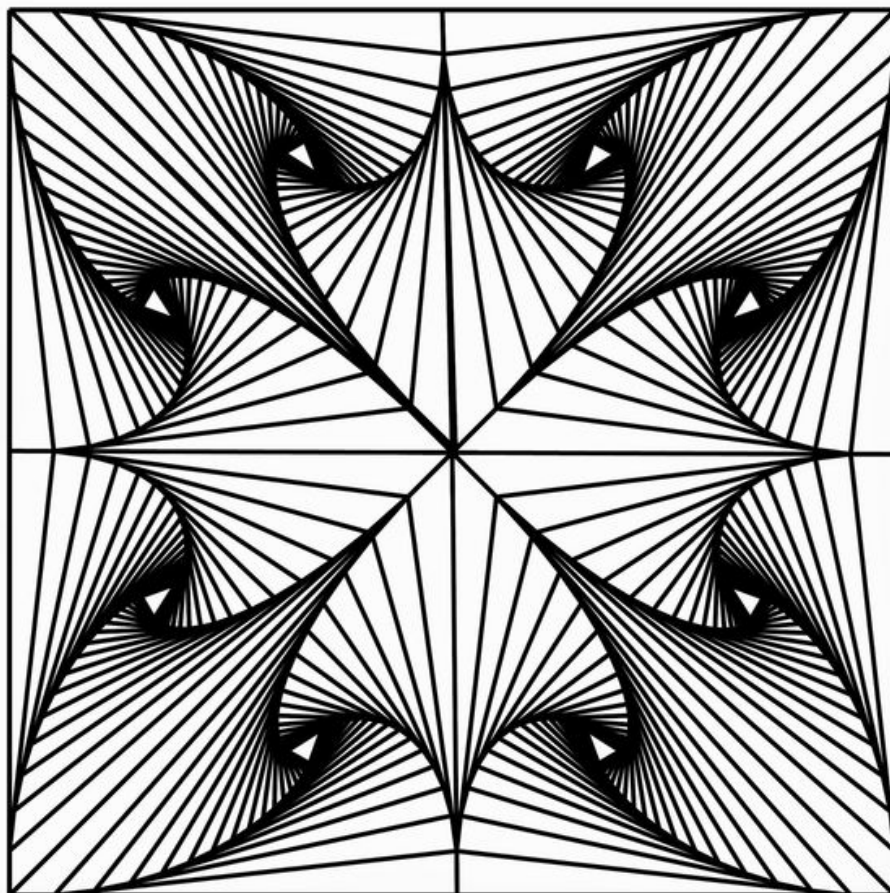




Μαθηματικά προσανατολισμού.

Β' Λυκείου 2021

Κ. Αδαμόπουλος



Μαθηματικά
Προσανατολισμού
Β' Λυκείου

....Η ψυχή του ανθρώπου γίνεται παντοδύναμη,
όταν συνεπαρθεί από μια μεγάλη ιδέα.
Τρομάξεις όταν ύστερα από πικρές δοκιμασίες,
καταλάβεις πως μέσα μας υπάρχει μια δύναμη
που μπορεί να ξεπεράσει τη δύναμη του ανθρώπου·
τρομάξεις γιατί από τη στιγμή που θα καταλάβεις
πως υπάρχει η δύναμη αυτή δεν μπορείς πια
να βρεις δικαιολογίες
για τις ασήμαντες ή αναντρες πράξεις σου,
για τη ζωή σου τη χαμένη,
ρίχνοντας το φταίξιμο στους άλλους·
ξέρεις πια πως εσύ, όχι η τύχη, όχι η μοίρα,
μήτε οι άνθρωποι γύρα σου, εσύ μονάχα έχεις,
ό,τι κι αν κάνεις, ότι κι αν γίνεις
ακέραιη την ευθύνη.
Και ντρέπεσαι τότε να γελάς, ντρέπεσαι να περγελάς
αν μια φλεγόμενη ψυχή ζητάει το αδύνατο.
Καλά πια καταλαβαίνεις πως αυτή είναι η αξία του ανθρώπου:
να ζητάει και να ξέρεις πως ζητάει το αδύνατο·
και να' ναι σίγουρος πως θα το φτάσει,
γιατί ξέρει πως αν δεν λιποψυχήσει
αν δεν ακούσει τι του κανοναρχάει η λογική,
μα κρατάει με τα δόντια την ψυχή του
κι εξακολουθεί με πίστη,
με πείσμα να κυνηγάει το αδύνατο,
τότε γίνεται το θάμα,
που ποτέ ο αφτέρουγος κοινός νους
δε θα μπορούσε να το μαντέψει:
το αδύνατο γίνεται δυνατό.

Νίκος Καζαντζάκης
(Από τον πρόλογο του "Καπετάν Μιχάλη")

ΤΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

I

Ο έρωτας
Το αρχιπέλαγος
Κι η πρόρα των αφρών του
Κι οι γλάροι των ονείρων του
Στο πιο ψηλό κατάρτι του ο ναύτης ανεμίζει
Ένα τραγούδι

Ο έρωτας
Το τραγούδι του
Κι οι ορίζοντες του ταξιδιού του
Κι η ηχώ της νοσταλγίας του
Στον πιο βρεγμένο βράχο της η αρραβωνιαστικιά προσμένει
Ένα καράβι

Ο έρωτας
Το καράβι του
Κι η αμεριμνησία των μελτεμιών του
Κι ο φλόκος της ελπίδας του
Στον πιο ελαφρό κυματισμό του ένα νησί λικνίζει
Τον ερχομό

II

Παιχνίδια τα νερά
Στα σκιερά περάσματα
Λένε με τα φιλιά τους την αυγή
Που αρχίζει
Ορίζοντας-

Και τ' αγριοπερίστερα ήχο
Δονούνε στη σπηλιά τους
Ξύπνημα γαλανό μεσ' στην πηγή
Της μέρας
Ήλιος -

Δίνει ο μαϊστρος το πανί
Στη θάλασσα
Τα χάνδια των μαλλιών
Στην ξεγνοιασιά του ονείρου του
Δροσιά -

Κύμα στο φως
Ξαναγεννάει τα μάτια
Όπου η Ζωή αρμενίζει προς
Τ' αγνάντεμα
Ζωή -

Οδυσσέας Ελύτης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

Μορφές εξίσωσης ευθείας

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$.

Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ : $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$

Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων : $\varepsilon: y = \lambda x$.

Εξίσωση ευθείας παράλληλης στον $x'x$: $\varepsilon: y = y_0$

Εξίσωση ευθείας κάθετης στον $x'x$: $\varepsilon: x = x_0$

Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ που διέρχεται από το γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$: $\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Η $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$:

- ♦ Είναι ευθεία αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
- ♦ Είναι παράλληλη στον $x'x$ αν $A = 0$ (και $B \neq 0$).
- ♦ Είναι παράλληλη στον $y'y$ αν $B = 0$ (και $A \neq 0$).
- ♦ Διέρχεται από το $O(0,0)$ αν $\Gamma = 0$.

Πώς βρίσκω το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε :

A) Αν σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία θ τότε $\lambda = \varepsilon\phi\theta$

B) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία της τότε $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Γ) Αν είναι παράλληλη σε γνωστή ευθεία δ ή διάνυσμα $\vec{\delta}$ τότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_\delta$.

Δ) Αν είναι κάθετη σε γνωστή ευθεία δ ή διάνυσμα $\vec{\delta}$ τότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1$.

E) Αν $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ τότε: $\lambda_\varepsilon = \alpha$.

ΣΤ) Αν $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ τότε: $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B}$.

Πώς βρίσκω που μια ευθεία τέμνει τους άξονες;

Για να βρω που μια ευθεία τέμνει τον yy' λύνω το σύστημα που συγκροτούν η εξίσωση της και η $x = 0$.

Για να βρω που μια ευθεία τέμνει τον $x'x$ λύνω το σύστημα που συγκροτούν η εξίσωσή της και η $y = 0$.

Πώς βρίσκω αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία ε :

Για να δω αν ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει σε μια ευθεία ε , θέτω στην εξίσωσή της όπου x το x_1 και όπου y το y_1 . Αν η σχέση που προκύπτει είναι αληθής, τότε το A ανήκει στην ε , ενώ αν είναι ψευδής δεν ανήκει.

Πώς βρίσκω πού τέμνονται δύο ευθείες;

Για να βρω που τέμνονται δύο ευθείες, λύνω το σύστημα που συγκροτούν οι εξισώσεις τους.

Αν το σύστημα έχει μία λύση , αυτή είναι το σημείο τομής τους.

Αν δεν έχει λύση , τότε οι ευθείες είναι παράλληλες .

Αν έχει άπειρες λύσεις τότε ταυτίζονται .

Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες;

Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης , δηλαδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Επίσης δύο ευθείες είναι παράλληλες αν δεν ορίζεται και για τις δύο ο συντελεστής διεύθυνσης (οπότε είναι κάθετες στον $\chi\chi'$)

Πότε δύο ευθείες είναι κάθετες;

Δύο ευθείες είναι κάθετες αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους ισούται με -1 , δηλ. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Επίσης είναι κάθετες αν η μια τους έχει συντελ. διεύθυνσης μηδέν και της άλλης δεν ορίζεται .

Σχέση ευθείας - διανύσματος

Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}' = (A, B)$.

Πώς βρίσκω τη γωνία δύο ευθειών;

Για να βρώ τη γωνία των ευθειών $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ και

$\varepsilon' : A'x + B'y + \Gamma' = 0$ βρίσκω τη γωνία των παράλληλων τους διανυσμά-

των $\vec{\delta} = (B, -A)$ και $\vec{\delta}' = (B', -A')$ με τον τύπο: $\text{syn}(\vec{\delta}, \vec{\delta}') = \frac{\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}'}{|\vec{\delta}| \cdot |\vec{\delta}'|}$

Πώς βρίσκω την απόσταση σημείου από ευθεία;

Η απόσταση του σημείου $M(x_1, y_1)$ από την ευθεία $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$

δίνεται από τον τύπο $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Πώς βρίσκω το εμβαδόν τριγώνου;

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ δίνεται

από τον τύπο $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|$ όπου $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ η ορίζουσα των συντεταγμένων των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

Πώς αποδεικνύω ότι η $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση ευθείας;

Αρκεί να δείξω ότι $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, οπότε θεωρώ ότι $A = B = 0$ και καταλήγω σε άτοπο .

Ποιες ευθείες περνούν από το σημείο $A(x_0, y_0)$;

Από το $A(x_0, y_0)$ περνούν οι ευθείες $\varepsilon : y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, αλλά και η ευθεία $\delta : x = x_0$ που δεν περιλαμβάνεται στις παραπάνω αφού δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου:

Κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας ρ :

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας ρ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση κύκλου αν και μόνο αν

$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Το κέντρο του κύκλου είναι τότε $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και η

ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$

Εξίσωση εφαπτομένης Κύκλου

εξίσωσης $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) πρέπει:

$d(K, \varepsilon) = \rho$ ή το σύστημα ευθεία-κύκλος να έχει διπλή λύση.

Με εστίες στον άξονα x'x

ΠΑΡΑΒΟΛΗ	ΕΛΛΕΙΨΗ	ΥΠΕΡΒΟΛΗ
Εξίσωση $y^2 = 2px$	Εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$	Εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$
Εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	Εστίες $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$	Εστίες $E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$
Διευθετούσα $x = -\frac{p}{2}$	Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (0 < \varepsilon < 1)$	Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\varepsilon > 1)$
Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ $yy_1 = p(x + x_1)$	Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$	Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
		Ασύμπτωτες $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$

Με εστίες στον άξονα yy'

ΠΑΡΑΒΟΛΗ	ΕΛΛΕΙΨΗ	ΥΠΕΡΒΟΛΗ
Εξίσωση $x^2 = 2py$	Εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$	Εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$
Εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$	Εστίες $E'(0, -\gamma), E(0, \gamma)$	Εστίες $E'(0, -\gamma), E(0, \gamma,)$
Διευθετούσα $y = -\frac{p}{2}$	Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (0 < \varepsilon < 1)$	Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\varepsilon > 1)$
Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ $xx_1 = p(y + y_1)$	Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ $\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$	Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$
		Ασύμπτωτες $y = \pm \frac{\alpha}{\beta} x$

Για να είναι μια ευθεία εφαπτομένη μιας κωνικής τομής πρέπει το σύστημα ευθεία-κωνική τομή να έχει μοναδική (διπλή) λύση.
(Η λύση του συστήματος καταλήγει στη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, οπότε απαιτώ: $\Delta = 0$).

Βασικές εξισώσεις γραμμών

- $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = -\frac{A}{B}$.

- $y = \alpha x + \beta$

Ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = \alpha$.

- $x = x_0$

Ευθεία κάθετη στον $x'x$ (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της)

- $y = y_0$

Ευθεία παράλληλη στον $x'x$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

Κύκλος κέντρου: $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας ρ .

- $x^2 + y^2 = \rho^2$

Κύκλος κέντρου: $O(0,0)$ και ακτίνας ρ .

