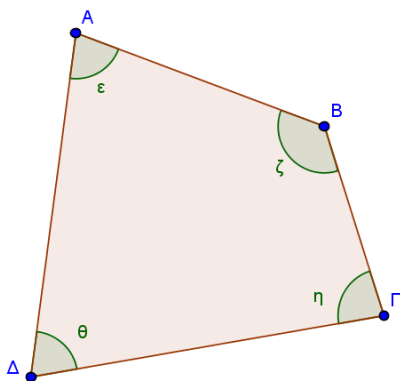


3. Να ονομάσετε με τρία γράμματα όλες τις κυρτές γωνίες των επόμενων σχημάτων.



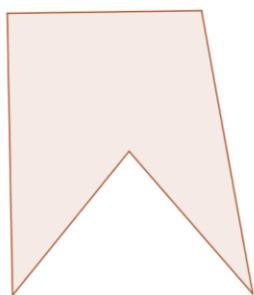
Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα

4. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Να χαρακτηρίσετε όλες τις γωνίες ως προσκείμενες, περιεχόμενες και απέναντι ανάλογα με τις πλευρές του τριγώνου.
- 5.
- i) Να ονομάσετε τις γωνίες $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ με τρία γράμματα.
 - ii) Να ονομάσετε τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, A\Delta$.

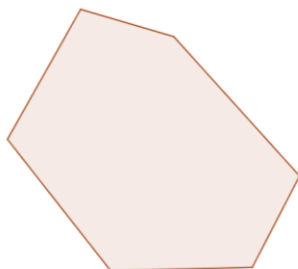


6. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας
- i) Ένα τετράπλευρο που να είναι κυρτό
 - ii) Ένα τετράπλευρο που να μην είναι κυρτό
 - iii) Μία γωνία που να μην είναι κυρτή
 - iv) Μία τεθλασμένη γραμμή που να είναι κυρτή και να έχει 5 πλευρές
 - v) Μία τεθλασμένη γραμμή που να είναι μη κυρτή και να έχει 7 πλευρές.

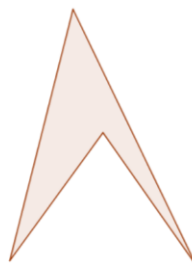
7. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι κυρτά και ποια είναι μη κυρτά;



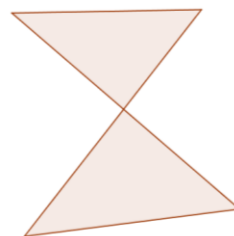
(A)



(B)



(Γ)



(Δ)

Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων

8. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στην πλευρά του ΑΓ να πάρετε δύο διαφορετικά σημεία Δ, Ε. Να σχεδιάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΒΔ.
- Να γράψετε όλα τα τρίγωνα που σχηματίζονται.
 - Να γράψετε τις γωνίες κάθε τριγώνου με τρία γράμματα
 - Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΒΕ και ποιες στην πλευρά ΒΔ;

Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων
Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

- Να σχεδιάσετε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 1,8 cm και στη συνέχεια το ΓΔ, που να έχει το ίδιο μήκος με το ΑΒ, με τη βοήθεια ενός διαβήτη.
- Να πάρετε σημείο Α και να βρείτε τέσσερα σημεία που να απέχουν από το Α απόσταση 2,3 cm.
- Να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας

km	m	dm	cm	mm
0,02				
	5			
		7,32		
			142	
				134

- Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6 cm.
 - Να βρείτε δύο σημεία Δ, Ε εσωτερικά του ΑΒ ώστε να ισχύει ΑΔ = ΒΕ = 1,5 cm.
 - Να μετρήσετε την απόσταση των σημείων Δ, Ε.
- Αν το μέσο Μ ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκεται σε απόσταση 32,7 cm από το σημείο Α να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
- Να σχεδιάσετε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm.
 - Να βρείτε το μέσον του Μ.
 - Στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να σχεδιάσετε τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν ΑΔ = 2,5 cm, ΑΕ = 7,5 cm. Τι είναι τα σημεία Δ και Ε για τα τμήματα ΑΜ και ΜΒ;

Πρόσθεση κι αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

7. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 20$ cm και το μέσο του M . Αν Γ, Δ είναι τα μέσα των AM, MB , να βρείτε τα μήκη $A\Gamma, \Gamma M, M\Delta, \Delta B$. Τι παρατηρείτε;
8. Να σχεδιάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 7$ cm και $A\Gamma = 5$ cm.
i) Να βρείτε τα μέσα M και N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
ii) Να βρείτε το μήκος του τμήματος MN και να το συγκρίνετε με το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
9. Σε μία ευθεία παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ ώστε $AB = 6$ cm, $B\Gamma = 8$ cm.
i) Να βρεθεί το μέσο M του AB και το μέσο N του $B\Gamma$.
ii) Να υπολογιστεί το μήκος του τμήματος MN .
10. Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB έχει μήκος 7,8 cm. Να βρείτε:
i) Το μέσο M του AB .
ii) Το μέσο N του MA
iii) Το μέσο O του MB . Ποιο είναι το μέσον του NO ;
11. Σε μία ευθεία (ϵ) να πάρετε τρία σημεία A, B, Γ ώστε $AB = B\Gamma = 4,5$ cm. Στη συνέχεια να βρείτε σημείο M της ευθείας (ϵ) ώστε $BM = 9$ cm. Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν; Τι παρατηρείτε για τα σημεία A και Γ ;
12. Να σχεδιάσετε δύο ημιευθείες με κοινή αρχή σημείο A (όχι αντικείμενες). Να πάρετε στην πρώτη ημιευθεία σημεία Δ και E ώστε $A\Delta = \Delta E$ και στην δεύτερη ημιευθεία σημεία Z και H ώστε $AZ = ZH$. Να συγκρίνετε τα μήκη των τμημάτων ΔZ και EH .

Πρόσθεση κι αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

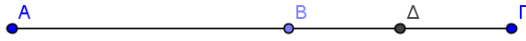
1. Με τη βοήθεια του επόμενου σχήματος να συμπληρώσετε τις ισότητες που ακολουθούν:



- i) $AB + B\Gamma = \underline{\hspace{1cm}}$
ii) $AB + \Gamma\Delta + \underline{\hspace{1cm}} = B\Delta$
iii) $A\Gamma + \Gamma E = \underline{\hspace{1cm}}$
iv) $BE - \Delta E = \underline{\hspace{1cm}}$
v) $A\Gamma + \Gamma\Delta - \underline{\hspace{1cm}} = B\Delta$
vi) $\Gamma\Delta = AE - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$

Πρόσθεση κι αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

2. Στο επόμενο σχήμα Δ είναι το μέσο του ΒΓ. Ποια από τα επόμενα είναι σωστά;



- i) $AB + B\Delta = A\Delta$
 - ii) $A\Gamma - \Gamma\Delta = A\Delta$
 - iii) $A\Gamma - B\Delta = A\Delta$
 - iv) $AB + \Delta\Gamma = A\Gamma$
 - v) $A\Delta + \Delta B = A\Gamma$
 - vi) $A\Delta - \Delta\Gamma = AB$
3. Πάνω σε μία ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ να υπολογίσετε τα παρακάτω:
- i) $AB + BM$
 - ii) $M\Gamma + AB$
 - iii) $AM - MB$
 - iv) $AM - M\Gamma$
 - v) $A\Gamma - BM$
4. Σε μία ευθεία να πάρετε διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ.
- i) Να εκφράσετε το τμήμα ΑΓ ως άθροισμα δύο ευθυγράμμων τμημάτων.
 - ii) Να εκφράσετε το τμήμα ΑΒ ως διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων.
 - iii) Να εκφράσετε το τμήμα ΒΔ ως διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων.
5. Σε μια ευθεία να πάρετε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ ώστε $AB = 3 \text{ cm}$, $A\Gamma = 5 \text{ cm}$, $A\Delta = 12 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΓΔ, ΒΔ.
6. Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα $AB = 5 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 7 \text{ cm}$. Πάνω σε μία ευθεία να πάρετε τρία διαδοχικά σημεία Κ, Λ, Μ ώστε $K\Lambda = AB$ και $\Lambda M = \Gamma\Delta$. Πόσο είναι το μήκος του τμήματος ΚΜ;
7. Πάνω σε μία ευθεία (ε) θεωρούμε τα σημεία A, B ώστε $AB = 6 \text{ cm}$. Στην ευθεία (ε) θεωρούμε σημείο Γ ώστε $B\Gamma = 2 \text{ cm}$.
- i) Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν;
 - ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΓ σε κάθε περίπτωση.
8. Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 15 cm. Αν $AB = 2 \text{ cm}$, $B\Gamma = 3 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 4 \text{ cm}$ να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών

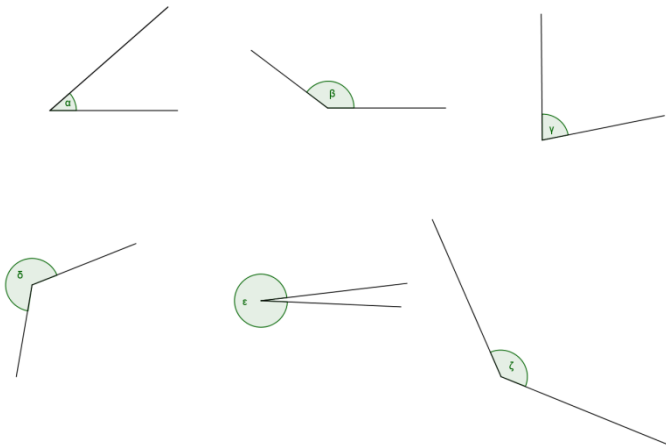
9. Πάνω σε μία ευθεία δίνονται διαδοχικά τα ευθύγραμμα τμήματα A, B, Γ, ώστε $AB = 7 \text{ cm}$, $B\Gamma = 5 \text{ cm}$. Αν M, N είναι τα μέσα των AB, BΓ να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος MN.
10. Σε μία ευθεία παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ. Αν $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 15 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 3,4 \text{ cm}$ να υπολογίσετε το μήκος BΓ.
11. Σε μία ευθεία παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ. Αν $AB = \Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι $A\Gamma = B\Delta$.
12. Σε μία ευθεία να πάρετε με τη σειρά τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να εκφράσετε
 - i) Το τμήμα BΓ με τη βοήθεια των AΓ, BΔ, AΔ.
 - ii) Το τμήμα AΔ με τη βοήθεια των AΓ, BΔ, BΓ.
13. Σε μία ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ, έτσι ώστε $AB = \Gamma\Delta$. Αν M είναι το μέσον του τμήματος AΔ, να αποδείξετε ότι το M είναι μέσον του τμήματος BΓ.

Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών

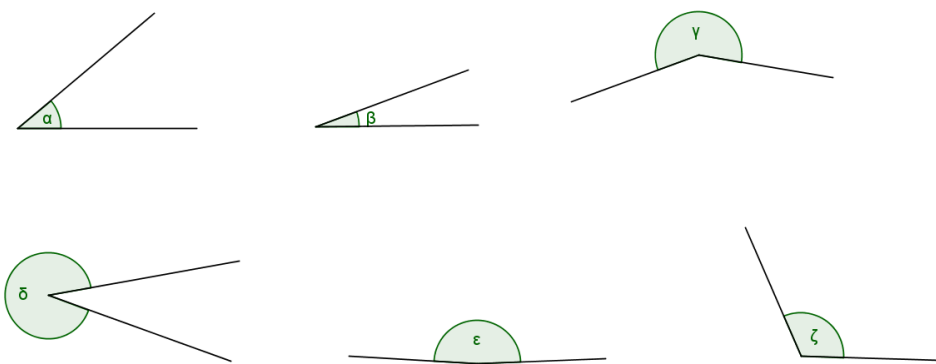
Διχοτόμος γωνίας

1.
 - i) Να σχεδιάσετε μία γωνία $\omega = 70^\circ$ και να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της.
 - ii) Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABΓ με $B\Gamma = 10 \text{ cm}$, $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.
 - iii) Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABΓ με $AB = 7 \text{ cm}$, $A\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 60^\circ$.
2. Να κατασκευάσετε με το μοιρογνομόνιο γωνία $\omega = 230^\circ$.
3. Με τη χρήση μοιρογνομονίου να κατασκευάσετε τις εξής γωνίες:
α) 30° β) 45° γ) 60° δ) 90° ε) 120° στ) 135° ζ) 150°
η) 20° θ) 80° ι) 168° ια) 190° ιβ) 340°
4. Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω γωνιών

Διχοτόμος γωνίας



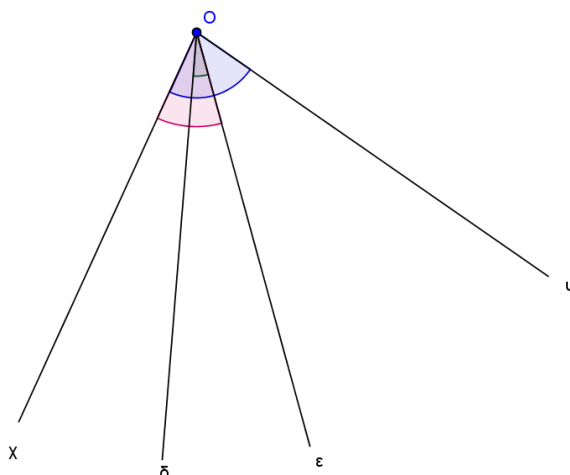
5. Οι επόμενες γωνίες έχουν μέτρα 20° , 115° , 40° , 175° , 340° και 210° . Να βρείτε το μέτρο κάθε γωνίας χωρίς να τις μετρήσετε.



6. Να σχεδιάσετε τις γωνίες (α) 122° (β) 37° (γ) 41° και στη συνέχεια να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών αυτών.
7. Να σχεδιάσετε μία γωνία 80° .
- Να φέρετε τη διχοτόμο της γωνίας.
 - Να χωρίσετε τη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.
8. Να σχεδιάσετε τρία τρίγωνα και να μετρήσετε τις γωνίες τους. Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών σε κάθε περίπτωση;
9. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και τη διάμεσό του AM . Να μετρήσετε τις γωνίες $\widehat{AMB}$ και $\widehat{AM\Gamma}$. Τι παρατηρείτε;

Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

10. Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$. Αν $\chi\hat{O}\delta = 35^\circ$ τότε
- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\delta\hat{O}\psi$ και $\chi\hat{O}\psi$.
 - Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\delta\hat{O}\psi$.
11. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi = 70^\circ$.
- Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$.
 - Να σχεδιάσετε ημιευθεία Οε ώστε η Οψ να είναι διχοτόμος της γωνίας $\delta\hat{O}\epsilon$.
12. Στο επόμενο σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}\epsilon$ και η Οε διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$. Αν $\chi\hat{O}\delta = 20^\circ$, να υπολογίσετε τις σημειωμένες γωνίες.

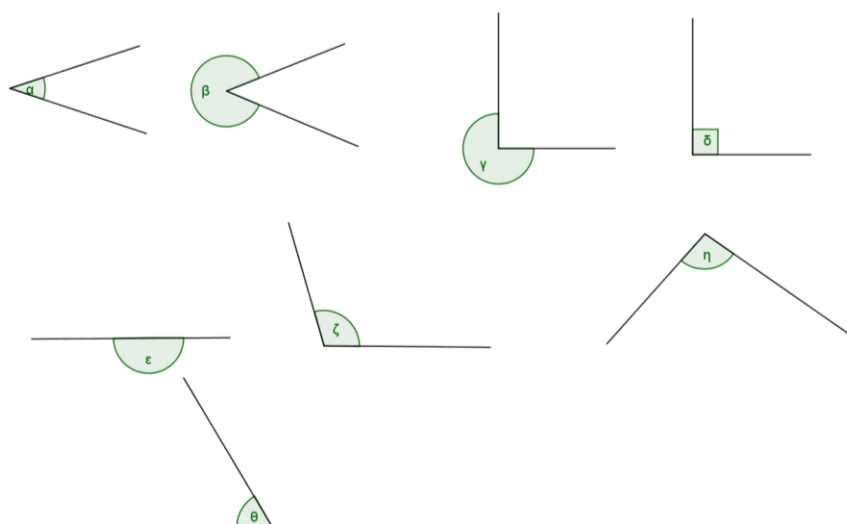


Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

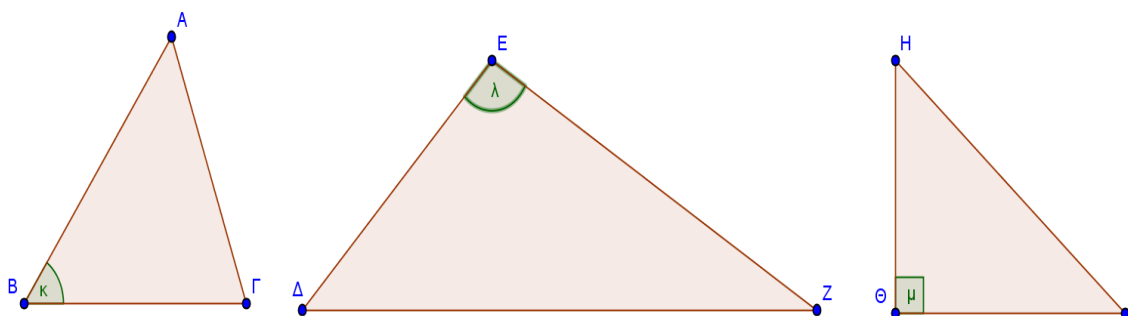
- Να επιλέξετε Σωστό ή Λάθος για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις
 - Δύο ορθές γωνίες είναι ίσες.
 - Δύο αμβλείες γωνίες είναι ίσες.
 - Κάθε γωνία μεγαλύτερη από 90° είναι αμβλεία.
 - Κάθε αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε οξεία γωνία
- Να σχεδιάσετε μια ημιευθεία Αχ και την κάθετη ευθεία στην Αχ που διέρχεται από το Α.

Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

3. Για καθεμία από τις παρακάτω γωνίες να αναφέρετε αν είναι οξεία, αμβλεία, ορθή ευθεία, μη κυρτή.



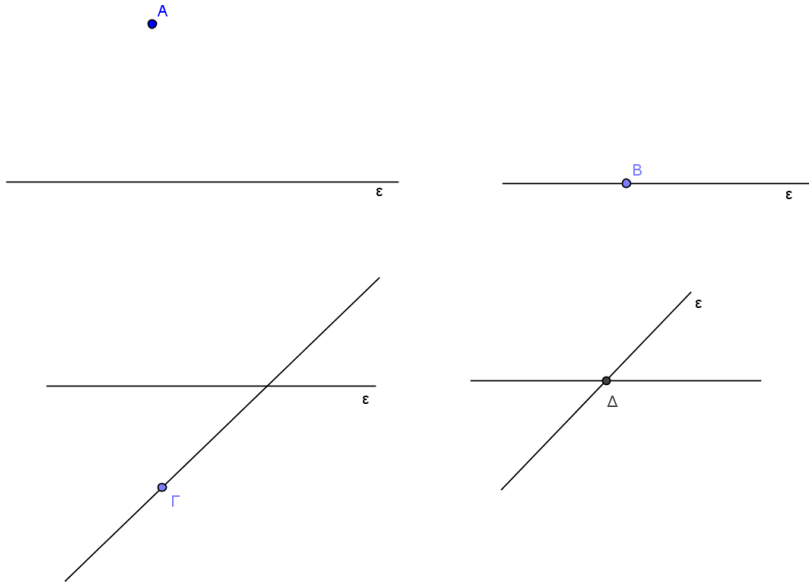
4. Να ονομάσετε με τρία γράμματα τις παρακάτω γωνίες και να βρείτε το είδος τους.



