

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

25. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+1)^2$

β) $(y+2)^2$

γ) $(3\alpha+4)^2$

δ) $(3\alpha+5\beta)^2$

ε) $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)^2$

στ) $(x^2+3)^2$

ζ) $(x^4+x^2)^2$

η) $(2x^3+5x^2)^2$

θ) $(2x+\sqrt{5})^2$

ι) $(3\sqrt{x}+2y\sqrt{y})^2$

ια) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2$

ιβ) $(x^2y+xy^2)^2$

26. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-1)^2$

β) $(y-4)^2$

γ) $(2\alpha-3)^2$

δ) $(2\alpha-\beta)^2$

ε) $(2x-4y)^2$

στ) $(x^4-3)^2$

ζ) $(x^6-5x^3)^2$

η) $(x-\sqrt{2})^2$

27. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(-3x+2y)^2$

β) $(-5x^2-3)^2$

γ) $(-4+7xy)^2$

δ) $(-3\alpha-10\beta)^2$

28. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-6)(x+6)$

β) $(5\alpha-2\beta)(5\alpha+2\beta)$

γ) $(x+5)(5-x)$

δ) $(-x+2y)(x+2y)$

ε) $\left(2x^2-\frac{1}{4}y\right)\left(2x^2+\frac{1}{4}y\right)$

στ) $(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(x\sqrt{x}-y\sqrt{y})$

29. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\sqrt{2}+3)^2$

β) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

γ) $\left(2\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$

30. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+3\beta)^3$

β) $(x+2)^3$

γ) $(5x+2y)^3$

δ) $(2x+\sqrt{2})^3$

ε) $(x^2-1)^3$

στ) $(2\alpha\beta^2-\alpha^2\beta)^3$

ζ) $(-3-2x)^3$

η) $(-3\alpha+\beta^2)^3$

31. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+1)(x^2-x+1)$

β) $(x^2-2)(x^4+2x^2+4)$

γ) $(2x-1)(4x^2+4x+1)$

δ) $(\alpha^3+\alpha^2)(\alpha^6-\alpha^5+\alpha^4)$

32. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $(\dots+\dots)^2 = x^2 + \dots + 36$

β) $(x^3+\dots) = \dots \dots \dots 9$

γ) $(\dots \dots \dots)^2 = \alpha^2 - 12\alpha + \dots$

δ) $(x-\dots)(1+\dots) = x^2 - 1$

ε) $(2\alpha+3\beta)(\dots \dots \dots) = 4\alpha^2 - 9\beta^2$

στ) $(\dots+y)^3 = 27x^3 \dots \dots \dots + \dots + \dots$

ζ) $(2-\dots)^3 = \dots \dots 12x^2 + \dots \dots \dots$

η) $(\dots \dots \dots)^3 = 27x^3 + \dots + \dots + 125$

θ) $(2\alpha \dots \dots)(\dots \dots \dots + 4\beta^2) = 8\alpha^3 - \dots$

ι) $(\dots \dots \dots)(x^2 \dots 2x \dots \dots) = \dots + 8$

33. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x^2 - 2)^2 - (x^4 + 4)$

β) $4(x - 3)^2 - (2x - 3)^2$

γ) $(4x + 3y)^2 - (3x - 4y)^2$

δ) $(a - \beta)^2 - (a + \beta)^2$

ε) $3(\alpha - 2)^2 - 2(\alpha + 3)^2 - (\alpha + 2)(2 - \alpha)$

στ) $(x - 2)(2 + x)(x^2 + 4) - (x^2 - 2)^2$

ζ) $(\alpha - 1)^3 - 2(2\alpha + 1)^3 - \alpha(\alpha + 2)(2 - \alpha)$

η) $(x + 2)^3 - 3x(x - 1)^2 + (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

34. Να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + (2x + 5)^2 = (x + 4)^2 + (2x + 3)^2$

β) $(\alpha - 3\beta)^2 - (\beta - 3\alpha)^2 + 8(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$