- $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

Κύκλος κέντρου: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$.

- $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Έλλειψη.

- $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ή $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ ή $y = \frac{\alpha}{x}$

Υπερβολή.

- $x^2 - y^2 = \alpha^2$ ή $y^2 - x^2 = \alpha^2$

Ισοσκελής υπερβολή.

- $y^2 = \alpha x$ ή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

Παραβολή

Διανύσματα

"Αυτοί που θα δουν καθαρά την αλήθεια των μαθηματικών, θα μπορέσουν να θαυμάσουν το μεγαλείο και τη δύναμη της φύσης, σ' αυτή τη διπλή απειρία που μας περιτριγυρίζει από παντού και να μάθουν από αυτή τη θαυμαστή θεώρηση πώς να γνωρίσουν τον εαυτό τους, βλέποντάς τον τοποθετημένο ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα κίνησης, ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα χρόνου.

Έτσι θα μπορέσουν να μάθουν να αξιολογούν δίκαια τον εαυτό τους και να σχηματίζουν συλλογισμούς που να αξίζουν εν τέλει περισσότερο από όλες τις μαθηματικές γνώσεις".

Blaise Pascal

BH/01. Το σημείο M είναι μέσο του τμήματος AB αν και μόνο αν $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

BH/02. Αν AΔ, BE, ΓZ διάμεσοι του τριγώνου ABΓ δείξτε ότι $\overrightarrow{AΔ} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ΓZ} = \vec{0}$.

BH/03. Αν M, N τα μέσα των πλευρών AB και AΓ τριγώνου ABΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BΓ}$.

BH/04. Αν M, N τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ τετραπλεύρου ABΓΔ δείξτε ότι: A) $\overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{AΔ} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$ B) $\overrightarrow{AΓ} + \overrightarrow{BΔ} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$.

BH/05. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AΔ} + \overrightarrow{BΓ} = \overrightarrow{AΓ} + \overrightarrow{BΔ}$.

BH/06. Αν ABΓΔ και A'B'Γ'D' δύο παραλληλόγραμμα με κέντρα K και K' αντίστοιχα, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{ΓΓ'} + \overrightarrow{ΔΔ'} = 4\overrightarrow{KK'}$.

BH/07. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και Δ, E, Z τα μέσα των AB, BΓ και ΔE αντίστοιχα. Για κάθε σημείο M του επιπέδου να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MΓ} = 4 \cdot \overrightarrow{MZ}$.

BH/08. Αν K και Λ τα μέσα των διαγωνίων AΓ και BΔ τετραπλεύρου ABΓΔ τότε ισχύει: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AΔ} + \overrightarrow{ΓB} + \overrightarrow{ΓΔ} = 4 \cdot \overrightarrow{KΛ}$.

BH/09. Αν A, B, Γ, Δ σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AΓ} + \overrightarrow{ΔE} = \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{BE}$ να δείξετε ότι τα σημεία A, B συμπίπτουν.

BH/10. Αν A, B, M, P σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ να δείξετε ότι τα σημεία M, P συμπίπτουν.

BH/11. Αν A, B, Γ, Δ σημεία του επιπέδου, διαφορετικά μεταξύ τους, για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$, όπου O τυχαίο σημείο, δείξτε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα A, B, Γ, Δ είναι παραλληλόγραμμο.

BH/12. Δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

BH/13. Αν οι διαγώνιοι κυρτού τετραπλεύρου διχοτομούνται να δειχθεί ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

BH/14. Αν M το μέσο της διαγωνίου $A\Gamma$ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αποδείξτε ότι $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$.

BH/15. Α) Αν P τυχαίο σημείο του επιπέδου ενός τριγώνου $AB\Gamma$, αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2 \cdot \overrightarrow{P\Gamma}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο της θέσης του P).

Β) Αν A, B, Γ σταθερά σημεία, δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{M\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του M .

BH/16. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και P τυχαίο σημείο του επιπέδου. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta} = 2 \cdot \overrightarrow{PA} - 5 \cdot \overrightarrow{PB} + 3 \cdot \overrightarrow{P\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου P , δηλαδή σταθερό.

Αποδείξτε το ίδιο αν ισχύει $\vec{\nu} = \overrightarrow{PA} - 3 \cdot \overrightarrow{PB} + 2 \cdot \overrightarrow{P\Gamma}$.

BH/17. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z που ορίζονται από τις σχέσεις: $\overrightarrow{B\Gamma} = 3 \cdot \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = 3 \cdot \overrightarrow{\Gamma E}$ και $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AZ}$. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \vec{0}$.

BH/18. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ τέτοια που $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$. Αν M τυχαίο σημείο του επιπέδου, να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{M\Gamma}$.

BH/19. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB που τριχοτομείται από τα σημεία Γ και Δ και τυχαίο σημείο O εκτός του AB . Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, να εκφραστούν τα $\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{O\Delta}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

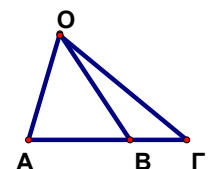
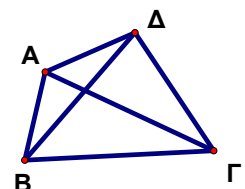
BH/20. Στο διπλανό σχήμα δείξτε ότι:

A) $3 \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + 2 \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + 5 \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 3 \cdot \overrightarrow{A\Delta} + 2 \cdot \overrightarrow{B\Delta}$.

B) $7 \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - 2 \cdot \overrightarrow{B\Delta} + 5 \cdot \overrightarrow{\Delta A} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + 7 \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Πάρτε σημείο αναφοράς το A)

BH/21. Αν $2 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB} = 5 \cdot \overrightarrow{O\Gamma}$ να δείξετε ότι Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.



BH/22. Αν $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{LZ} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ZB} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία M και A συμπίπτουν. (Αρκεί $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$)

BH/23. Δείξτε ότι $2 \cdot \overrightarrow{AM} - 3 \cdot \overrightarrow{BN} - 2 \cdot \overrightarrow{AN} = 5 \cdot \overrightarrow{NM} - 3 \cdot \overrightarrow{BM}$.

BH/24. Α) Δίνονται τα σημεία O, A, B, Γ για τα οποία ισχύει:
 $\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OG} = 4\overrightarrow{OA}$. Να δειχθεί ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Τα εκφράζουμε όλα παίρνοντας σημείο αναφοράς το A)

Β) Αν για τα σημεία A, B, Γ είναι: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ να δειχθεί ότι είναι συνευθειακά.

BH/25. Α) Αν για τα σημεία A, B, Γ, P, Σ, ισχύει η σχέση:

$\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SB} + 3\overrightarrow{PG}$ να δειχθεί ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Τα εκφράζουμε όλα παίρνοντας σημείο αναφοράς το A)

Β) Αν για τα σημεία A, B, Γ, O, M, ισχύει η σχέση:

$\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{OB}$ δείξτε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Γ) Αν για τα σημεία A, B, Γ, P, M, ισχύει η σχέση:

$\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{GM}$ δείξτε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Δ) Αν για τα σημεία A, B, Γ, P, ισχύει η σχέση:

$(\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{PG}$ να δειχθεί ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

BH/26. Αν για τα σημεία A, B, Γ, K, Λ, M ισχύει η σχέση:

$2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BG}$ να δειχθεί ότι $\overrightarrow{KL} \updownarrow \overrightarrow{ML}$.

(Τα εκφράζουμε όλα παίρνοντας σημείο αναφοράς το K)

BH/27. Δίνονται τα διανύσματα: , $\overrightarrow{OA} = 10\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\beta}$ και

$\overrightarrow{OG} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να δειχθεί ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

BH/28. Α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Αν $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$,

$\overrightarrow{OB} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{OG} = -\vec{\alpha} + 11\vec{\beta}$ να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

BH/29. Α) Αν $\lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OG} + (\lambda - 1)\overrightarrow{OB}$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$ δείξτε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Β) Αν $\lambda\overrightarrow{OA} + (2 - \lambda)\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB}$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$ δείξτε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

BH/30. Α) Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ένα σημείο Δ τέτοιο που να ισχύει $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AG}$ με $x + y = 1$.

Ναδειχθεί ότι το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ΒΓ.

Β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ . Αν

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AE}$ με $x + y = 2$ να αποδειχθεί ότι τα σημεία Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΒΗ/31.Α) Αν ισχύει: $2\kappa\overrightarrow{OA} + (1 - 2\kappa)\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{OB}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$, ναδειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά , όπου Ο τυχαίο σημείο αναφοράς.

Β) Αν ισχύει: $\kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ με $\kappa + \lambda + \mu = 0$ και κ, λ, μ όχι όλα μηδέν, ναδειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΒΗ/32. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{y}$ για τα οποία ισχύουν:

$\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $4\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι ομόρροπα .

ΒΗ/33. (Άσκηση-μέθοδος) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά και ισχύει $\kappa \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ να δείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

ΒΗ/34. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα και ισχύει η σχέση:

$x_1\vec{\alpha} + y_1\vec{\beta} = x_2\vec{\alpha} + y_2\vec{\beta}$ δείξτε ότι $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

Αποδείξτε επίσης ότι κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ του επιπέδου γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ΒΗ/35. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά , ναδειχθεί ότι:

α) τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά .

β) τα $\vec{y} = 9\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{x} = 3\vec{\alpha} - \frac{5}{3}\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά .

ΒΗ/36. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου. Έστω ακόμα τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{w}$ δεν είναι συγγραμμικά .

β) Να γράψετε το $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

ΒΗ/37. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά , βρες το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά .

ΒΗ/38. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα και $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = (\kappa + 3)\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{OG} = 4\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$, βρείτε το κ ώστε τα Α , Β , Γ να είναι συνευθειακά .

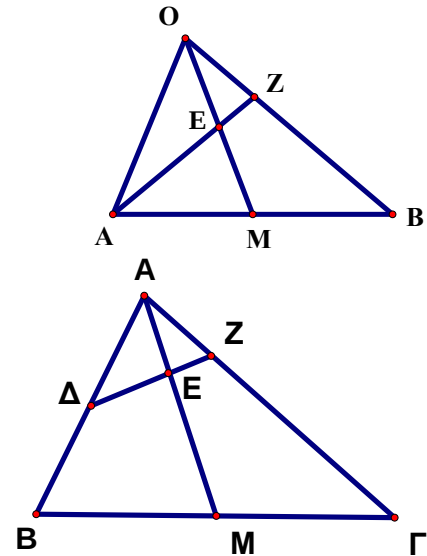
BH/39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{u} - \vec{v}$ και $\vec{\beta} = x\vec{u} + \vec{v}$, όπου $\vec{u}, \vec{v}$ μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

BH/40. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Αν ισχύει: $(x+1) \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = x \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + (x-y) \cdot \overrightarrow{AM}$, βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$.

BH/41. Αν OM διάμεσος του τριγ. OAB ,
Ε το μέσο της OM και $OZ = \frac{1}{3}OB$ να δείξετε

ότι τα σημεία A, E, Z είναι συνευθειακά.

BH/42. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Δ είναι το μέσο της πλευράς AB και το M μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Αν $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$ να δείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.



BH/43. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Στην πλευρά AB παίρνω το σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\vec{\alpha}$, στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\vec{\beta}$ και στην

προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ σημείο Z ώστε $\overrightarrow{BZ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Δείξτε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

BH/44. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z στις $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να δειχθεί ότι τα σημεία Δ, Z και E είναι συνευθειακά.

BH/45. Αν E το μέσο της διαμέσου BD τριγώνου $AB\Gamma$ και Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $\overrightarrow{\Gamma Z} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

BH/46. Α) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των $A\Gamma$ και BM . Να δειχθεί ότι $AN = \frac{1}{3}A\Gamma$.

Β) Αν M το μέσο της διαμέσου AD τριγώνου $AB\Gamma$ και η BM τέμνει την $A\Gamma$ στο E να δείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Gamma} = 3 \cdot \overrightarrow{AE}$.

BH/47. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 3$ να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

BH/48. Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{3}|\vec{\beta}| = \frac{1}{4}|\vec{\gamma}|$, να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

BH/49. Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$, να δειχθεί ότι:

A) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

BH/50. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{BG}$.

BH/51. Αν A, B, Γ, Δ σταθερά σημεία βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M αν ισχύει $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MG} + \vec{MD}|$.

BH/52. Έστω τρίγωνο ABΓ.

A) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\vec{MB} + \vec{MG} + 2 \cdot \vec{MA}| = |\vec{MB} + \vec{MG} - 2 \cdot \vec{MA}|$.

BH/53. Αν ΓΔ η διάμεσος του τριγώνου με $|\vec{GD}| = 3$, βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $3|\vec{MB} - \vec{AB}| = |\vec{MA} + \vec{MB} - 2 \cdot \vec{MG}|$.

BH/54. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{AG} + \vec{MG} - \vec{AM}|$.

BH/55. A) Έστω τρίγωνο ABΓ. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\vec{AM} = (1 - \lambda)\vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AG}$ με A) $\lambda \in \mathbb{R}$ B) $\lambda \in (0, +\infty)$ Γ) $\lambda \in [0, 1]$.