5. Να σχεδιάσετε τις αντικείμενες ημιευθείες Ox , Oy , την ημιευθεία Oz και τη διχοτόμο Od της γωνίας $x\hat{O}z$. Να φέρετε την κάθετη ευθεία (ϵ) από το O προς την Od . Ποια είναι η σχέση της ευθείας με την κυρτή γωνία yOz ;

Εφεξής γωνίες – Διαδοχικές Γωνίες – Άθροισμα γωνιών

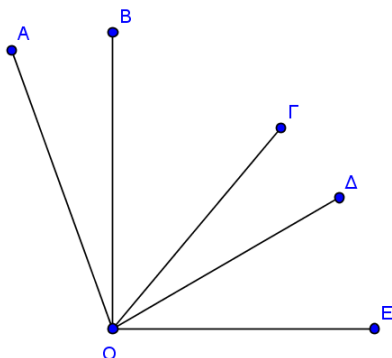
6. Να φέρετε σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις την ευθεία η οποία διέρχεται από το δοσμένο σημείο και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)



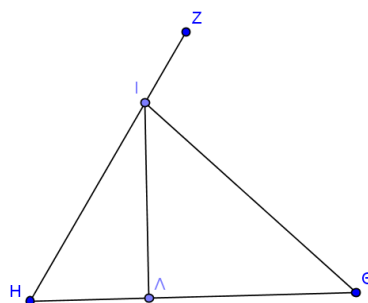
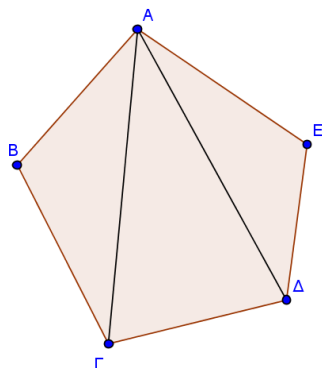
7. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ.
- i) Να φέρετε κάθετη ευθεία από την κορυφή Α προς την ευθεία ΒΓ.
 - ii) Να φέρετε κάθετες ευθείες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ.

Εφεξής γωνίες – Διαδοχικές Γωνίες – Άθροισμα γωνιών

1. Στο επόμενο σχήμα να βρείτε
- i) Δύο ζεύγη εφεξής γωνιών.
 - ii) Δύο ζεύγη γωνιών που δεν είναι εφεξής.
 - iii) Τρεις γωνίες που να είναι διαδοχικές.
 - iv) Τρεις γωνίες που δεν είναι διαδοχικές.

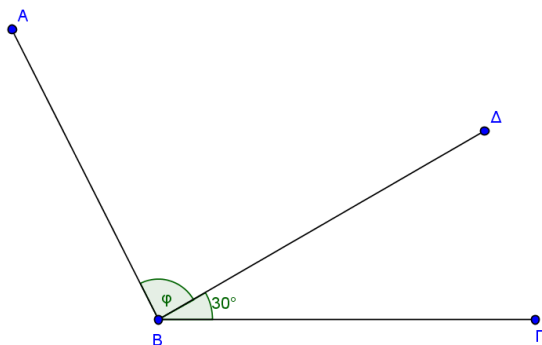


2. Μία γωνία ω έχει μέτρο 160° . Να βρεθεί το μέτρο της μη κυρτής γωνίας που έχει τις ίδιες πλευρές με τη γωνία ω .
3. Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες $\chi\hat{O}\psi = 137^\circ$ και $\psi\hat{O}\zeta = 43^\circ$. Τι παρατηρείτε για τις ημιευθείες Ox και Oz ;
4. Να βρείτε όλες τις εφεξής και όλες τις διαδοχικές γωνίες στα ακόλουθα σχήματα

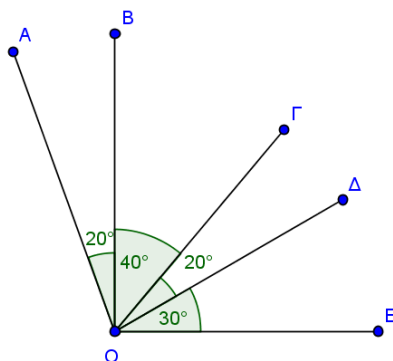


5. Να σχεδιάσετε τρεις γωνίες με μέτρα 20° , 40° , 50° . Να βρείτε το άθροισμά τους αφού πρώτα τις κάνετε διαδοχικές.
6. Έστω ευθεία $χψ$ και ένα σημείο της O . Φέρουμε ημιευθεία $Oζ$ ώστε $\chi\hat{O}\zeta = 40^\circ$. Στη συνέχεια φέρουμε τη διχοτόμο $Oδ$ της γωνίας $\zeta\hat{O}\psi$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\zeta\hat{O}\delta$ και $\psi\hat{O}\delta$.

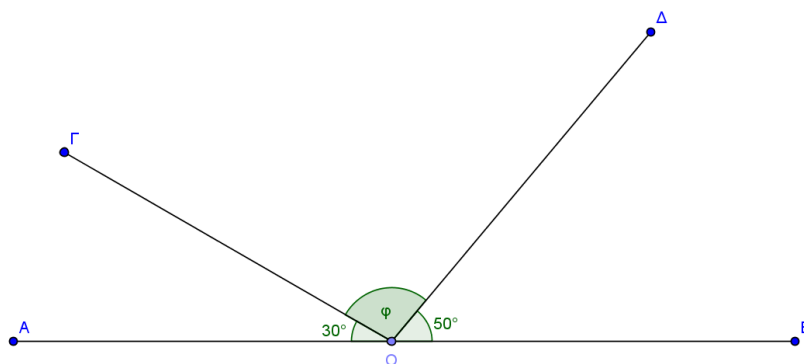
7. Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα αν $\widehat{AB\Gamma} = 127^\circ$.



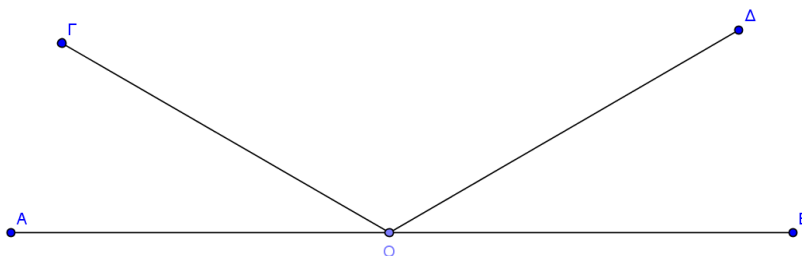
8. Τι είδους γωνίες είναι οι γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$, $\widehat{EOB}$, $\widehat{AOE}$;



9. Να υπολογίσετε τη γωνία φ του παρακάτω σχήματος.

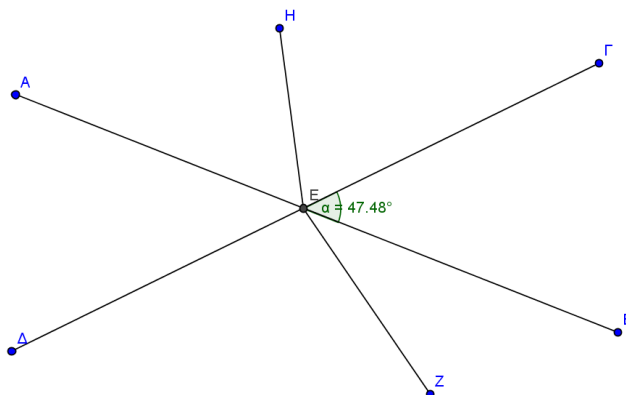


10. Στο επόμενο σχήμα να αποδείξετε πως αν οι γωνίες $A\hat{O}\Delta$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι ίσες τότε και οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ είναι ίσες.



Παραπληρωματικές, συμπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες

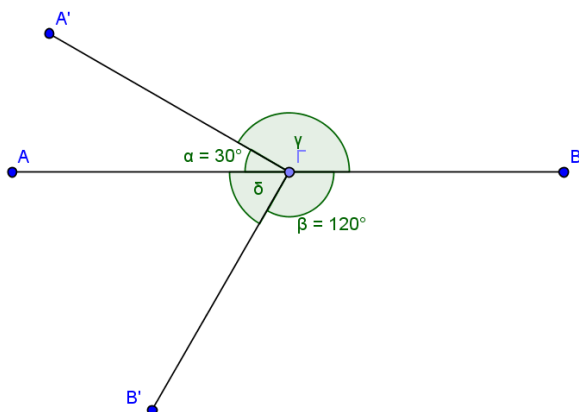
1. Μία γωνία ω έχει μέτρο 55° . Να υπολογιστεί η συμπληρωματική και η παραπληρωματική της.
2. Να βρείτε δύο εφεξής συμπληρωματικές γωνίες ώστε η μία να είναι διπλάσια από την άλλη.
3. Να γραφούν τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών του παρακάτω σχήματος και να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών $A\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{E}B$.



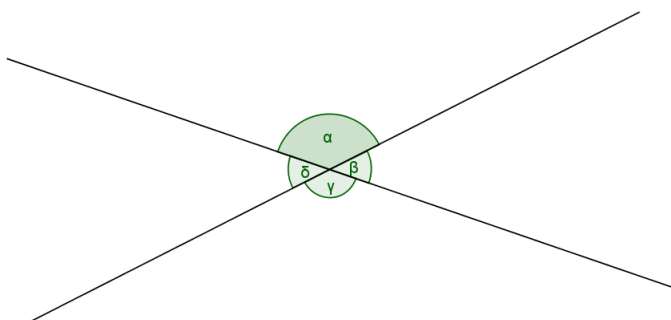
4. Να σχεδιάσετε μία γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και να φέρετε τη διχοτόμο της Οδ. Αν Οδ' είναι η αντικείμενη ημιευθεία της Οδ να δείχθει ότι $\psi\hat{O}\delta' = \chi\hat{O}\delta'$.
5. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται κάθετα.