γ) $(x + 2y)^2 - (2x + y)^2 = 3(y - x)(x + y)$

δ) $(\alpha y - \beta x)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2$

ε) $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

στ) $2(2x - 1)^3 - (x - 2)(4x + 1)^2 = 27x$

ζ) $(x - 3)^3 + 27(x^2 + 3) + x^3 = 2(x + 3)^3$

η) $(\alpha^2 + 5\alpha)(\alpha^2 + 10\alpha + 25) = \alpha(\alpha + 5)^3$

35. α) Να αποδείξετε ότι: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4, x \neq 0$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό: $\alpha = \left(5.384.562 + \frac{1}{5.384.562}\right)^2 - \left(5.384.562 - \frac{1}{5.384.562}\right)^2$

36. Αν $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = 4\alpha^2 + 2\alpha\beta + 4\beta^2$

(Απ.: 60)

37. Αν $x = 3 + \sqrt{2}$ και $y = 3 - \sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) xy

β) $x^2 - y^2$

γ) $x^2 + y^2$

δ) $x^3 - y^3$

ε) $x^3 + y^3$

(Απ.: α) 7, β) $12\sqrt{2}$, γ) 22 δ) $58\sqrt{2}$ ε) 90)

38. Αν $x - y = (\sqrt{10} - 3)(3 + \sqrt{10})$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = (x - y)^{1821} - (x + y)^2 + 4xy$

(Απ.: 0)

39. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές:

α) $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

β) $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$

γ) $\frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}}$

δ) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

40. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (3x - 1)^2 + (4x - 3)^2 - (5x - 3)^2$ είναι σταθερό.

41. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$ (Ταυτότητα Lagrange)

β) Να γράψετε το γινόμενο $34 \cdot 53$ ως άθροισμα τετραγώνων ακεραίων.

42. Αν $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι.
43. Αν $\alpha\beta = 10$ και $\alpha^2\beta + \alpha + \alpha\beta^2 + \beta = 220$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 + \beta^2$.
(Απ.: 380)
44. Να βρείτε τα αναπτύγματα:
 α) $(x^2 - x + 1)^2$ β) $(2\alpha - \beta - 3\gamma)^2$ γ) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^2$
45. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια των ταυτοτήτων τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:
 α) 99^2 β) 10.001^2 γ) $9997 \cdot 1003$ δ) $10^6 - 999^2$ ε) $\sqrt{65^2 - 56^2}$
46. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς x, y ισχύει: $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
47. Να αποδείξετε ότι για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει:
 α) αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha^2 < \beta^2$ β) αν $\alpha^2 < \beta^2$ τότε $\alpha < \beta$
48. Να αποδείξετε ότι: $(x+y+\omega)^2 - (x-y-\omega)^2 + (x+y-\omega)^2 - (x-y+\omega)^2 = 8xy$.
49. Αν $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$, να αποδείξετε ότι $x(x^3 + 6y) = y^2(y^2 + 9x^2)$ με $x, y \neq 0$.
50. Σκεφτείτε έναν διψήφιο αριθμό και βρείτε το τετράγωνό του. Στη συνέχεια βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού που σκεφτήκατε και αφαιρέστε τα δύο αποτελέσματα. Ο αριθμός που βρήκατε διαιρείται ακριβώς με το 9. Μπορείτε να το εξηγήσετε;
51. Αν $x + \frac{1}{x} = 6$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:
 α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$
(Απ.: α) 34, β) 198)
52. Αν $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$, να αποδείξετε ότι: $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$, $x \neq 0$
53. Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha\beta = 7$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
 α) $\alpha^2 + \beta^2$ β) $\alpha^3 + \beta^3$
(Απ.: α) 22, β) 90)
54. α) Για κάθε ακέραιο κ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος.
 β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακέραιων, αν διαιρεθεί με το 6, δίνει υπόλοιπο 1.
 γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιπών ακεραίων είναι πολλαπλάσια του 8.