BH/56. Έστω τρίγωνο ABΓ. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(\lambda + 1)\vec{MA} = \lambda(\vec{MG} + \vec{BA})$.

BH/57. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\vec{MB} + \vec{MD} = \lambda \cdot (\vec{MG} - \vec{MA})$ με $\lambda \in [-1, 1]$.

Συντεταγμένες διανυσμάτων

BH/58. Αν $\vec{\alpha} = (\kappa - 1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, \lambda + 1)$ βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

A) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ B) $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ Γ) $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

Δ) $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (2, 5)$ E) $\frac{\vec{\alpha}}{2} + \frac{\vec{\beta}}{3} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

BH/59. Να βρείτε τους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα

$\vec{\alpha} = (3x - 2y - 3, x + y + 1)$ και $\vec{\beta} = (x + y - 1, 5x + 4y + 1)$ να είναι ίσα.

Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

BH/60. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^3 - \lambda, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$.

Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:

A) $\vec{\alpha} = \vec{0}$. B) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // x'x$. Γ) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // y'y$

BH/61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, -3)$ και $\vec{v} = (-2, 1)$. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

A) $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v}$ B) $\vec{\alpha} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ Γ) $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

Δ) $\vec{u} + \vec{\alpha} = \vec{v}$ E) $\vec{u} + 3 \cdot \vec{v} - 2\vec{\alpha} = \vec{0}$ ΣΤ) $\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{\alpha}}{3} = \frac{\vec{v}}{2}$

BH/62. A) Δίνονται τα σημεία A(1,3), B(6,8) και Δ(-2,2). Βρείτε το σημείο Γ ώστε το ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

BH/63. Δίνεται παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία B(4,5),

Γ(2, -1) και Δ(-1, -3).

A) Να βρείτε την κορυφή Α.

B) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου.

Γ) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

BH/64. Αν A(-1,2), B(2,3), Γ(5,0) και Δ(3,x) βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι τραπέζιο με βάσεις AB, ΔΓ.

BH/65. A) Δίνονται τα σημεία A(1,1), B(7,10). Βρείτε τα σημεία Γ, Δ που τριχοτομούν το τμήμα AB.

BH/66. A) Δίνονται τα σημεία A(4,5), B(-1,-2) και Γ(3,4).

Βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου.

B) Δίνονται τα σημεία A(2,4), B(-2,-3) και Γ(-2,5).

Βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.

BH/67. A) Δίνονται τα σημεία $A(0,4)$, $B(5,-3)$ και $\Gamma(-1,-2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ , αν $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

BH/68. Αν $\overrightarrow{AB} = (1,-4)$ και $\overrightarrow{AG} = (-3,2)$, να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{BG}$ και $\overrightarrow{AM}$, όπου M το μέσο του $B\Gamma$. Στη συνέχεια, αν $A(-1,2)$ να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Γ .

BH/69. Αν $A(1,1)$ και $B(8,15)$ βρείτε σημείο M ώστε:
 $5 \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{MB}$.

BH/70. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda^2 - \lambda + 3, \lambda^2 - 1)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2 + 2\lambda + 1, \lambda + 1)$. Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι ίσα. Υπάρχει τιμή του λ τέτοια που τα παραπάνω διανύσματα να είναι αντίθετα;

BH/71. A) Βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ παράλληλο στο $\vec{\alpha} = (2,1)$ με μέτρο $3\sqrt{5}$.

BH/72. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-6,8)$. Να βρεθεί το μέτρο του $\vec{\alpha}$ καθώς και ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με $|\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}|$.

BH/73. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(3,1)$. Να βρείτε :

A) Το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$

B) Το μέσο του AB

Γ) Το συμμετρικό του A με κέντρο συμμετρίας το B .

Δ) Το σημείο P αν ισχύει : $\overrightarrow{AP} = 2 \cdot \overrightarrow{PB}$.

BH/74. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 2)$ και $\vec{\beta} = (12, x - 2)$. Να βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

BH/75. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (9, x)$ να είναι αντίρροπα.

BH/76. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 1)$ και $\vec{\beta} = (3\lambda - 2, \lambda)$ να είναι συγγραμμικά.

BH/77. Αν $A(1,1)$ και $B(-1,2)$ βρείτε σημείο $M(x,y)$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ να είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha} = (2,1)$ και το $\overrightarrow{BM}$ συγγραμμικό με το $\vec{\beta} = (1,-1)$.

BH/78. A) Αν $A(1,1)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(-5,x)$, να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία αυτά να είναι συνευθειακά.

BH/79. Β) Αν $A(1,1)$, $B(2,x)$ και $\Gamma(x+1,3)$, να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία αυτά να είναι συνευθειακά.

BH/80. Δείξτε ότι τα σημεία $A(\alpha, \beta + \gamma)$, $B(\beta, \gamma + \alpha)$, $\Gamma(\gamma, \alpha + \beta)$ είναι συνευθειακά.

BH/81. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, y)$ και $\vec{\beta} = (y - 2, x + 6)$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει ότι $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, -6)$.

Α) Να δείξετε ότι $x = -2$ και $y = 3$.

Β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

BH/82. Δίνονται τα σημεία $B(1,2)$ και $\Gamma(-1,6)$. Να βρείτε σημείο A του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $(AB) = (A\Gamma)$.

BH/83. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,0)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(0,-1)$. Δείξτε ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Γ και ισοσκελές.

BH/84. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4,5)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. Βρείτε τον κ ώστε $\hat{A} = 90^\circ$.

BH/85. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει τη διεύθυνση του $\vec{\gamma} = (1, \sqrt{3})$ και το ίδιο μέτρο με το $\vec{\beta} = (4, -3)$. Βρείτε τις συντεταγμένες του.

BH/86. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda - 1, \mu - 1)$, $\vec{\beta} = (\lambda + 1, 2\mu - 5)$ $\vec{x} = (1,1)$, $\vec{y} = (-2,1)$. Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \parallel \vec{x}$ και $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \parallel \vec{y}$.

BH/87. Αν $\vec{\alpha} = (x, y + 1)$ και $\vec{\beta} = (2x + y, 2y)$ βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \parallel x'x$.

BH/88. Αν $\overrightarrow{OA} = (1,2)$, $\overrightarrow{OB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{OG} = (x,3)$ βρες το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

BH/89. Αν $\overrightarrow{OA} = (1,3)$, $\overrightarrow{OB} = (x,2)$ και $\overrightarrow{OG} = (x+2,1)$ βρες το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

BH/90. Δίνονται τα σημεία $A(2,-4)$ και $B(-6,8)$. Να βρεθούν το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$, το μέσο M του AB και το σημείο P που χωρίζει το AB σε λόγο 2:3.

BH/91. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (4, -3)$, $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 5)$. Εκφράστε το $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

BH/92. Γράψτε το $\vec{v} = (4, 13)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 2)$.

BH/93. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$ και $\vec{\gamma} = (1, -4)$. Αναλύστε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

BH/94. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (3, 4)$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (-1, 2)$.

BH/95. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-2, 6)$ σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{\beta} = (2, -1)$ και $\vec{\gamma} = (3, 1)$.

BH/96. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 3)$ σε δύο διανύσματα από τα οποία το ένα είναι παράλληλο με τον άξονα $x'x$ και το άλλο με το διάνυσμα $\vec{v} = (-1, 2)$.

BH/97. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 3)$ και $B(3, 0)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M για το οποίο ισχύει $\vec{BM} = 2 \cdot \vec{MA}$ και τις συντεταγμένες του συμμετρικού του M ως προς το A .

BH/98. Αν το διάνυσμα $\vec{u} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι παράλληλο στη διχοτόμο της $2^{\text{ης}}$ και $4^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων να προσδιορίσετε το $\theta \in \mathbb{R}$.

BH/99. Αν $\vec{\delta} = (-1, \sqrt{3})$ βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$.

BH/100. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda, 7 - \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| = 13$.

BH/101. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -1)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, το οποίο να έχει μέτρο ίσο με $4\sqrt{5}$.

BH/102. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa - 2\lambda, -2)$ και $\vec{\beta} = (4\lambda^2 + 2\lambda - \kappa + 1, \kappa + 2\lambda)$. Αν τα διανύσματα είναι παράλληλα να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

BH/103. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(\lambda + 2, -1)$, $B(1, 3 - \lambda)$ και $\Gamma(2, 3)$ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

BH/104. Βρείτε διάνυσμα που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$ και έχει μέτρο $3\sqrt{2}$.

BH/105. Αν το διάνυσμα $\vec{\delta}$ σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\frac{5\pi}{4}$ βρείτε το $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ώστε το $\vec{u} = (x-1, 2x+1)$ να είναι συγγραμμικό με το $\vec{\delta}$.

BH/106. Α) Αν $\vec{\alpha} = (2,3)$ και $\vec{\beta} = (-3,-2)$. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ καθώς και η γωνία που σχηματίζει το $\vec{v}$ με τον άξονα $x'x$.

BH/107. Αν $A(2, \sqrt{3})$ και $B(3, 2\sqrt{3})$ βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

BH/108. Βρείτε διάνυσμα $\vec{\delta}$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και έχει μέτρο $\sqrt{18}$.

BH/109. Αν $A(1,1)$ βρείτε το σημείο B ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $3\pi/4$ και να έχει μέτρο $3\sqrt{2}$.

BH/110. Αν $\vec{\alpha} = (\mu, \mu+2)$ με $\mu \neq 0$ και $\vec{\beta} = (6,8)$:

A) Βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}^*$ αν $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{2}$.

B) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ με τον $x'x$.

Γ) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta} = 5\vec{\beta} - 7\vec{\alpha}$ με τον $x'x$.

BH/111. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ και $\vec{\beta} = (x+2, 2y)$ βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}^*$ ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5}$.

BH/112. Α) Βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(x, 1)$, $B(4, x+1)$ και $\Gamma(7, 3x)$ να είναι συνευθειακά.

B) Αν $O(0,0)$, $\overrightarrow{OA} = (-1, 9)$, $\overrightarrow{OB} = (5, -3)$, $\overrightarrow{OG} = (x, 5)$ βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία A , B , Γ να είναι συνευθειακά.

BH/113. Να βρεθεί η γωνία φ την οποία σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ όπου $A(2,4)$ και $B(4,2)$, με τον άξονα $x'x$.

Όμοια αν $A(3,0)$ και $B(0, -\sqrt{3})$.

BH/114. Αν $\vec{\alpha} = (x+1, 2)$ και $\vec{\beta} = (x, 2x+1)$, τότε:

A) Δείξτε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

B) Αν $x = -3$ βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.

Γ) Αν $x = -1$ γράψτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{i}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Δ) Αν $x = -2$ βρείτε ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με μέτρο $2\sqrt{5}$.

BH/115. Αν $A(\mu - 3, 2)$ και $B(3\mu, \mu - 3)$ βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{7\pi}{4}$.

BH/116. Αν $A(1,1)$ και $B(5,1)$ βρείτε σημείο M ώστε $MA = MB$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

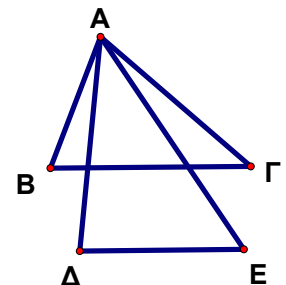
BH/117. Να βρεθεί το σημείο K που να ισαπέχει από τα σημεία: $A(2,2)$, $B(0,4)$ και από τα $\Gamma(1,-4)$, $\Delta(-2,3)$.

BH/118. Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$, $B(3,2)$, $\Gamma(-2,-1)$ και M τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$ με $O(0,0)$.

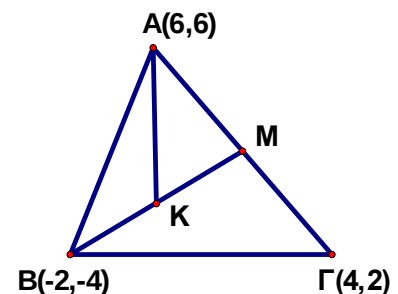
α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M .

β) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο $ABM\Gamma$ είναι παρ/μο.

BH/119. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E ώστε: $\overrightarrow{A\Delta} = 5 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. Γράψτε το $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, και δείξτε ότι $\overrightarrow{\Delta E} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.



BH/120. Αν στο διπλανό σχήμα το M είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ και το K μέσο της διαμέσου BM , βρείτε τις συντεταγμένες του K και του $\overrightarrow{AK}$.



BH/121. Δείξτε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A(11,2)$, $B(6,-10)$, $\Gamma(-6,-5)$ και $\Delta(-1,7)$ είναι τετράγωνο.

BH/122. Βρείτε το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(6,4)$, $B(0,2)$ και $\Gamma(7,1)$.

BH/123. Αν τα σημεία $K(4,5)$, $\Lambda(2,8)$ και $M(3,6)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τριγώνου $AB\Gamma$ να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

BH/124. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$, $\vec{\beta} = (-y^2 + 4y - 5, x + 2)$ είναι συγγραμμικά, να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$.