Παραπληρωματικές, συμπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες

6. Μία γωνία είναι $\omega = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τη συμπληρωματική και την παραπληρωματική της σε μοίρες και σε μέρη ορθής γωνίας.
7. Να υπολογίσετε τις γωνίες γ και δ στο παρακάτω σχήμα.



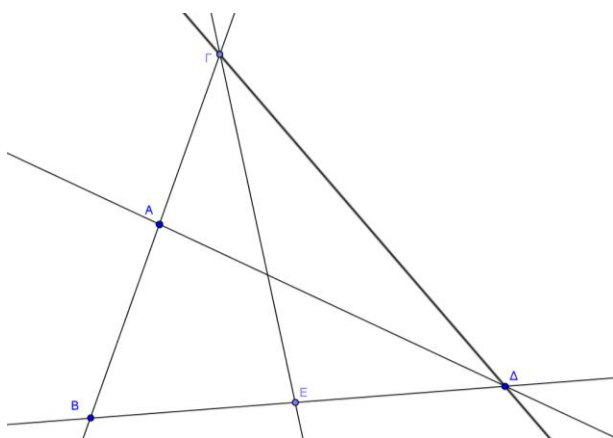
8. Αν η μία από τις τέσσερις γωνίες που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι 37° , να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες.
9. Αν η γωνία α είναι τριπλάσια από τη γωνία β να υπολογίσετε τις γωνίες του επόμενου σχήματος.



10. Να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο εφεξής και συμπληρωματικών γωνιών έχει μέτρο ίσο με το μισό της ορθής.
11. Να βρείτε και να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες που να είναι παραπληρωματικές και να διαφέρουν κατά 24° .

Θέσεις ευθειών στο επίπεδο
Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

1. Να επιλέξετε Σωστο ή Λάθος για καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις
 - i) Δύο τεμνόμενες ευθείες μπορούν να έχουν δύο κοινά σημεία.
 - ii) Αν δύο διαφορετικές ευθείες του επιπέδου είναι κάθετες σε μία ευθεία τότε είναι και μεταξύ τους κάθετες.
 - iii) Από ένα σημείο διέρχεται μοναδική ευθεία.
 - iv) Δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο Α είναι παράλληλες.
 - v) Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο τότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.
2. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ. Από κάθε κορυφή να φέρετε ευθεία παράλληλη στην απέναντι πλευρά του.
3. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις τριών ευθειών στο επίπεδο.
4. Να κατασκευάσετε οξεία γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και να πάρετε τα σημεία Α και Β πάνω στην Οχ. Από τα σημεία Α και Β να φέρετε τις ευθείες (ε) και (ζ) αντίστοιχα, κάθετες προς την ημιευθεία Οχ. Ποια είναι η σχέση των ευθειών (ε) και (ζ);
5. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ το μέσον της πλευράς ΑΒ να φέρετε από το Δ παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΒΓ η οποία έστω ότι τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Τι διαπιστώνετε για τα τμήματα ΑΕ κι ΕΓ; Τι είναι το σημείο Ε για το τμήμα ΑΓ;
6. Στο παρακάτω σχήμα να γράψετε τα ζεύγη των τεμνόμενων ευθειών καθώς και το σημείο τομής τους.

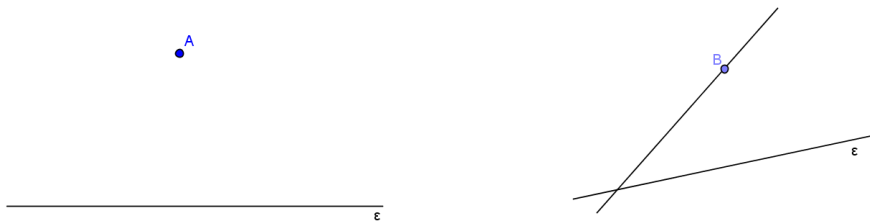


Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

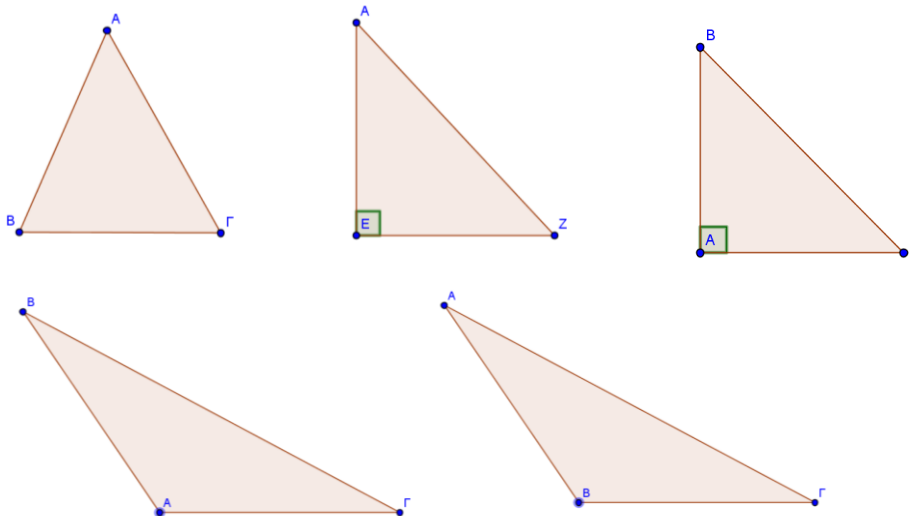
7. Να σχεδιάσετε ευθεία (ϵ) και να πάρετε ένα σημείο A εκτός αυτής. Από το σημείο A να φέρετε τμήμα AB κάθετο στην ευθεία (ϵ) και στη συνέχεια ευθεία (ζ) η οποία να διέρχεται από το A και να είναι κάθετη στο AB . Τι σχέση έχουν οι ευθείες (ϵ) και (ζ);

Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

1. Να βρείτε την απόσταση του δοσμένου σημείου από την ευθεία (ϵ) στις παρακάτω περιπτώσεις



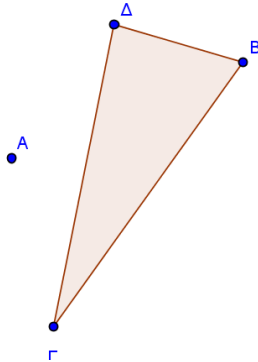
2. Στα παρακάτω τρίγωνα να βρείτε την απόσταση της κορυφής A από την απέναντι πλευρά.



3. Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ζ) ώστε η μεταξύ τους απόσταση να είναι ίση με 10 cm.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε μία ευθεία (η) η οποία να απέχει από την ευθεία (ϵ) 10 cm και από την ευθεία (ζ) 20 cm.
4. Να φέρετε μια ευθεία (ϵ) και μία ευθεία (ζ) παράλληλη στην (ϵ) σε απόσταση 10 cm. Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν;

Κύκλος – Στοιχεία του κύκλου

5. Στο επόμενο σχήμα να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου Α από τις κορυφές του τριγώνου και από τις πλευρές του τριγώνου.



6. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και να βρείτε τις αποστάσεις
- Της κορυφής Α από τις κορυφές Β, Γ, Δ.
 - Της κορυφής Α από τις πλευρές ΒΓ και ΒΔ.
- Να επαναλάβετε το παραπάνω αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
7. Να σχεδιάσετε μία γωνία $\chi Ο \psi = 50^\circ$ και να φέρετε τη διχοτόμο της Οδ. Αν Α σημείο της Οδ ώστε $ΟΑ = 3 \text{ cm}$, να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από τις Οχ και Οψ.

Κύκλος – Στοιχεία του κύκλου

- Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες:
 - Η διάμετρος ενός κύκλου είναι η μισή της ακτίνας του.
 - Σε έναν κύκλο κάθε χορδή που δε διέρχεται από το κέντρο του είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα.
 - Δεν υπάρχει χορδή μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου
 - Δεν υπάρχει χορδή μεγαλύτερη από τη διάμετρο του κύκλου.
 - Σε έναν κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 6 \text{ cm}$ είναι δυνατό να βρω δύο σημεία του κύκλου που να απέχουν 7 cm.
 - Αν σε έναν κύκλο πάρουμε τέσσερα διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ, Δ τότε τα σημεία αυτά ορίζουν ακριβώς 4 χορδές.
- Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με (α) ακτίνα 5 cm (β) διάμετρο 5 cm.
- Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 18 \text{ cm}$ και το μέσο του Μ. Να σχεδιάσετε τους κύκλους με διάμετρο ΑΒ και ΑΜ.
- Έστω σημείο Ο. Με κέντρο το Ο φέρουμε κύκλο με ακτίνα $\rho = 5 \text{ cm}$. Να σκιάσετε όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση (α) μικρότερη από 5 cm, (β) μεγαλύτερη από 5 cm.