BH/125. Α) Αν $A(-3, 2)$, $B(4, -1)$ βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$ ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

Β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (x + 1, x)$, $\vec{OB} = (2x - 1, x - 1)$ και $\vec{OG} = (-1, 3)$. Ναδειχθεί ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

BH/126. Αν $A(-1, 2)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(7, 2)$, AM η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, Δ το μέσο της AM και ισχύει $2 \cdot \vec{AE} = \vec{E\Gamma}$ τότε:

Α) βρείτε τα Δ, E .

Β) Δείξτε ότι τα B, Δ, E είναι συνευθειακά.

BH/127. Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, $A(1, -2)$, $\Delta(2, 2)$, το B ανήκει στον $x'x$ και το Γ ανήκει στον $y'y$, βρείτε τα B, K, Γ .

BH/128. Αν $A(3x, y)$, $B(4x + 3y, 2y)$ βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° και να έχει μέτρο $2\sqrt{2}$.

BH/129. Αν $A(\mu - 1, 0)$ και $B(2, 3\mu)$ βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\mu, \lambda)$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$ και είναι παράλληλο στο $\vec{AB}$.

BH/130. Έστω $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$ και $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$. Αν το $\vec{u}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και έχει μέτρο $10\sqrt{2}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος.

BH/131. Βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ που έχει μέτρο $2\sqrt{2}$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

BH/132. Αν $A(3, 1)$ βρείτε σημείο B τέτοιο που το διάνυσμα $\vec{AB}$ να έχει μέτρο $4\sqrt{2}$ και να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

BH/133. Δίνονται τα σημεία $A(2,2)$, $B(-1,0)$, $\Gamma(4,-5)$ και $\Delta(6,3)$.

Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

BH/134. Αν $\vec{\alpha} = (1,2)$, $\vec{\beta} = (2,1)$ και $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = x\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, υπολογίστε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα A , B , Γ να είναι συνευθειακά.

BH/135. Αν $A(1,1)$, $B(3,2)$, $\Gamma(1,3)$, $\Delta(2,2)$ βρείτε το σημείο τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$.

BH/136. Αν $A(-3,-1)$, $B(-5,-3)$, $\Gamma(-4,7)$ και $\Delta(-2,3)$ να αποδειχθεί ότι οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται και να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

BH/137. Βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, |\vec{\alpha}| - 2)$.

BH/138. Αν $A(-1,0)$, $B(2,-3)$, $\Gamma(0,1)$ βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε να ισχύει: $2 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} - |\vec{v}| \cdot \overrightarrow{AG}$.

BH/139. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας συντεταγμένες σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

BH/140. Αποδείξτε ότι οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

BH/141. Θεωρώ τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην πλευρά $\Delta\Gamma$

θεωρώ σημείο E και στην πλευρά ΔA σημείο Z ώστε $\Delta E = \Delta Z = \frac{a}{3}$. Να αποδείξετε ότι $AE = \Gamma Z$.

BH/142. Δείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της τρίτης πλευράς.

BH/143. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και E, Z, H τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A$ και AB αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου, αποδείξτε ότι το $HZE\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

BH/144. Δείξτε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Εσωτερικό γινόμενο

Μαζεύω τα σύνεργά μου: όραση, ακοή, γέψη, όσφρηση, αφή, μυαλό, βράδιασε πια, τελεύει το μεροκάματο, γυρίζω σαν τον τυφλοπόντικα σπίτι μου, στο χώμα. Όχι γιατί κουράστηκα να δουλεύω, δεν κουράστηκα, μα ο ήλιος βασίλεψε. Ν. Καζαντζάκης

ΒΘ/01. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 60^\circ$. Να βρείτε τα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2$ και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

ΒΘ/02. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του επιπέδου τέτοια που $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Να βρείτε το $|5\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}|$.

ΒΘ/03. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και τα διανύσματα $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, να βρεθεί η γεωμ. γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ΒΘ/04. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$, βρείτε το $|3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

ΒΘ/05. Αν $|\vec{\alpha}| = 4$ και $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$, βρείτε το $\sin\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$.

ΒΘ/06. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = \sqrt{27}$, $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -9$.
Α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

Β) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα: $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

ΒΘ/07. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ΒΘ/08. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$, $\vec{\delta} = \vec{\beta} - 5\vec{\alpha}$, ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ έχουν τα ίδια μέτρα και είναι μεταξύ τους κάθετα.

ΒΘ/09. Α) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ δείξτε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

B) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα, $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να δείξετε ότι: $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.

BΘ/10. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \sqrt{3} \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να βρεθούν οι γωνίες $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$.

BΘ/11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ που σχηματίζουν γωνία $\theta = \frac{\pi}{3}$. Βρείτε τη γωνία φ των $\vec{x} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{y} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

BΘ/12. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα ώστε: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}\right)$.

BΘ/13. A) Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

B) Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7$ υπολογίστε τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$.

BΘ/14. A) Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ βρείτε το $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

B) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου τέτοια που $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{34}$. Βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

BΘ/15. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Αποδείξτε ότι $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$.

BΘ/16. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο μη μηδενικά διανύσματα, να αποδείξετε ότι :

$$A) |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad B) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{4}|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2.$$

BΘ/17. Αν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ δείξτε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

BΘ/18. A) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

Β) Αν $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$, $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 19\sqrt{19}$ υπολογίστε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

Γ) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = 5$ βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$, $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$ και τη γωνία $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\beta})$

ΒΘ/19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$,

$$\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 28 \text{ και } |\vec{\alpha}|^2 - 3|\vec{\alpha}| + 15 = 5|\vec{\alpha}| - 1.$$

Α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 4$.

Β) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6$.

Γ) Να δείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 3$. Δ) Βρείτε το εσ. γινόμενο: $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

ΒΘ/20. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 6$, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

ΒΘ/21. Αν $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ΒΘ/22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1 \text{ και } \widehat{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha})} = \frac{\pi}{3}. \text{ Βρείτε τη γωνία } \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}.$$

ΒΘ/23. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 45^\circ$, βρείτε την $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\alpha} - \vec{\beta})}$.

ΒΘ/24. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ να δείξετε ότι : α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -1$ και β) $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$.

ΒΘ/25. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ αποδείξτε ότι :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = \frac{1}{2}(|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 - 3).$$

ΒΘ/26. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και μη συγγραμμικά και $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, να δείξετε ότι $\widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\alpha})} + \widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\beta})} = \pi$.

ΒΘ/27. Αν $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$ και $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

ΒΘ/28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε να ισχύουν: $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{x})$.

ΒΘ/29. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και αντίστροφα.

ΒΘ/30. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα.

Αν ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.

ΒΘ/31. Α) Αν $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (3, 1)$ να βρείτε τα: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2$ και $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

Β) Αν $\vec{\alpha} = (-3, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 8)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 2)$ υπολογίστε τα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ και τα $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$. Τι παρατηρείτε;

ΒΘ/32. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\mu - 4, 1 + 2\mu)$, $\vec{\beta} = (2\mu, 3 - \mu)$ είναι κάθετα, να προσδιορίσετε τον $\mu \in \mathbb{R}$.

ΒΘ/33. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (4, 3)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

ΒΘ/34. Α) Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και έχουν μέτρο $\sqrt{40}$.

Β) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και έχουν μέτρο 10.

ΒΘ/35. Αν $\vec{\alpha} = (2, 1)$ βρες διάνυσμα $\vec{u}$ ώστε $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{u}| = \sqrt{20}$.

ΒΘ/36. Α) Αν $\vec{\alpha} = (-3, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 5)$ βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$.

Β) Αν $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -8)$ βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

Γ) Αν $\vec{\alpha} = (3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$ βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$.

ΒΘ/37. Έστω $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$ βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$ και το $\sin\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$.

ΒΘ/38. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, για τα οποία

ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}^2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. A) Να δείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$.

B) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{w} = \lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

ΒΘ/39. Δίνονται τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, ώστε $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 22$ και $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = -24$.

A) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 4$ και $|\vec{\beta}| = 5$. B) Να βρείτε το $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$.

Γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = -24$.

Δ) Βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε τα $\vec{v} = \mu\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

ΒΘ/40. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$, $3|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 6$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -54$.

A) Να δείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 4$.

B) Να βρείτε το $3\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.

ΒΘ/41. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε το $|\vec{v}|$ καθώς και τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{v})$ και $(\vec{v}, \vec{\beta})$.

ΒΘ/42. A) Αν $A(1, 2), B(2, -1), \Gamma(3, 1)$ βρείτε τη γωνία B του τριγώνου ABΓ.

B) Όμοια αν $A(4, 3), B(1, 2), \Gamma(6, 7)$ βρείτε τη γωνία A του τριγώνου ABΓ.

ΒΘ/43. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 1)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ και

$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ και $|\vec{\gamma}| = 6\sqrt{2}$ βρείτε τα λ και μ .

ΒΘ/44. A) Αποδείξτε με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

B) Αν $A(1, 1)$, $B(3, \lambda + 2)$, $\Gamma(\lambda^2 - 2, 3)$ βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο στο A. Για τις παραπάνω τιμές του λ δείξτε ότι το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

ΒΘ/45. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$ και $\overrightarrow{GB} = (3, -3)$

A) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

B) Υπολογίστε το μήκος της διαμέσου ΑΔ.

ΒΘ/46. Αν $\overrightarrow{AG} = (1, 3)$ και $\overrightarrow{BL} = (5, -1)$ οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να υπολογίσετε το $\sin A$.

ΒΘ/47. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσους $AD, BE, \Gamma Z$ δείξτε ότι ισχύει:
 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma Z} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

ΒΘ/48. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$. Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$ τέτοιο που το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M .

ΒΘ/49. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, του οποίου οι διάμεσοι BE και ΓZ τέμνονται κάθετα. Βρείτε το $\sin A$.

ΒΘ/50. Σ' ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$ και

$\hat{A} = \frac{\pi}{6}$. Αν η γωνία των διαγωνίων του, $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι θ να δειχθεί ότι:

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

ΒΘ/51. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα, $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$.

ΒΘ/52. Αν $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma$) και στις πλευρές του $AB, A\Gamma$ πάρω αντίστοιχα τα σημεία Δ, E ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και

$AE = \frac{1}{3}A\Gamma$, να δείξετε ότι: $BE = \Gamma\Delta$.

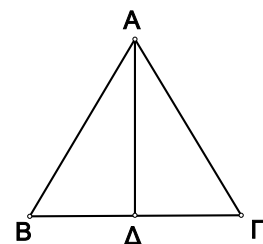
ΒΘ/53. Αποδείξτε ότι αν δύο διάμεσοι ενός τριγώνου είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΒΘ/54. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M του επιπέδου του. Αν ισχύει $\overrightarrow{\Gamma M}^2 + \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = (\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}) \cdot \overrightarrow{\Gamma M}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$.

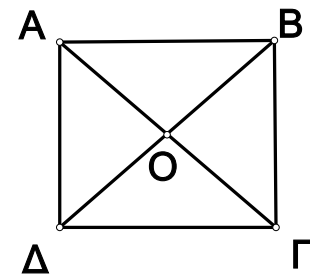
ΒΘ/55. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = B\Gamma = \Gamma A = 2$.

Αν $A\Delta$ το ύψος του υπολογίστε τα:

- A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ B) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$
 Γ) $|\overrightarrow{A\Delta}|$ Δ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$



E) $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ ΣΤ) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot (\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta})$.



ΒΘ/56. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 1 και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Υπολογίστε τα:

- A) $|\overrightarrow{A\Gamma}|$ B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$
 Γ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Δ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$
 E) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ ΣΤ) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$
 Ζ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Η) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

Ανάλυση σε συνιστώσες

ΒΘ/57. Αναλύστε το διάνυσμα $\vec{\beta} = (2, 3)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους και έτσι που η μία να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha} = (1, -2)$.

ΒΘ/58. Αναλύστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (5, 10)$ σε δυο συνιστώσες, μιας παράλληλης στο $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και μιας κάθετης προς αυτό.

ΒΘ/59. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (4, -1)$ και $\vec{u} = (-2, 6)$. Αναλύστε το $\vec{u}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$.

ΒΘ/60. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$. Αναλύστε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

ΒΘ/61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$. Να αναλυθεί το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ ώστε $\vec{\alpha}_1 \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta}$.

ΒΘ/62. Αν $\vec{\alpha} = (-2, -1)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$, να βρεθούν δύο διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ τέτοια που $\vec{\alpha} = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$, $\vec{\delta} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$.

ΒΘ/63. Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$, $\vec{\beta} = (-1, 2)$ και $\vec{\gamma} = (1, -5)$ να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες έτσι που η μια να είναι κάθετη στο $\vec{\alpha}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$.