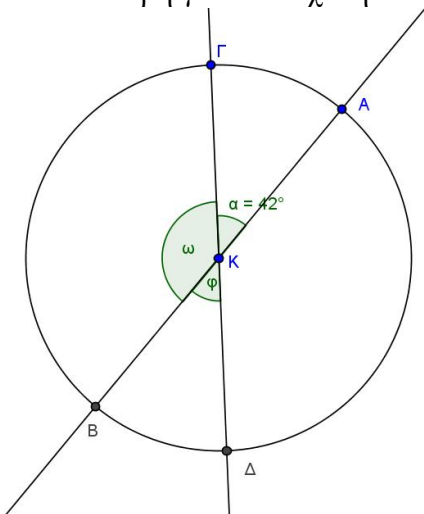
Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

5. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 8 \text{ cm}$. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν
 - i) 3 cm από το A
 - ii) 6 cm από το B.
 - iii) cm από το A και 6 cm από το B.
6. Έστω O σημείο του επιπέδου. Με κέντρο το O φέρουμε δύο κύκλους με διάμετρο 14 cm και 11 cm . Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου που η απόστασή τους από το O είναι μικρότερη από 7 και μεγαλύτερη από $5,5 \text{ cm}$.
7. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 15 \text{ cm}$. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το A λιγότερο από 10 cm και από το B λιγότερο από 8 cm .
8. Να κατασκευάσετε τρίγωνο με πλευρές (i) $AB = 6 \text{ cm}$, $B\Gamma = 7 \text{ cm}$, $A\Gamma = 8 \text{ cm}$, (ii) $AB = 3 \text{ cm}$, $B\Gamma = 4 \text{ cm}$, $A\Gamma = 5 \text{ cm}$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές $AB = 7 \text{ cm}$, $B\Gamma = 5 \text{ cm}$, $A\Gamma = 15 \text{ cm}$;
9. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 7 \text{ cm}$ κι ένα σημείο του A. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία του κύκλου που να απέχουν απόσταση από το A
 - i) 5 cm
 - ii) 14 cm
 - iii) 16 cm

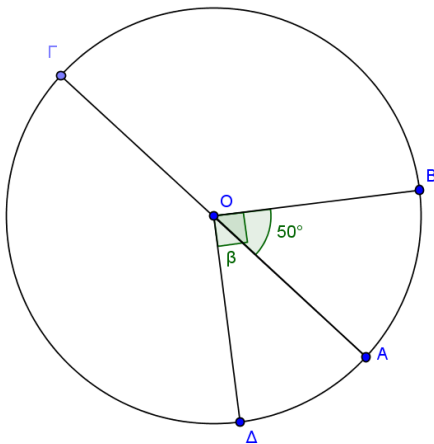
Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

1. Να επιλέξετε Σωστό ή Λάθος για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.
 - i) Το ημικύκλιο είναι τόξο 180° .
 - ii) Δύο κάθετες χορδές ενός κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.
 - iii) Δύο διάμετροι ενός κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.
 - iv) Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες.
2. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (O, ρ) και μια επίκεντρη γωνία φ ώστε
(α) $\varphi = 30^\circ$ (β) $\varphi = 45^\circ$ (γ) $\varphi = 90^\circ$ (δ) $\varphi = 120^\circ$ (ε) $\varphi = 180^\circ$ (στ) $\varphi = 210^\circ$
3. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (O, ρ) και στη συνέχεια ένα τόξο AB με
(α) $AB = 45^\circ$ (β) $AB = 60^\circ$ (γ) $AB = 90^\circ$ (δ) $AB = 150^\circ$ (ε) $AB = 180^\circ$
(στ) $AB = 240^\circ$
4. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και AB, ΓΔ διάμετροι. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω . Πόσες μοίρες είναι το τόξο ΑΔ;

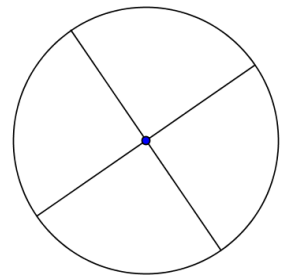
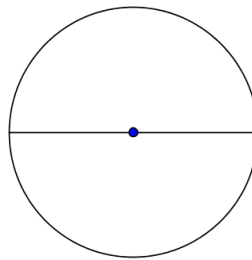
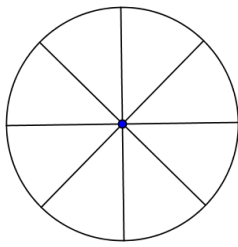
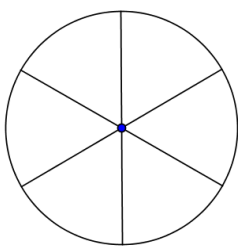
Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου



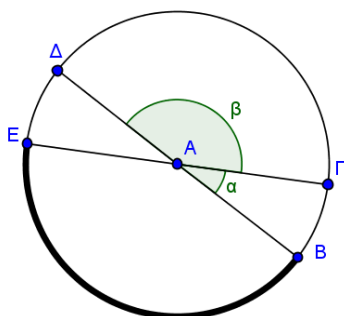
5. Στο επόμενο σχήμα το η γωνία $B\hat{O}A = 50^\circ$ και τα τμήματα OB και OD είναι κάθετα μεταξύ τους. Να υπολογίσετε το τόξο AB και τις γωνίες $B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}D$ καθώς και τα τόξα AD , ΓD , $B\Gamma D$.



6. Τα τόξα στα οποία χωρίζουν οι διάμετροι τους παρακάτω κύκλους είναι ίσα. Να υπολογίσετε τις επίκεντρες γωνίες.



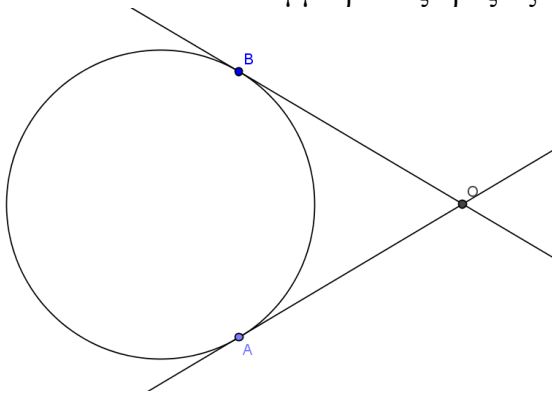
7. Στο επόμενο σχήμα η γωνία α είναι ίση με το $\frac{1}{5}$ της γωνίας β . Να υπολογίσετε το τόξο EB και το τόξο $\Delta B\Gamma$.



Θέσεις ευθείας και κύκλου

1. Δίνεται κύκλος κέντρου K και διαμέτρου $AB = 10 \text{ cm}$. Να βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει ο κύκλος με μία ευθεία η οποία απέχει από το κέντρο K απόσταση ίση με (α) 3 cm (β) 10 cm (γ) 5 cm .
2. Να σχεδιάσετε την εφαπτομένη του κύκλου κέντρου K και ακτίνας ρ στα άκρα μίας χορδής του.
3. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε), (ζ) που απέχουν απόσταση 10 cm . Να σχεδιάσετε κύκλο (K, ρ) ώστε οι ευθείες (ε) και (ζ) να είναι εφαπτομένες του κύκλου.
4. Να σχεδιαστεί κύκλος με διάμετρο $AB = 10 \text{ cm}$. Στη συνέχεια να φέρετε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B . Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών.
5. Να σχεδιάσετε κύκλο (K, ρ) και να φέρετε δύο κάθετες διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$. Στη συνέχεια να φέρετε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A, B, Γ, Δ . Να βρείτε τη σχετική θέση των εφαπτομένων.
6. Οι ευθείες OA και OB είναι εφαπτόμενες του κύκλου. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το κέντρο K του κύκλου.

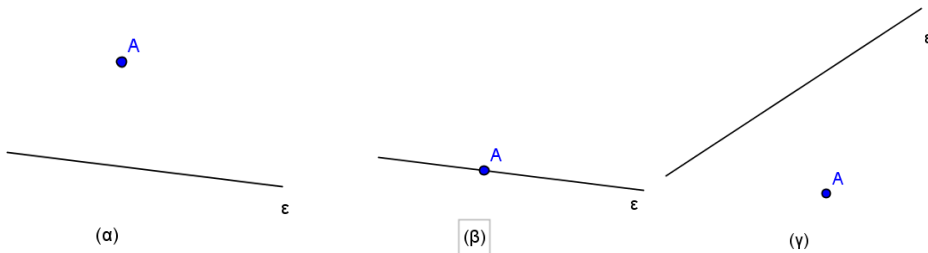
Συμμετρία ως προς άξονα



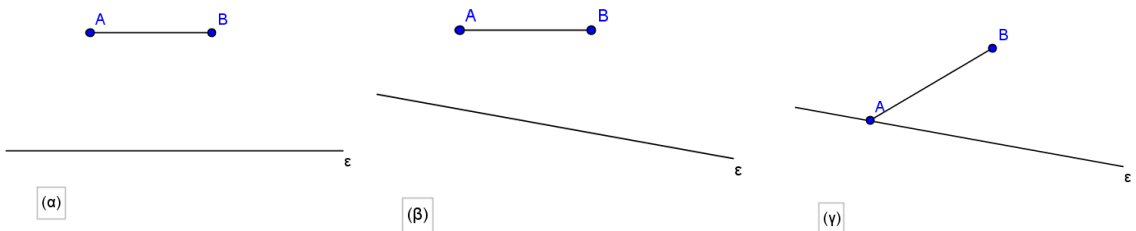
7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείς (ε) (ζ) που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 7 cm. Να πάρετε ένα σημείο A στην ευθεία (ε) και να βρείτε τα σημεία της ευθείας (ζ) που απέχουν από το A απόσταση 10 cm. Υπάρχουν σημεία της ευθείας (ζ) που να απέχουν από το A απόσταση 5 cm;

Συμμετρία ως προς άξονα

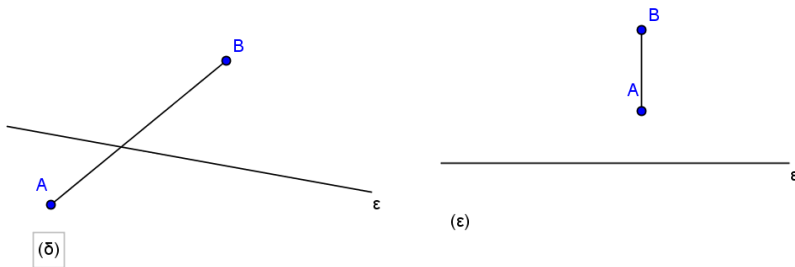
1. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) στις παρακάτω περιπτώσεις.