ΒΘ/64. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{5}$, $|\vec{\beta}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$|\vec{\gamma}| = 10$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{3}$ και $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{6}$. Αναλύστε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

BΘ/65. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{2}$ και $\left(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $|\vec{\gamma}| = 8$, να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

BΘ/66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με: $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\gamma}| = 5$,

$\left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $\left(\vec{\gamma}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{6}$. Να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες

παράλληλες προς τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

BΘ/67. Α) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$, $\Gamma(-3, 4)$ και AM η διάμεσός του υπολογίστε τη γωνία $\hat{\theta} = \widehat{BAM}$.

Β) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{A\Gamma}| = 4$ και $\widehat{BAG} = 60^\circ$ και BM η διάμεσός του να βρείτε το συνθ όπου $\hat{\theta} = \widehat{ABM}$.

BΘ/68. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$:

Α) Βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Β) βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Γ) Αν $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ βρείτε τη γωνία $(\vec{u}, \vec{v})$.

Δ) Αν $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (3\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$ γράψτε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

BΘ/69. Σε επίπεδο δίνονται τα σταθερά σημεία O, A έτσι που $|\overrightarrow{OA}| = 3$.

Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}) = 7$.

BΘ/70. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

BΘ/71. Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B με $|\overrightarrow{AB}| = 4$. Βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

BΘ/72. Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B με $|\overrightarrow{AB}| = 3$. Βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 9$.

ΒΘ/73. Αν $ΑΔ$ διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$ βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $Μ$ αν ισχύει: $\overrightarrow{ΑΜ}^2 = 2 \cdot \overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΓ}$.

ΒΘ/74. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $(ΑΒ) = 6$. Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $Μ$ αν $\overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} = 7 + \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΒΓ}$.

ΒΘ/75. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,1)$ και $\vec{\beta} = (1,2)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $\vec{\gamma} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}$.

ΒΘ/76. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$, βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ώστε $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$.

ΒΘ/77. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ δείξτε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{\alpha}|$.

ΒΘ/78. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} + \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι συγγραμμικό με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ΒΘ/79. Α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$.

Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$.

Β) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

ΒΘ/80. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$:

Α) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

Β) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν: $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$.

Γ) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν τα διανύσματα $\vec{x} + \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

ΒΘ/81. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 1$, τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$

Β) Βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

Γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

ΒΘ/82. Α) Αν $\vec{u} = (3,1)$ βρείτε τα διανύσματα $\vec{v}$ ώστε $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ και $|\vec{v}| = 2$.

B) Αν $\vec{\alpha} = (1,1)$ και $\vec{\beta} = (2,-1)$ βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ ώστε $\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 5$ και $\vec{u} \cdot \vec{\beta} = 1$.

BΘ/83. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ κάθετα μη μηδενικά διανύσματα και $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ βρείτε τα $\vec{x}, \vec{y}$ ώστε: $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$, $\vec{y} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{x} - \vec{y} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

BΘ/84. Α) Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε $\vec{v} \cdot \vec{\alpha} = 3$ και $\vec{v} \cdot \vec{\beta} = 4$. (Θέστε $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta}$)

B) Αν $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{3\pi}{4}$ βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε $\vec{v} \cdot \vec{\alpha} = 4$ και $\vec{v} \cdot \vec{\beta} = -5$.

Γ) Αν $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (-1,2)$ βρες το $\vec{v}$ ώστε $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = 3$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{v} = 1$.

BΘ/85. Αν ισχύει η σχέση: $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 1 \neq 0$ να αποδειχθεί ότι $\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$ και να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$.

BΘ/86. Αν $\vec{\alpha} = (2 - |\vec{\alpha}|, |\vec{\alpha}| - 1)$ και $\vec{\alpha} \nparallel \vec{x}$:

A) Βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$.

B) Αν $\vec{\alpha} = (-3,4)$ να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\gamma} = (1,2)$.

Γ) Βρείτε τα $\vec{v}$ ώστε $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{v}| = 5$.

BΘ/87. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1}$ δείξτε ότι $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$.

BΘ/88. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$:

A) Βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

B) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν $(\vec{x} + 2\vec{\alpha}) \parallel \vec{\beta}$ και $(\vec{x} + \vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$.

Γ) Δείξτε ότι $|\vec{x} + \vec{\alpha}| = |\vec{v}|$.

BΘ/89. Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.

BΘ/90. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + \vec{\beta})$:

A) Βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

B) Αν $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$: α) βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$

β) βρείτε το $|\vec{\gamma}|$ και γ) βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

BΘ/91. Αν $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, 4)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$ με $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$ και το $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

A) Δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$.

B) Βρείτε το $\vec{\beta}$.

Γ) Αν $\vec{\beta} = (1, 2)$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \not\perp \vec{\beta}$.

Δ) Να γράψετε το $\vec{\gamma} = (3, 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

BΘ/92. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ.

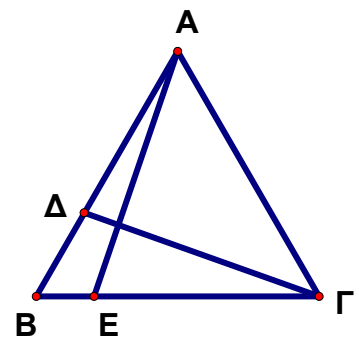
Στην πλευρά του AB παίρνουμε σημείο Δ ώστε

$A\Delta = \frac{2}{3} AB$ και στην πλευρά BΓ σημείο E ώστε

$BE = \frac{1}{5} B\Gamma$. A) Εκφράστε τα διανύσματα

$\vec{B\Gamma}, \vec{A\Delta}, \vec{E\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$.

B) Αποδείξτε ότι $\vec{AE} \perp \vec{GD}$.



BΘ/93. Αν $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda - 5)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 6)$ ώστε $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$:

A) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Αν $\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

Γ) Βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\delta} = (\kappa, \kappa - 6)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$.

BΘ/94. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (7, -1)$:

A) Βρείτε το $\vec{\beta}$.

B) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Γ) Βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta})$.

Δ) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $|\vec{x}| = \sqrt{90}$.

BΘ/95. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και

$\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$. A) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

B) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ , ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Γ) Αναλύστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

(3^ο Θ. Πανελληνίων 2000)

ΒΘ/96. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και

$$\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}. \text{ Αν } \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}. \text{ Να υπολογίσετε:}$$

Α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(2^ο θέμα Πανελληνίων 2001)

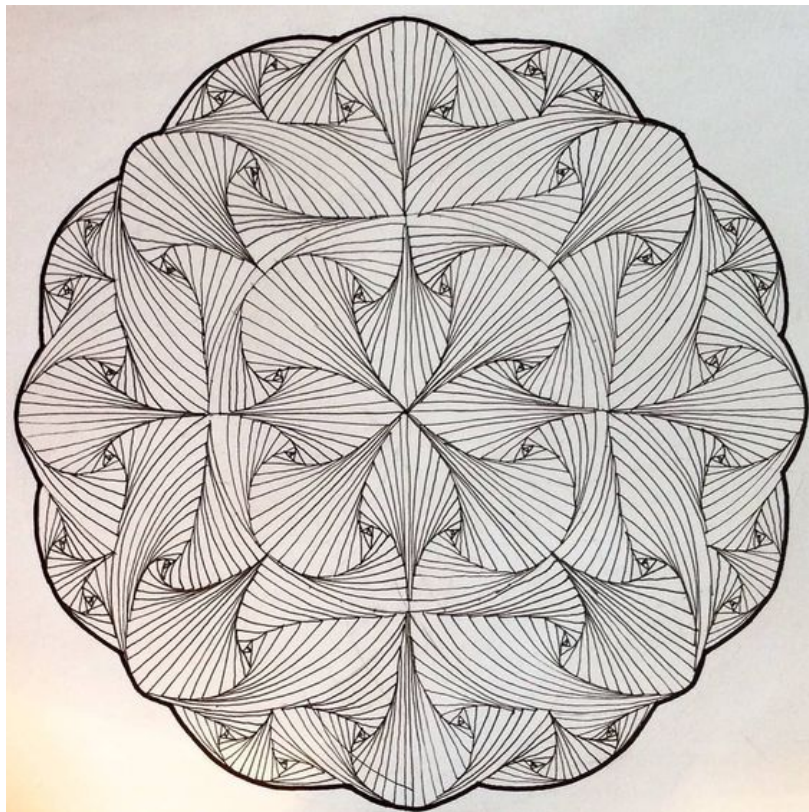
ΒΘ/97. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

Α. Βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Β. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

Γ. Βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

(2^ο θέμα Πανελληνίων 2004)



Ερωτήσεις Σ-Λ στα διανύσματα

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
2. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
3. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
4. Αν $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} / \vec{\beta}$.
5. Αν $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
6. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ είναι ίσα.
7. Αν $\vec{u} = (x_1, -y_1)$ και $\vec{v} = (-x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = -\vec{v}$.
8. Το διάνυσμα $\vec{a} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{b} = (3, -3)$.
9. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
10. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευστήσεως.
11. Αν $\vec{a} = -\vec{b}$, τότε $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) = 2\pi$.
12. Αν το $\vec{a} + \vec{b}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$, τότε το $\vec{a} + \vec{b}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{b}$.
13. Αν $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, τότε τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι πάντα συγγραμμικά.
14. Αν $\vec{\gamma} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{b}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.
15. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$.
16. Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, τότε $(\vec{a}, \vec{b})$ είναι οξεία.
17. Το $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα.
18. Το $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα.
19. Το $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\lambda \cdot \vec{\gamma})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα.
20. Το $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})$ είναι διάνυσμα.
21. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
22. Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει: $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.
23. Το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$.
24. Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$.
25. Η ισότητα $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

26. Αν $\kappa \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
27. Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του $\overline{AB}$.
28. Αν $\kappa \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε: $\kappa = \lambda = 0$.
29. Αν $\kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\kappa = \lambda = 0$.
30. Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ορίζεται τρίγωνο.
31. Αν AM διάμεσος τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}}{2}$.
32. Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του.
33. Αν $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB .
34. $\sqrt{\vec{\alpha}^2} = |\vec{\alpha}|$
35. $\vec{\alpha}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$.
36. Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$.
37. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$
38. Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
39. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) \neq \frac{\pi}{2}$.
40. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα.
41. Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευθύνσεως είναι ομόρροπα.
42. Αν $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
43. Τα ζεύγη $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $-\vec{\alpha}, -\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα.
44. Αν είναι $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.
45. Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα.
46. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
47. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
48. $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ με $\lambda > 0$.

49. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$
50. Αν $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε τα A,B,Γ είναι συνευθειακά.
51. Ισχύει: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
52. Ισχύει: $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
53. Ισχύει: Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε $AB \parallel \Gamma\Delta$
54. Τα διανύσματα $\vec{u} = (-x, y)$ και $\vec{v} = (x, -y)$ είναι παράλληλα.
55. Αν $\vec{v} = (x, 0)$, τότε $\vec{v} \parallel x'x$.
56. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.
57. Αν $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}|$ το M είναι πάντα το μέσο του AB.
58. Ισχύει: $\sqrt{\vec{\alpha}^2} = \vec{\alpha}$.
59. Το $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ είναι αριθμός.
60. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
61. $|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.
62. Αν $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$.



M. C. Escher

Ευθεία

" Όσοι δεν γνωρίζουν μαθηματικά είναι δύσκολο να νιώσουν την ουσία και την ομορφιά, τη βαθύτερη ομορφιά της φύσης "

Richard Feynman

ΒΙ/01. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε και η γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ όταν :

α) Διέρχεται από τα σημεία $A(2,-1)$ και $B(2,5)$.

β) Διέρχεται από τα σημεία $\Delta(-2,7)$ και $E(3,2)$

γ) Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, -\sqrt{3})$.

ΒΙ/02. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{3}{2}$.

ΒΙ/03. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-1,3)$.

ΒΙ/04. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\alpha : y = 2x - 1$.

ΒΙ/05. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(5,2)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/3$.

ΒΙ/06. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(4,3)$.

ΒΙ/07. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1,4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta) : y = \frac{1}{2}x + 2$.

ΒΙ/08. Δίνεται το σημείο $A(2,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 1$.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το A και:

A) είναι παράλληλη στην (ε) .

B) είναι κάθετη στην (ε) .

Γ) είναι κάθετη στον άξονα $y'y$.

Δ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$.

E) σχηματίζει με τον άξονα $y'y$ γωνία $\hat{\theta} = \frac{\pi}{6}$.

ΣΤ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

BI/09. Α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(1,2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Β) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία: $\varepsilon: x - y + 4 = 0$ με τον άξονα $x'x$.

Γ) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(4,3)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

BI/10. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(3,-2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα yy' .

BI/11. Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $A(3,2)$ και είναι κάθετη στο τμήμα AB με $B(-1,3)$.

BI/12. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι $\varepsilon: y = \frac{\lambda+3}{2}x - 1$ και $\delta: y = \frac{\lambda-1}{3}x + 4$ να είναι παράλληλες.

BI/13. Α) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon: y = \frac{\lambda-1}{3}x - 5$ και

$\delta: y = -\frac{\lambda}{2}x + 1$ να είναι κάθετες.

Β) Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\mu - 3)x + 1$ και $\varepsilon_2: y = \left(2 - \frac{\mu}{2}\right)x + \mu$, να είναι κάθετες.

BI/14. Δίνονται τα σημεία $A(-2,2)$, $B(8,12)$ και $\Gamma(-10,6)$.

Α) Να δείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .

Γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD .

Δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM .

Ε) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς AB .

BI/15. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(5,7)$.

Α) Να δείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .

Γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD .

Δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM .

Ε) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς AB .

BI/16. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-3,3)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(3,3)$. Βρείτε τις εξισώσεις των υψών του.

BI/17. Αν $A(3,-2)$, $B(4,3)$ και $\Gamma(-2,5)$ βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και της διαμέσου AM .

BI/18. Αν $\varepsilon: y = \frac{1}{3}x - 2$ βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$ και είναι κάθετη στην ε . Στην συνέχεια προσδιορίστε το σημείο τομής τους.

BI/19. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - y + 1 = 0$ και το σημείο $A(3,2)$.

Βρείτε το συμμετρικό του A με άξονα συμμετρίας την ε .

BI/20. Να βρεθεί η προβολή του σημείου $P(4,4)$ πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$. Βρείτε επίσης το συμμετρικό του P ως προς την ευθεία AB .

BI/21. Βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB με $A(-1,2)$ και $B(3,-2)$.

BI/22. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M τα οποία ισαπέχουν από τα σημεία: $A(0,2)$ και $B(2,-1)$.

BI/23. Σε τρίγωνο δίνονται οι κορυφές του $A(2,1)$ και $B(4,-1)$.

Αν το ορθόκεντρό του είναι το $H(3,5)$, να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

BI/24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2,1)$, $B(-1,-1)$ και $\Gamma(-3,2)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις του ύψους BD , της διαμέσου AM και της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$.

BI/25. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(2,5)$, $B(5,3)$ και $\Gamma(3,-1)$. Βρείτε τα μέσα των πλευρών του και τις εξισώσεις των διαμέσων του.

BI/26. Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $A(2,1)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2,-1)$. Ποιο σημείο αυτής της ευθείας είναι πλησιέστερο στο $O(0,0)$;

BI/27. Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (1,4)$. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . Βρείτε το σημείο της ευθείας ε που είναι πλησιέστερο στο σημείο $O(0,0)$.

BI/28. Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $A(-1,-3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\alpha: y = \frac{2}{3}x - 1$. Στη συνέχεια βρείτε το σημείο Σ της ευθείας που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$

ΒΙ/29. Έστω $A(-3,-1)$ και $B(2,2)$ κορυφές παραλλ/μου $AB\Gamma\Delta$ και $M(3,0)$ το σημείο τομής των διαγωνίων του . Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του παραλληλογράμμου .

ΒΙ/30. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y + 5 = 0$, είναι μεσοκάθετες των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα , να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .

ΒΙ/31. Δίνονται οι $\varepsilon_1 : x + y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 3y - 4 = 0$ ευθείες και το σημείο $A(4,3)$. Να βρεθεί σημείο B της ε_1 ώστε η ε_2 να περνά από το μέσο του AB .

ΒΙ/32. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,3)$ και έστω $3x - y + 2 = 0$ και $2x - y - 7 = 0$ οι εξισώσεις δύο υψών του τριγώνου . Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .

ΒΙ/33. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $y = -3x + 2014$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 24 τ.μ.

ΒΙ/34. Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με σημείο τομής των διαγωνίων του το $K(-4,2)$. Αν $AB : x - y - 2 = 0$ και $B\Gamma : 2x + y - 4 = 0$, βρείτε το σημείο Δ καθώς και τις εξισώσεις των $A\Delta$, $\Delta\Gamma$.

ΒΙ/35. Α) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(6,2)$ και τις εξισώσεις δύο υψών του: $\upsilon_1 : 2x + y - 4 = 0$ και $\upsilon_2 : x - y + 1 = 0$. Βρείτε τις κορυφές B , Γ .

Β) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$ και τις εξισώσεις δύο διαμέσων του: $\mu_1 : x - 3y + 1 = 0$ και $\mu_2 : y = 1$. Βρείτε τις κορυφές B , Γ .

ΒΙ/36 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $K(4,4)$ είναι το μέσο της AB , $A\Delta : x - 2y + 2 = 0$ το ύψος του και $AM : 4x - y + 8 = 0$ η διάμεσός του. Βρείτε τις συντεταγμένες του A , του B , την εξίσωση της $B\Gamma$ και τις συντεταγμένες των M και Γ .

ΒΙ/37. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1,3)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

ΒΙ/38. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 2x - 3y + 6 = 0$.Βρείτε την συμμετρική της ευθεία ως προς τον άξονα $x'x$, ως προς τον άξονα yy' και ως προς το $O(0,0)$.

ΒΙ/39. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + y\sqrt{3} + 1 = 0$. Βρείτε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$, καθώς και την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες.

ΒΙ/40. Α) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες :

$$\varepsilon : x - 7y + 2 = 0 \text{ και } \eta : 3x + 4y - 1 = 0.$$

Β) Όμοια για τις ευθείες: $\varepsilon_1 : x - 3y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x - 2y + 5 = 0$

Γ) Όμοια για τις : $\varepsilon_1 : (\mu + 1)x + y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\mu + 2)x - \mu y - 7 = 0$

Δ) Όμοια για τις : $\varepsilon_1 : 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0$ και

$$\varepsilon_2 : (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 2\mu = 0.$$

Ε) Όμοια για τις : $\varepsilon_1 : y = \mu x + 1$ και $\varepsilon_2 : (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - 2 = 0$

ΒΙ/41. Α) Δίνονται οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $y = -x - 3$. Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$ και τέμνει αυτές στα Α και Β, ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

Β) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + 2y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x - y + 1 = 0$. Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(2, 1)$ και τέμνει αυτές στα Α και Β, ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{MB}$.

ΒΙ/42. Αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = (2\lambda - 3)x + 3\lambda - 1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° :

Α) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Β) Βρείτε τα σημεία που η (ε) τέμνει τους άξονες καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται.

Γ) Βρείτε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) που να διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

Ασκήσεις μεταβλητού σημείου

ΒΙ/43. Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $M(\lambda - 1, 2\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Β) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $M\left(2 - t, \frac{1 + 2t}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Γ) Όμοια για το σημείο $N\left(\frac{3\alpha - 1}{2}, \frac{1 - 2\beta}{3}\right)$ αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha + 2\beta = 1$.

Δ) Όμοια για το $P(2 + \eta\mu^2\theta, 3 - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Ε) Όμοια για το $\Sigma\left(\frac{4 + \eta\mu^2\theta}{2}, \frac{2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta}{2}\right)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

ΣΤ) Όμοια για το $M\left(2\sigma\nu^2\theta, \frac{3-\sigma\nu^2\theta}{2}\right)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

BI/44. Αν το σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): x - y + 2 = 0$ βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $M(2\alpha - 3, \beta + 2)$.

Ποιό σημείο του γεωμετρικού τόπου είναι πλησιέστερο στο $\Sigma(1,1)$;

BI/45. Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $M(\lambda - 1, 2\lambda)$, $\lambda \geq 0$.

Β) Όμοια για το σημείο $N(3\lambda, 2)$ αν $0 \leq \lambda \leq 6$.

Γ) Όμοια για το $P(1, \lambda^2 + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ) Όμοια για το $\Sigma(\eta\mu\lambda, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

BI/46. Αν $P(\lambda - 2, \mu + 2)$ και $\Sigma(\mu, \lambda)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, δύο σημεία:

Α) δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του μέσου M του PS είναι ευθεία έστω ε .

Β) αποδείξτε ότι $PS \perp \varepsilon$.

BI/47. Αν $A(\lambda - 1, 2)$, $B(2\lambda - 3, \lambda + 1)$, $\Gamma(3\lambda, 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων M αν $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$.

BI/48. Α) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,3)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(3\lambda - 1, 4\lambda - 1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. α) Δείξτε ότι $\lambda \neq 2$, βρείτε το σημείο G αν $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ (βαρύκεντρο του τριγώνου) και δείξτε ότι το G κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Β) Δίνονται τα σημεία $A(-\lambda, 2)$, $B(-1, \lambda)$, $\Gamma(\lambda, 3\lambda)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

α) Τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε λ .

β) Βρείτε το σημείο G αν $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ (βαρύκεντρο) και να αποδείξετε ότι κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

BI/49. Α) Αν το σημείο A κινείται στην ευθεία $\delta: x - 2y + 3 = 0$ και $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$ με $B(2,1)$, βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M .

Β) Αν το σημείο A κινείται στην ευθεία $\delta: 3x - y - 1 = 0$ και $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ με $B(1,2)$, βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M .

BI/50. Α) Αν $A(1,2)$ και το σημείο P κινείται στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y - 1 = 0$ και M το μέσο του AP , βρείτε το γεωμ. τόπο του P .

Β) Αν $AB\Gamma$ τρίγωνο με $B(1,1)$, $\Gamma(3,5)$ και $A(2\kappa - 1, \kappa + 2)$.

i) Βρείτε το γεωμ. τόπο του A .

ii) Αν M το μέσο του $B\Gamma$ βρείτε το γεωμ. τόπο του βαρύκεντρου G του $AB\Gamma$. (Ισχύει: $\overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$).

Γ) Αν το σημείο P κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 3 = 0$ και $A(1, -1)$ βρείτε το γεωμ. τόπο του M αν $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$.

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

BI/51. Θεωρώ την εξίσωση $\mu(x + y) + 2(\mu - x) + 3y - 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε τα $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ) Βρείτε τα $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

Δ) Βρείτε τα $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να διέρχεται από το $O(0, 0)$.

E) Βρείτε τα $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να είναι κάθετη στην $(\eta): x - 2y - 1 = 0$.

BI/52. Δίνεται η εξίσωση $(\varepsilon): (\mu^2 - 1)x + (\mu^2 - 3\mu + 2)y + \mu - 5 = 0$.

A) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

BI/53. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon: (\mu - 3)x + (\mu + 1)y + 2 = 0$ και $\zeta: (\mu - 1)x - (2\mu - 1)y + \mu = 0$ αντίστοιχα.

A) Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$.

B) Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ε και ζ να είναι παράλληλες.

BI/54. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: (\mu - 1)x + (\mu - 4)y + 3 = 0$ και $\delta: (\mu - 2)x + (3\mu - 7)y + 2\mu = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

A) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε τις τιμές του μ , ώστε οι ευθείες αυτές να είναι κάθετες.

BI/55. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 3)x + (3\lambda - 3)y - (2\lambda + 3) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδειχθεί ότι παριστάνει ευθεία για κάθε λ .

B) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο.

BI/56. Δίνεται η εξίσωση $3x + 2y + 7 + \lambda(x - 2y + 5) = 0$.

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

BI/57. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda + 1)x + (\lambda^2 - \lambda + 1)y - \lambda^2 - 2\lambda = 0$.

- A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 B) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.
 Γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση την παραπάνω, να είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x + 4y + 3 = 0$.

BI/58. Δίνεται η $(\alpha^2 - 2\alpha + 3)x + (\alpha^2 + \alpha + 2)y + 3\alpha - 1 = 0$. Δείξτε ότι:

- A) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία.
 B) Τέμνει τους άξονες για κάθε α , και
 Γ) Όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το ίδιο σημείο.

BI/59 Δίνεται η εξίσωση $(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- A) Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε λ
 B) Δείξτε επίσης ότι η ευθεία με την παραπάνω εξίσωση διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

BI/60. Αν $\varepsilon: (\lambda^2 + 2\lambda + 2)x + (2\lambda^2 + 3\lambda + 3)y - 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

- A) Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.
 B) Δείξτε ότι για κάθε λ η ευθεία τέμνει την $\varepsilon': 2x + y - 5 = 0$.

BI/61. Δείξτε ότι η $(\lambda^2 - \lambda - 2)x + (\lambda^2 + 2\lambda - 3)y + \lambda^2 - 9 = 0$ είναι μια εξίσωση που παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

BI/62. Δείξτε ότι η $(\kappa - 1)x + (\lambda^2 - \kappa\lambda + 1)y + \kappa - 2 = 0$ είναι μια εξίσωση που παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το $O(0,0)$ και να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

BI/63. Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon_\lambda: 2x + y - 2 + \lambda(x - y + 5) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- A) Αποδείξτε ότι η παραπάνω παριστάνει ευθεία για κάθε λ και οι ευθείες ε_λ διέρχονται από σταθερό σημείο.
 B) Βρείτε ποια από τις παραπάνω είναι κάθετη στην $\varepsilon: x + 2y - 4 = 0$.

BI/64. Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon_\lambda: (\lambda - 3)x + \lambda y - 2\lambda + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- A) Αποδείξτε ότι η παραπάνω παριστάνει ευθεία για κάθε λ και οι ευθείες ε_λ διέρχονται από σταθερό σημείο.