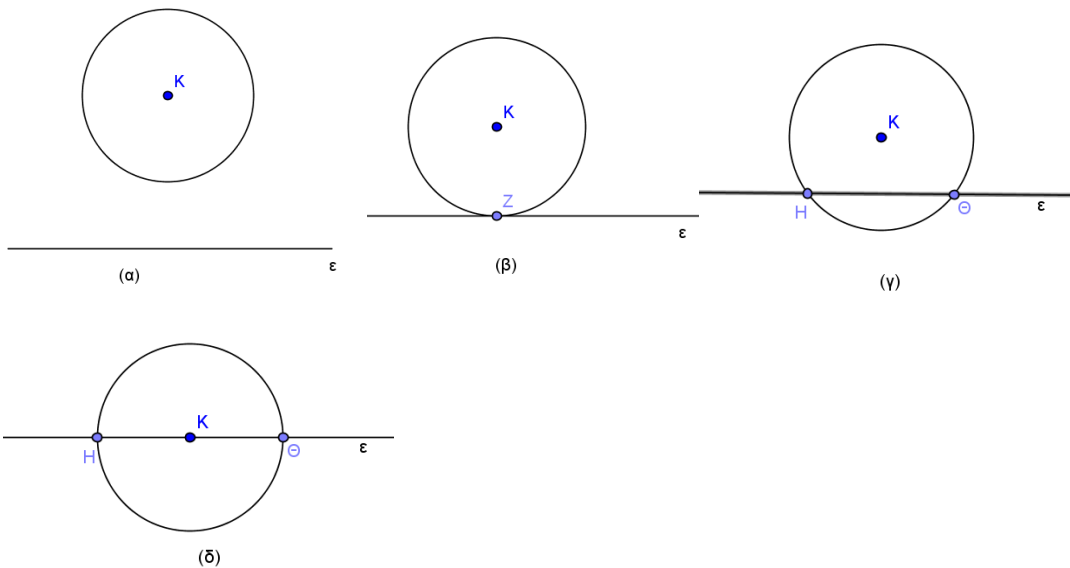
2. Να βρείτε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος AB ως προς την ευθεία (ε) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.



Συμμετρία ως προς άξονα

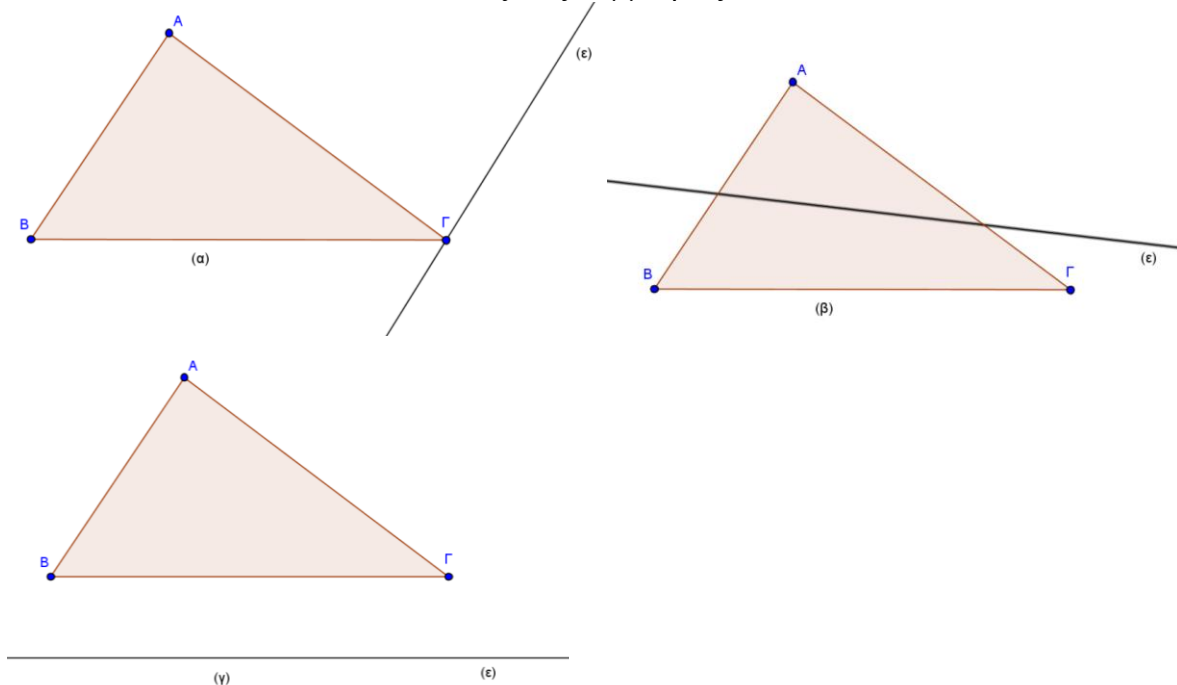


3. Να βρείτε το συμμετρικό του κύκλου (K, ρ) ως προς την ευθεία (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις.



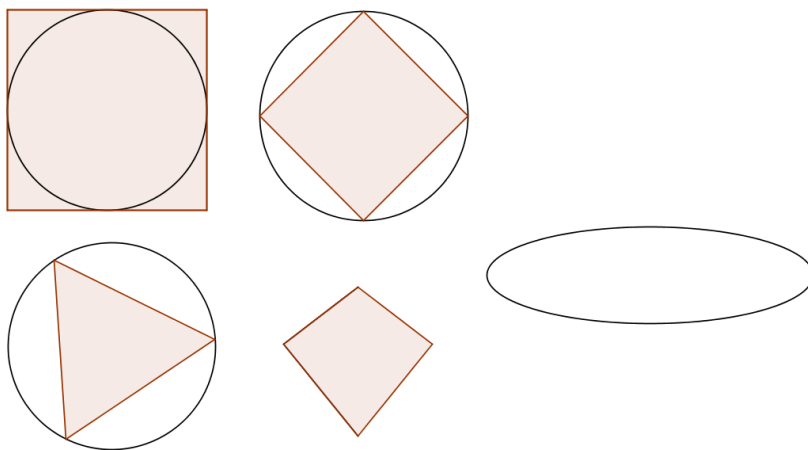
4. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και να βρείτε το συμμετρικό του (α) ως προς μία πλευρά του (β) ως προς μία ευθεία η οποία διέρχεται από μία κορυφή και είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.
5. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο και να βρείτε το συμμετρικό του (α) ως προς μία πλευρά του (β) ως προς μία διαγώνίό του.
6. Να βρείτε το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία (ε) στις παρακάτω περιπτώσεις.

Άξονας συμμετρίας



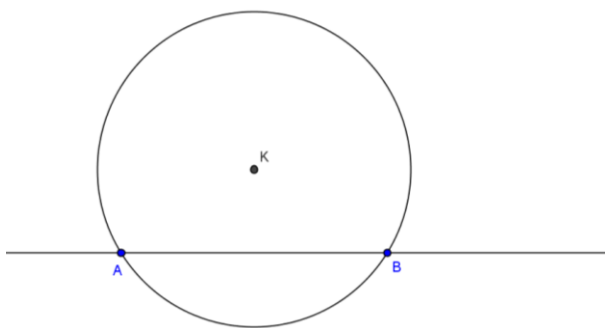
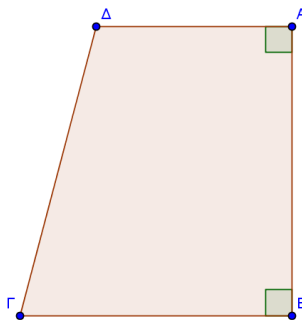
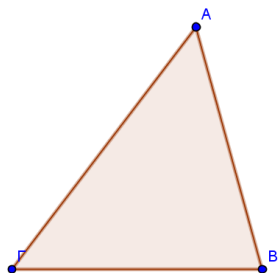
Άξονας συμμετρίας

1. Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας (α) ενός τετραγώνου (β) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (γ) ενός ισοσκελούς τριγώνου (δ) ενός ισοπλεύρου τριγώνου.
2. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας (αν υπάρχουν) των παρακάτω σχημάτων



Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

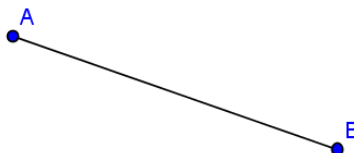
3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω σχήματα ώστε η ευθεία AB να είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.



4. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και δύο κάθετες διαμέτρους του. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος.
5. Να γράψετε τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου που έχουν μόνο έναν άξονα συμμετρίας.

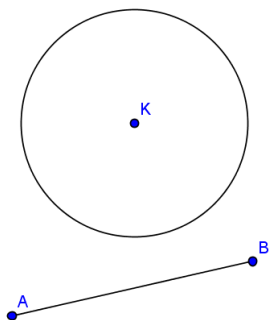
Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

1. Να χωρίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε (α) 2 (β) 4 (γ) 8 ίσα μέρη χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη
2. Χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη να φέρετε τη μεσοκάθετο των παρακάτω ευθυγράμμων τμημάτων AB

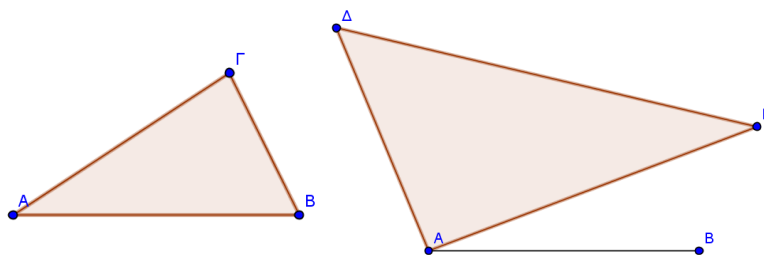


Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

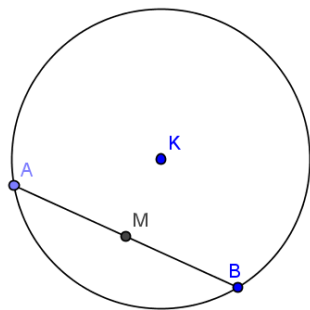
3. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και δύο σημεία του A, B . Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου που ισαπέχουν από τα A και B .
4. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου που ισαπέχουν από τα σημεία A και B στο επόμενο σχήμα



5. Να βρεθούν τα σημεία των πλευρών των τριγώνων που ισαπέχουν από τα σημεία A, B στα παρακάτω σχήματα.