B) Βρείτε ποια από τις παραπάνω απέχει από το $M(0,2)$ απόσταση $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

BI/65. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda + 1)x + 2\lambda y = 2\lambda$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = 3$.
Αποδείξτε ότι : Α) Οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο P για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Το σημείο P κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

BI/66. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : \lambda x + (2 - \lambda)y - 1 = 0$,
 $(\varepsilon_2) : (\lambda - 1)x + (\lambda + 3)y - 14 = 0$ και $(\varepsilon_3) : \mu x + (\mu - 1)y - 4 = 0$.

A) Αν οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες, βρείτε το λ .

B) Αν οι (ε_1) , (ε_2) , (ε_3) διέρχονται από το ίδιο σημείο, βρείτε το μ .

Γ) Για τις παραπάνω τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι (ε_1) και (ε_3) .

BI/67. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει:

A) $x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 3y + 2 = 0$ B) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

Γ) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 = 0$ Δ) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2 = 0$

BI/68. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες.

BI/69. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ τέτοια που $y^2 - 2kxy - x^2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

BI/70. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

BI/71. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες.

BI/72. Δείξτε ότι η εξίσωση $6x^2 - xy - y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες και βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

BI/73. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - xy - 6y^2 - 3x + 14y - 4 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες και βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

BI/74. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες και να βρείτε την οξεία γωνία που αυτές σχηματίζουν.

BI/75.Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου τομής των ευθειών:

$\varepsilon: 2x - y + \alpha = 0$ και $\delta: x - y + 2\alpha - 1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ποιο σημείο αυτής της ευθείας απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$;

BI/76.Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 2\alpha x + 4\alpha y - 3\alpha^2 = 0$ παριστάνει δύο κάθετες ευθείες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε επίσης ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία.

BI/77.Δίνονται οι $(\varepsilon): \lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda - 1$ και $(\eta): (\lambda + 2)x + \lambda y = \lambda$.

Να δείξετε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Βρείτε επίσης το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής τους.

Απόσταση σημείου από ευθεία

BI/78.Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(1,3)$ από την ευθεία $3x - 4y - 11 = 0$.

BI/79.Να βρεθούν οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1,2)$ και απέχουν από το σημείο $B(3,1)$ απόσταση $d = 2$.

BI/80.Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $3x - 4y + 5 = 0$ και απέχουν από το σημείο $A(2,3)$ απόσταση $d = 3$.

BI/81.Βρείτε τα σημεία της ευθείας $(\eta): x + y - 2 = 0$ που απέχουν από την ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y - 10 = 0$ απόσταση 2.

BI/82.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P(0,1)$ και από την οποία ισαπέχουν τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,1)$.

BI/83.Βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών $(\varepsilon): x + 2y - 6 = 0$ και $(\eta): x + 2y + 17 = 0$.

BI/84.A)Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $3x - y + 7 = 0$ και $3x - y - 3 = 0$.

B) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών: $\varepsilon_1: x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - 4y + 3 = 0$.

BI/85.A) Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon): 3x + 4y - 1 = 0$ και $(\eta): 5x - 12y + 1 = 0$.

B) Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon): x + 2y - 5 = 0$ και $(\eta): 2x + y - 7 = 0$. Ποια είναι η διχοτόμος της

οξείας γωνίας; (Πάρτε ένα σημείο σε μια από τις πλευρές και υπολογίστε την απόστασή του από τις διχοτόμους. Η μικρότερη απόσταση αντιστοιχεί στη διχοτόμο της οξείας γωνίας)

ΒΙ/86. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 2y - 4 = 0$ και το σημείο $A(4,1)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα yy' που ισαπέχει από το A και την ε .

Εμβαδόν τριγώνου

ΒΙ/87. Α) Αν $A(3,4)$, $B(0,1)$, $\Gamma(4,2)$ βρείτε το $E_{AB\Gamma}$.

Β) Αν $A(x,0)$, $B(1,2)$, $\Gamma(4,3)$ βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε $E_{AB\Gamma} = \frac{3}{2}$.

ΒΙ/88. Σ' ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A(2,3)$, $B(5,4)$ και $\Delta(-4,-1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

ΒΙ/89. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(8,3)$, $B(6,-1)$ και $\Gamma(-3,1)$.

Α) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Β) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, όπου $\Delta(-2,-1)$.

Γ) Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ABM να έχει εμβαδόν 7 τ.μ.

ΒΙ/90. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(1,1)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(\lambda-1, \lambda^2+1)$.

Α) Αποδείξτε ότι τα A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $(AB\Gamma) = 6$.

ΒΙ/91. Βρείτε ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και με τους δύο άξονες τρίγωνο εμβαδού 2 τ.μον.

ΒΙ/92. Βρείτε ευθεία παράλληλη στην $\eta : 2x + y + 2 = 0$ που να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4 τ. μον.

ΒΙ/93. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(1,3)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2 τ.μ..

ΒΙ/94. Δίνεται το σημείο $A(1,2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση $d = 1$.

ΒΙ/95. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(t-2)x - (1+2t)y + 2 - t = 0$ παριστάνει ευθεία (ε) για κάθε $t \in \mathbb{R}$ που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο. Για ποια τιμή του t η απόσταση του σημείου $M(2,2)$ από την (ε) είναι 2 μονάδες;

ΒΙ/96. Δίνεται η εξίσωση $y^2 + 4x^2 - 4xy - 2y + 4x - 3 = 0$. Δείξτε ότι παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και βρείτε την απόστασή τους.

ΒΙ/97. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy + kx - ky = 0$, $k \in \mathbb{R}$

A) Δείξτε ότι παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και βρείτε την απόστασή τους.

B) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ αν οι δύο ευθείες απέχουν απόσταση $2\sqrt{2}$.

Γ) Αν $k = 4$ βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των δύο ευθειών.

ΒΙ/98. Βρες τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $(\varepsilon): 2\mu x + y + \lambda = 0$ και $(\eta): \lambda x + y - 3 = 0$ να είναι παράλληλες και να έχουν απόσταση $\sqrt{5}$.

ΒΙ/99. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 4\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda^2 = 0$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει δύο κάθετες ευθείες.

B) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου τομής τους.

ΒΙ/100. Να βρεθεί ευθεία ε που περνά από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με την ευθεία $x + y = 3$ και τον xy τρίγωνο εμβαδού 9 τ.μ. .

ΒΙ/101. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου έχουν εξισώσεις $5x - 12y - 65 = 0$ και $5x - 12y + 26 = 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

ΒΙ/102. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $B(7,4)$ και $\Gamma(5,1)$.

Αν $A(2\kappa - 3, 3\kappa + 1)$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του A .

Κατόπιν ναδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό.

ΒΙ/103. Αν $A(t, 2t + 3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(3,5)$ βρες το γ. τόπο του A και δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

ΒΙ/104. Αν $A(1,1)$, $B(3, t + 4)$, $\Gamma(t + 2, 2t)$ και $\Delta(t, t - 3)$ να αποδειχθεί ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Βρείτε επίσης το $t \in \mathbb{R}$ ώστε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ να ισούται με 15 τ.μον..

ΒΙ/105. A) Αν $B(2,3)$, $\Gamma(3,5)$ και το σημείο A κινείται στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 4 = 0$ δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγ. $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

B) Αν $B(1,1)$ και $\Gamma(5,2)$, βρείτε σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι 6 τ.μον..

ΒΙ/106. Αν $AB\Gamma$ τρίγωνο με $B(1,1)$, $\Gamma(5,3)$ και $(AB\Gamma) = 4$ τ. μον. Βρείτε το γεωμ. τόπο του A .

ΒΙ/107. Δίνονται οι ευθείες $2x - y - 6 + k(x - y - 4) = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Ναδειχθεί ότι καμία από τις ευθείες της οικογένειας δεν απέχει από το σημείο $P(3,-1)$ απόσταση ίση με 3.

ΒΙ/108. A) Βρείτε το σημείο της ευθείας $\varepsilon: x + y + 3 = 0$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $O(0,0)$.

B) Βρείτε το σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x - y - 1 = 0$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $A(2,1)$.

BI/109. Δίνεται ορθογώνιο $OAB\Gamma$ με $O(0,0)$, $A(t+2, 0)$, $\Gamma(0,t)$ με $t \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η κάθετος που φέρουμε από το B προς την $A\Gamma$ περνά από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του $t \in \mathbb{R}$.

BI/110. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας φωτεινός φάρος Φ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2)$, $\Lambda(-1,5)$, $M(1,3)$. Βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K , Λ , M .

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το M .

δ) Υπολογίστε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M . **(4^ο θέμα Πανελλαδικές 2000)**



M.C. Escher

Κύκλος

"ένας παράγοντας που μένει σταθερός παρ' όλες τις καμπές της ιστορίας της φυσικής επιστήμης είναι η αποφασιστική σημασία της μαθηματικής φαντασίας". Freeman Dyson

BK/01.α) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στο $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$.

β) Όμοια για τον κύκλο με κέντρο το $K(-1,3)$ που διέρχεται από το σημείο $B(2,7)$.

BK/02. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο AB , με $A(1,2)$ και $B(3,4)$.

BK/03.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο AB , με $A(-2,-4)$ και $B(4,2)$.

BK/04.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στον άξονα x' και διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $\Gamma(2,2)$.

BK/05.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$ και διέρχεται από τα σημεία $A(2,3), B(2,5)$.

BK/06.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(4,1)$ και $B(2,-3)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία: $\varepsilon: x + y + 1 = 0$.

BK/07.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που διέρχεται από τα σημεία $A(3,1), B(-1,3)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία: $\varepsilon: 3x - y - 2 = 0$.

BK/08.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(2,3)$.

BK/09.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(1,0)$, $\Gamma(1,4)$.

BK/10.Βρείτε τον κύκλο με κέντρο το $K(1,0)$ που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 3 = 0$.

BK/11.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στο σημείο $K(2,3)$ και εφάπτεται στην ευθεία: $\varepsilon: 4x - 3y + 11 = 0$.

BK/12.Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στο σημείο $K(1,-1)$ και εφάπτεται στην ευθεία: $\varepsilon: 5x - 12y + 9 = 0$.

BK/13.Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(3,-4)$, όταν:

A) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B) Εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 6x + 8y - 4 = 0$.

Γ) Εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Δ) Εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

BK/14. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ και εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): y = x$.

BK/15. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y + 10 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y - 30 = 0$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $(\zeta): y = -2x$.

BK/16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2x - y + 3 = 0$ και $\alpha: 2x - y - 1 = 0$.

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ε και α και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $x = 1$.

BK/17. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2x - 3y - 10 = 0$ και

$\alpha: 3x - 2y + 5 = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ε και α και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $\delta: y = x + 1$.

BK/18. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες και διέρχεται από το σημείο $A(4, 2)$.

BK/19. Α) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες και διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$.

Β) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και περνά από τα σημεία $\Sigma(2, 1)$ και $P(2, 5)$.

Γ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και περνά από τα σημεία $A(-2, -9)$ και $B(5, -2)$.

BK/20. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(4, 1)$ και $B(11, 8)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

BK/21. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις δύο παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + y + 15 = 0$ και της μιας από αυτές στο σημείο $A(2, 1)$.

BK/22. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(3, 3)$ που αποτέμνει από την ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 7 = 0$ χορδή μήκους 4.

BK/23. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 64$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P(5\sqrt{2}, 0)$ και αποκόπτει από τον κύκλο χορδή μήκους $2\sqrt{15}$.

BK/24. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 9$ και το σημείο $A(1,2)$. Βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου η οποία έχει ως μέσο το σημείο A .

BK/25. Βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των παρακάτω κύκλων:

α) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

β) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y - 1 = 0$

Γενική μορφή εξίσωσης κύκλου.

BK/26. Προσδιορίστε ποια από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει κύκλο, του οποίου βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

α) $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$

β) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

γ) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 1 = 0$

δ) $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 6\beta y + 8\beta^2 + \alpha^2 = 0$.

BK/27. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x + y + \lambda(x + y + 3) = 0$. Δείξτε ότι: Α) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο.

Β) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου του.

β) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος αυτός διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

BK/28. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$

παριστάνει κύκλο ο οποίος μάλιστα διέρχεται από δύο σταθερά σημεία. Βρείτε επίσης το γεωμ. τόπο του κέντρου του κύκλου.

BK/29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2y + 4\lambda(1 - x) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω παριστάνει κύκλο.

β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους σε σταθερό σημείο.

BK/30. Θεωρώ την εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 2\lambda y + \frac{9\lambda^2}{2} - \lambda - \frac{1}{2} = 0$.

Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Βρείτε επίσης το γεωμ. τόπο των κέντρων των κύκλων για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

BK/31. Αν $C_k : x^2 + y^2 + 2x - 4 + k(x^2 + y^2 - 2y) = 0$ $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ να

δειχθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που περνά από σταθερά σημεία.

BK/32. Έστω $C_1 : x^2 + y^2 - 2kx + (k + 2)y + 1 = 0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να δειχθεί ότι τα κέντρα των κύκλων αυτών ανήκουν σε γνωστές ημιευθείες.