6. Στο επόμενο σχήμα το M είναι μέσο της χορδής AB . Να αποδείξετε ότι το τμήμα KM είναι κάθετο στη χορδή AB .



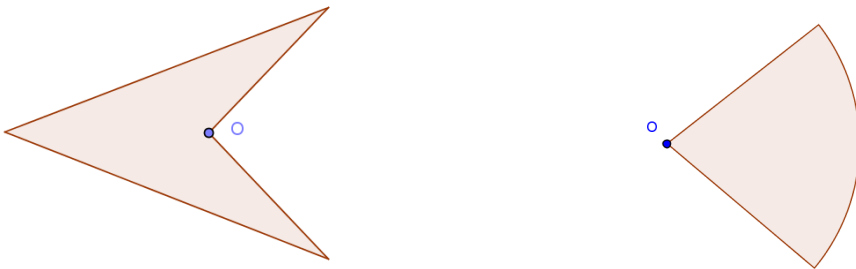
7. Να αποδείξετε πως η μεσοκάθετος σε μια χορδή ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
8. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 7 να βρείτε το κέντρο ενός κύκλου αν δε γνωρίζουμε το κέντρο του.

Συμμετρία ως προς σημείο

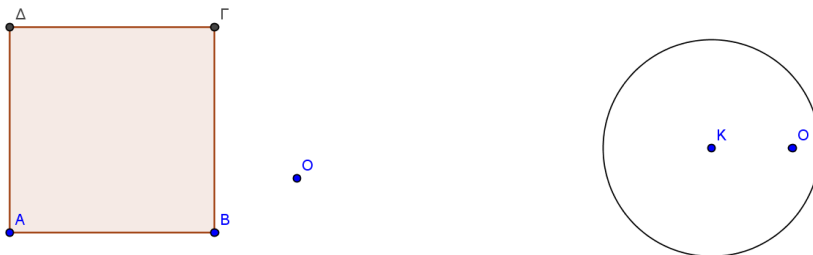
9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να φέρετε τις μεσοκαθέτους των πλευρών AB και $B\Gamma$. Αν αυτές τέμνονται στο σημείο I να εξηγήσετε γιατί το I είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AG .
10. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και σημείο A στην περιφέρειά του.
- (i) Με χρήση κανόνα και διαβήτη να πάρετε σημείο B εξωτερικό του κύκλου ώστε $KA = AB$ και τα σημεία K, A, B να είναι συνευθειακά.
 - (ii) Να φέρετε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A με κανόνα και διαβήτη.

Συμμετρία ως προς σημείο

1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε το συμμετρικό τους ως προς το σημείο O .



2. Να βρείτε το συμμετρικό ενός ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ (α) ως προς μία κορυφή του (β) ως προς ένα σημείο της πλευράς του AB διαφορετικό του μέσου.
3. Να βρείτε το συμμετρικό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ (α) ως προς μία κορυφή του (β) ως προς ένα σημείο O στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$.
4. Να σχεδιάσετε τα συμμετρικά των παρακάτω σχημάτων ως προς το σημείο O .

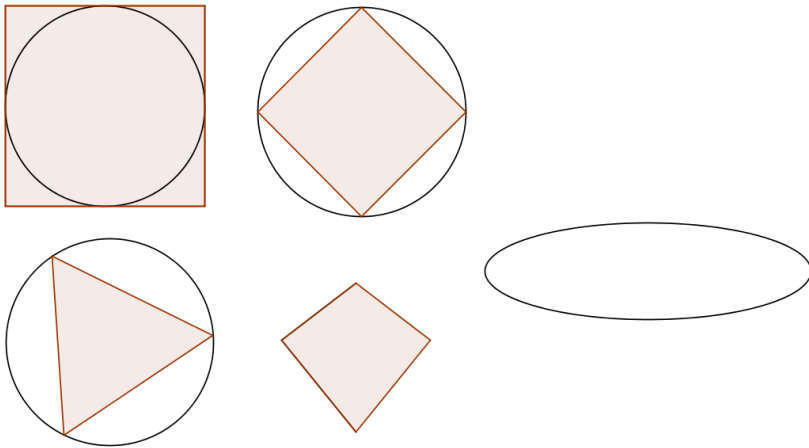


Κέντρο συμμετρίας

5. Να βρείτε το συμμετρικό ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ως προς ένα σημείο O της πλευράς AB .
6. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και σημείο A της πλευράς $O\chi$. Να κατασκευαστεί η συμμετρική της γωνίας $\chi O\psi$ ως προς το σημείο O .
7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό το σημείου B , έστω Δ , ως προς το A . Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \Gamma B$.

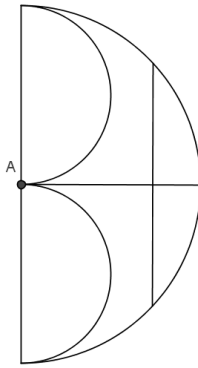
Κέντρο συμμετρίας

1. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας



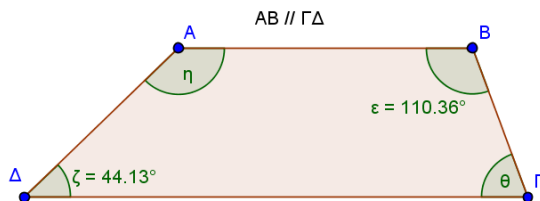
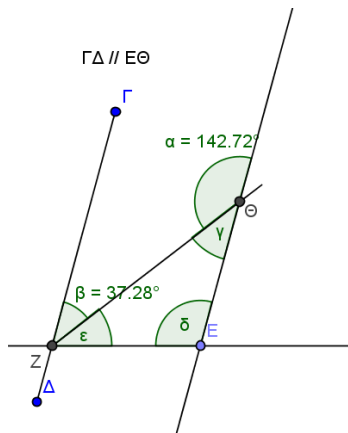
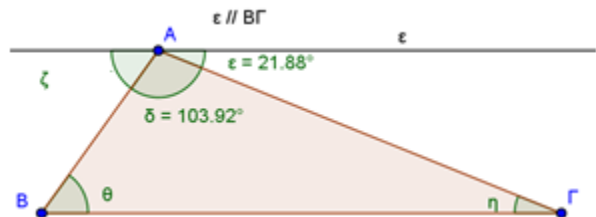
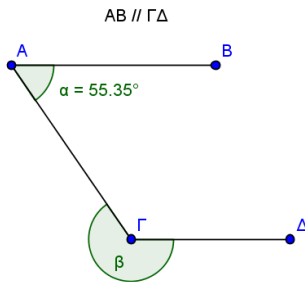
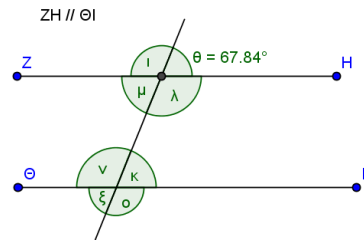
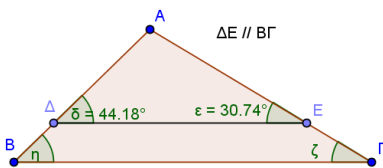
2. Να βρείτε ένα ευθύγραμμο σχήμα με παραπάνω από έναν άξονα συμμετρίας που δεν έχει κέντρο συμμετρίας.
3. Να βρείτε αν έχει κέντρο συμμετρίας (α) ένα τετράγωνο (β) ένα ημικύκλιο.
4. Να συμπληρώσετε το επόμενο σχήμα ώστε το σημείο A να γίνει κέντρο συμμετρίας του.

Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

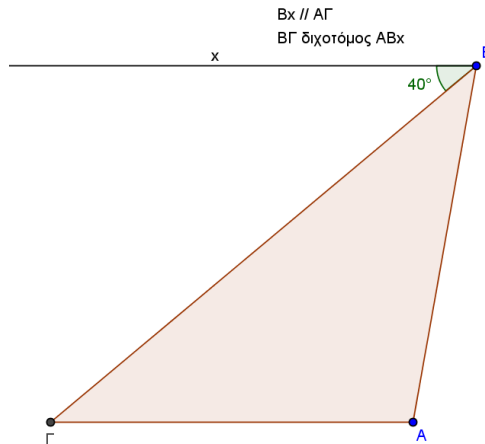


Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

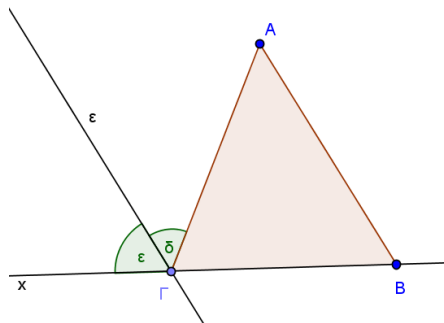
1. Να υπολογίσετε τις σημειωμένες γωνίες στα παρακάτω σχήματα.



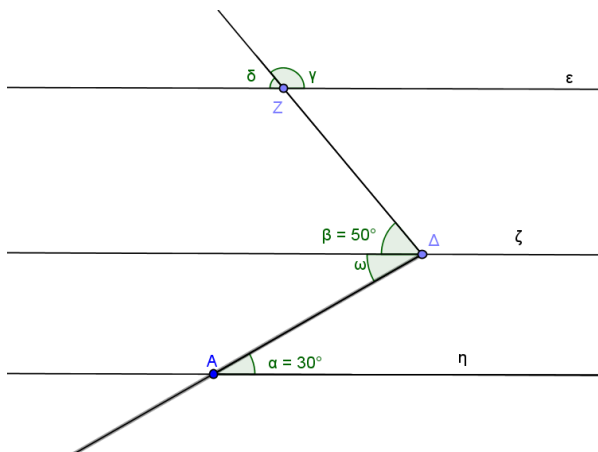
Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

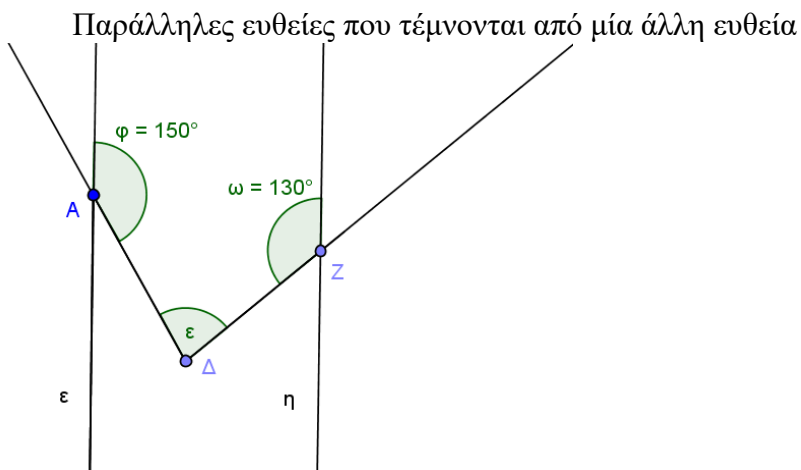


2. Στο επόμενο σχήμα έχουμε ότι $B = 60^\circ$ $A = 50^\circ$. Αν $\varepsilon \parallel AB$ να υπολογίσετε τις γωνίες δ και ε καθώς και τη γωνία $A\Gamma x$.

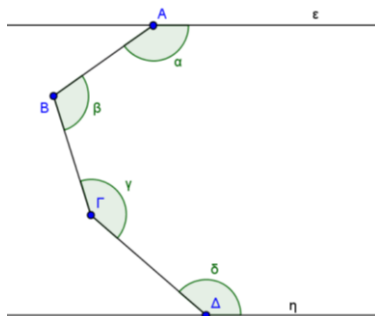


3. Στα επόμενα σχήματα οι ευθείες (ε) , (ζ) , (η) , είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις σημειωμένες γωνίες.



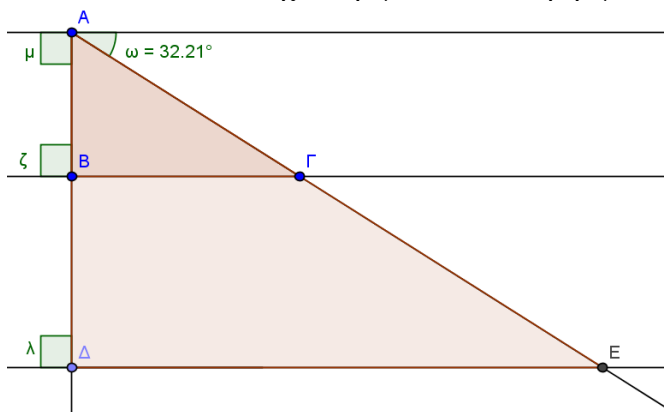


4. Να υπολογίσετε το άθροισμα των σημειωμένων γωνιών στο παρακάτω σχήμα αν οι ευθείες ϵ και η είναι παράλληλες.

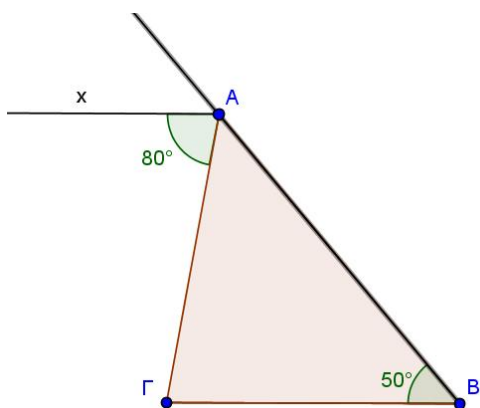


5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{B} = 50^\circ$. Αν Δ σημείο της AB και E σημείο της $A\Gamma$, ώστε $DE \parallel B\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .
6. Στο επόμενο σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και ADE .

Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

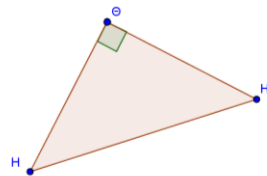
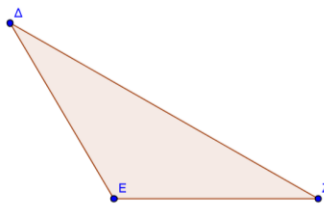
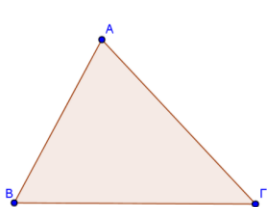


7. Στο επόμενο σχήμα είναι $Ax \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

1. Να σχεδιάσετε τα ύψη σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα.



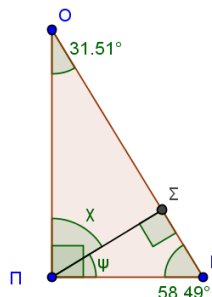
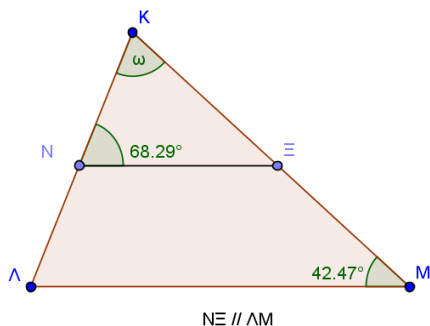
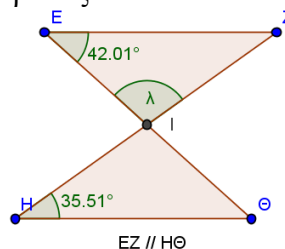
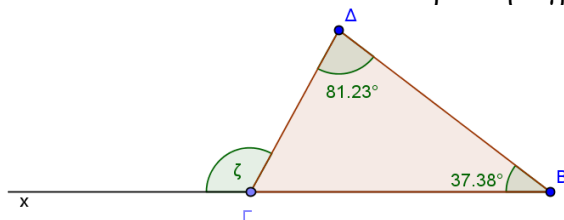
Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

2. Σχεδιάσε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και φέρε το ύψος AD . Με το διαβήτη σύγκρινε τα τμήματα BD και ΓD . Δικαιολόγησε γιατί η AD είναι διάμεσος του τριγώνου.
3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M, N τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να συγκρίνετε τα τμήματα MN και $B\Gamma$ και να βρείτε τη σχέση που τα συνδέει.
4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσο AM . Σε καθένα από τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AM\Gamma$ φέρτε τα ύψη. Τι παρατηρείτε;
5. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και να φέρετε τη διάμεσο AM . Συγκρίνετε με το διαβήτη τα τμήματα $AM, MB, M\Gamma$. Ποια σχέση τα συνδέει; Τι τρίγωνα είναι τα AMB και $AM\Gamma$ με κριτήριο τις πλευρές τους;
6. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 7 cm με κανόνα και διαβήτη.
7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τις διαμέσους του τριγώνου

Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

1. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 50$ και υπολογίστε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.
2. Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \frac{2}{3} \hat{A}$ και υπολογίστε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.
3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ δίνεται ότι $\hat{B} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου. Τι είδους τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του;
4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = B\Gamma$ και $\hat{B} = 90^\circ$. Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 130^\circ$. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του.
6. Στα επόμενα σχήματα να υπολογίσετε τις σημειωμένες γωνίες.

Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίδια



7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = B\Gamma = 10$ cm. Να υπολογίσετε τις γωνίες του.
8. Σε ισοσκελές τρίγωνο η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι 36° . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που είναι προσκείμενες στη βάση του
9. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι 60° και η γωνία $\hat{B}$ είναι πενταπλάσια από τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίδια Ιδιότητες παραλληλογράμμων και τραπεζίων

1. Να κατασκευάσετε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$. Να φέρετε τις διαγωνίους του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Αν O είναι το σημείο τομής τους να συγκρίνετε τα τμήματα AO και OG και στη συνέχεια BO και OD . Τι παρατηρείτε;
2. Να σχεδιάσετε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και να φέρετε τα ύψη που άγονται από την κορυφή A και την κορυφή B .
3. Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40 cm και η πλευρά $B\Gamma$ είναι 12 cm. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες πλευρές του.
4. Η μία πλευρά ενός παραλληλογράμμου είναι 7 cm και η περίμετρός του είναι ίση με την περίμετρο τετραγώνου πλευράς 12 cm. Να υπολογίσετε τις άλλες πλευρές του παραλληλογράμμου.

5. Να σχεδιάσετε ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το κέντρο κύκλου ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές του παραλληλογράμου.
6. Να σχεδιάσετε ρόμβο με γωνία $\hat{A} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 10$ cm. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του.
7. Να σχεδιάσετε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ αν $A\Delta = AB = B\Gamma = 6$ cm και $\hat{A} = 120^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του.
8. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 80 cm. Να υπολογίσετε τις πλευρές του αν η πλευρά ΑΒ είναι τετραπλάσια της πλευράς ΑΔ.
9. Αν σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι κάθετες μεταξύ τους να εξηγήσετε γιατί το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
10. Σχεδιάστε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έτσι ώστε το ΑΒ να είναι η μεσοκάθετος του ΓΔ και το ΓΔ να είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ. Φέρτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ. Τι τετράπλευρό είναι το ΑΓΒΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.