Γεωμετρικοί τόποι

BK/41. Αν $M(1+2\sigma\upsilon\nu\theta, 3-2\eta\mu\theta)$, βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M όταν $\theta \in \mathbb{R}$. Όμοια για τα: $N\left(\frac{1+2\eta\mu\theta}{3}, \frac{3-2\sigma\upsilon\nu\theta}{3}\right)$, $P(2-3\eta\mu\varphi, 1+3\sigma\upsilon\nu\varphi)$ και $\Sigma(2\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta)$.

BK/42. Α) Βρείτε τον γεωμ. τόπο των σημείων $M(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1, 2\eta\mu\theta + 2)$ του επιπέδου, καθώς το θ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Β) Αν το σημείο $A(\kappa, \lambda)$ κινείται στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 9$, να αποδείξετε ότι και το σημείο $B\left(\frac{\kappa+4}{2}, \frac{\lambda-6}{2}\right)$ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ) Αν το σημείο N κινείται στο μοναδιαίο κύκλο να βρείτε που κινείται το σημείο $M(x, y)$ για το οποίο ισχύει ότι $\overrightarrow{OM} = 2 \cdot \overrightarrow{ON}$.

BK/43. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $A(1, 0)$ είναι ίσο με το εξαπλάσιο της απόστασης από την ευθεία: $y = 1$.

BK/44. Α) Αν $A(-1, -1)$ και $B(2, 3)$ βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M αν $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$.

Β) Αν $A(-1, -2)$ και $B(2, 4)$ βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M αν $|\overrightarrow{BM}| = 2|\overrightarrow{AM}|$.

Γ) Αν $A(1, -2)$ και $B(-3, 4)$ βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M αν $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}^2$.

BK/45. Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(3, 1)$.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία:

$$\alpha) 3|\overrightarrow{MA}|^2 - 2|\overrightarrow{MB}|^2 = 6 \qquad \beta) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$$

Εφαπτόμενες κύκλου

BK/46. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $A(1, 1)$.

BK/47. Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ στο σημείο του $M(3, 2)$.

BK/48. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 9$ και η ευθεία $\varepsilon : y = 2x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία ε να εφάπτεται στον κύκλο.

BK/49. Α) Βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ που διέρχονται από το σημείο $A(4,1)$.

Β) Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου, η οποία διέρχεται από το σημείο $P(-4,4)$.

BK/50. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη της ευθείας $\delta : 2x - y + 5 = 0$.

BK/51. Α) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta : 3x - 4y + 1 = 0$.

Β) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta : x + y - 2 = 0$.

BK/52. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι κάθετη στην ευθεία $\delta : x - 2y + 2 = 0$.

BK/53. Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\delta : x - y + 1 = 0$.

BK/54. Α) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου

$C : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Β) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

BK/55. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε:

Α) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του $M(3,\lambda)$, $\lambda < 0$.

Β) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία $(\varepsilon) : 4x - 3y - 2018 = 0$.

Γ) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $K(5,10)$.

BK/56. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι: Α) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο.

Β) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου του κύκλου.

Γ) Για $\lambda = 0$ βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου που είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: y = x + 1$.

Δ) Αν $\lambda = 0$ και $M(x_0, y_0)$ σημείο του κύκλου βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $\Sigma(x_0 - 2, y_0 + 1)$.

BK/57. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x + \alpha y + 1 = 0$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\delta: 3x + 4y - 5 = 0$ να εφάπτεται του κύκλου.

BK/58. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο $M(4, 2)$. Βρείτε:

α) Τη θέση του M ως προς τον κύκλο

β) οι εξισώσεις των εφαπτομένων από το M προς τον κύκλο

γ) τη γωνία των εφαπτομένων. (Υπόδειξη: Απόδειξε ότι είναι κάθετες)

BK/59. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου:

$C: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$ που φέρονται από το σημείο: $P(-1, 3)$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν.

BK/60. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 9$ και το εξωτερικό του σημείο $P(2, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων από το P στον κύκλο.

BK/61. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το εξωτερικό του σημείο $P(4, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων από το P στον κύκλο.

BK/62. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x_0, y_0)$ των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $O(0, 0)$ είναι ίσο με την απόστασή τους από την ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y - 10 = 0$.

BK/63. Αν το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στον κύκλο: $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου: $N(x_0 - 1, y_0 + 2)$.

BK/64. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 16$ και το σημείο $P(-4, -2)$. Αν Σ τυχαίο σημείο του κύκλου, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M του τμήματος $P\Sigma$.

BK/65. Αν το σημείο Σ κινείται στον κύκλο $C : x^2 + y^2 - 6x = 0$,

βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$,

όπου $O(0,0)$.

BK/66. Ευθεία ε περνά από την αρχή των αξόνων. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των προβολών M του σημείου $A(3,4)$ στην ε .

BK/67. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 25$. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος του μέσου των χορδών AB με $A(3,4)$.

BK/68. Προσδιορίστε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 16$ που διέρχονται από το σημείο $\Sigma(2,2)$.

BK/69. Βρείτε το γεωμ. τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 4x = 0$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

BK/70. Δείξτε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$\varepsilon_1 : 2\lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda + 2 \text{ και } \varepsilon_2 : (-\lambda + 1)x + 2\lambda y = 3\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{R},$$

ανήκει σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

(Υπόδ.: Διατυπώστε τις εξισώσεις για το κοινό σημείο M και λύστε τις ως προς λ)

BK/71. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (k + 1)x - (k - 1)y = 4k + 1$ και

$\varepsilon_2 : 2x - 2ky = 3k + 1, k \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους.

BK/72. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, 2 - \alpha)$ με $\alpha > 0$.

Αν $O(0,0)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο OAB κύκλου και να αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο, διαφορετικό της αρχής των αξόνων για κάθε α .

BK/73. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, -1), B(3, 3)$ και

$\Gamma(\lambda - 1, 2\lambda - 3), \lambda \in \mathbb{R}$. Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου Γ .

Β) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του λ .

Γ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την πλευρά AB .

Δ) Βρείτε την εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου στο σημείο του A .

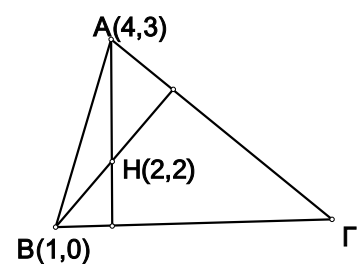
BK/74. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4, 3)$

$B(1, 0)$ και ορθόκεντρο $H(2, 2)$.

Α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

Β) Βρείτε την απόσταση $d(H, B\Gamma)$.

Γ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει



κέντρο το Η και εφάπτεται στη ΒΓ.

Δ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΗΒ.

BK/75.A) Δίνεται ο κύκλος $C : (x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$. Βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από το σημείο $O(0,0)$.

B) Όμοια για τον κύκλο $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$.

BK/76.A) Βρείτε τα σημεία του κύκλου: $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από το $O(0,0)$.

B) Βρείτε τα σημεία του κύκλου: $C : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από το $A(2,1)$.

Γ) Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο: $C : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$, και το Ν στην ευθεία $\varepsilon : x + y - 3 = 0$ βρείτε τα σημεία για τα οποία η απόσταση ΜΝ να είναι ελάχιστη.

BK/77.A) Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο

$C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$ και το σημείο Ν στην ευθεία $\varepsilon : x + y + 5 = 0$, βρείτε τα Μ, Ν ώστε το $|\overrightarrow{MN}|$ να είναι ελάχιστο.

B) Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο: $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ και το Ν στην ευθεία: $\varepsilon : x + y + 3 = 0$ βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|\overrightarrow{MN}|$ και τα σημεία Μ, Ν όπου το $|\overrightarrow{MN}|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

Γ) Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο: $C_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ και το Ν στον κύκλο: $C_2 : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$, βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|\overrightarrow{MN}|$.

Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου

BK/78. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση ανήκουν σε μια ευθεία για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ) Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω κύκλους έχουν ακτίνα ίση με 4.

BK/79. Θεωρούμε ένα πληθυσμό από 2004 κινητά σημεία. Κάθε κινητό χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 2004$ και κινείται πάνω στο

καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 2 + 2n(x - 2y + 1). \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Η τροχιά κάθε κινητού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του.

β) Τα κέντρα των τροχιών των κινητών βρίσκονται πάνω σε μια σταθερή ευθεία.

γ) Κατά την κίνησή τους όλα τα κινητά διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B . Ποια είναι η εξίσωση της AB ;

BK/80. Θεωρώ την εξίσωση

$$C: x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2(\lambda + 1)y + 2\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

A) Δείξτε ότι είναι εξίσωση κύκλου, σταθερής ακτίνας, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Αποδείξτε ότι το κέντρο του κύκλου κινείται σε μια ευθεία καθώς το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$. (Δηλαδή βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου)

Γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

Δ) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται δύο σταθερών ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τις οποίες να προσδιορίσετε.

BK/81. Θεωρώ τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ και την ευθεία

$$\varepsilon: 2x + 3y - 2 = 0 \text{ που τέμνονται στα σημεία } A, B.$$

A) Δείξτε ότι η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2x + \lambda(2x + 3y - 2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι κύκλος και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

B) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου καθώς το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

Γ) Δείξτε ότι ο δεύτερος κύκλος διέρχεται από τα σημεία A, B .

BK/82. Θεωρώ τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0$ και την ευθεία

$$\varepsilon: 3x + 2y + 1 = 0 \text{ που τέμνονται στα σημεία } A, B.$$

A) Δείξτε ότι η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 + \lambda(3x + 2y + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι κύκλος και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

B) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου καθώς το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

Γ) Δείξτε ότι ο δεύτερος κύκλος διέρχεται από τα σημεία A, B .

BK/83. A) Δείξτε ότι η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - \lambda^2 - \lambda + 3 = 0$

παριστάνει οικογένεια ομόκεντρων κύκλων.

B) Βρείτε από τους παραπάνω, τον κύκλο C που εφάπτεται στην ευθεία: $\delta: x - y + 1 = 0$.

Γ) Βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του C που είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta: x + y - 3 = 0$.

Δ) Βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

BK/84. Δείξτε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$(\varepsilon): x + y - \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0 \text{ και } (\eta): 2x - y - 2\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 4 = 0,$$

$\theta \in \mathbb{R}$, κινείται σε κύκλο ο οποίος και να βρεθεί.

BK/85. Θεωρώ την οικογένεια ευθειών $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων M από τα οποία διέρχεται μία ακριβώς ευθεία από τις παραπάνω.

BK/86. Θεωρώ την εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ακτίνα του να είναι 2.

Γ) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το κέντρο του να ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 5x + 3y + 1 = 0$.

Δ) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε ο κύκλος να διέρχεται από το $O(0,0)$.

BK/87. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2 + \lambda(2x + y - 3) = 0$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου.

Δ) Δείξτε ότι ο κύκλος διέρχεται από δυο σταθερά σημεία.

E) Βρείτε το λ ώστε ο κύκλος να διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

BK/88. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + \lambda(x + y - 2) = 0$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου.

Δ) Δείξτε ότι ο κύκλος διέρχεται από δυο σταθερά σημεία.

E) Βρείτε το λ ώστε ο κύκλος να διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.

Για $\lambda=2$:

ΣΤ) Γράψτε την εξίσωση του κύκλου, βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του καθώς και τις εφπτόμενές του που είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta: x + 2y + 3 = 0$.

Z) Αν το $\Sigma(\alpha, \beta)$ ανήκει στον κύκλο βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $P(2\alpha - 1, \beta + 1)$.

BK/89. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda(-2x + 4y + \lambda) = 0$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

B) Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ) Βρείτε το γεωμ. τόπο του κέντρου.

Δ) Βρείτε το λ ώστε ο κύκλος να διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

Για $\lambda=1$:

Ε) Γράψτε την εξίσωση του κύκλου, βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του καθώς και τις εφπτόμενές του που είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta: 3x - 4y + 1 = 0$.

ΣΤ) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/4$.

Ζ) Αν το $P(x_0, y_0)$ ανήκει στον κύκλο βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $\Sigma(x_0 + 1, y_0 - 3)$.

BK/90. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια . Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$. Να αποδείξετε ότι :

α) Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

β) Κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους) . Ποιες είναι οι συντεταγμένες του A ;

γ) Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A (Πανελλαδικές 1999)

BK/91. Α. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός . Να δείξετε ότι για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Β. Έστω ότι για τους πραγμ. αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι ,όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ, λ ,έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι , ώστε αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB . (4^ο θέμα Πανελλαδικών 2001)

BK/92. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο , του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα .

B. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1, 2)$.

Γ. Δείξτε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

(4^ο θέμα Πανελλαδικών 2002)

BK/93. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

B. Εάν $\lambda = 1$ να βρείτε :

α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την κορυφή $A(1, 5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.

(3^ο θέμα Πανελλαδικών 2003)

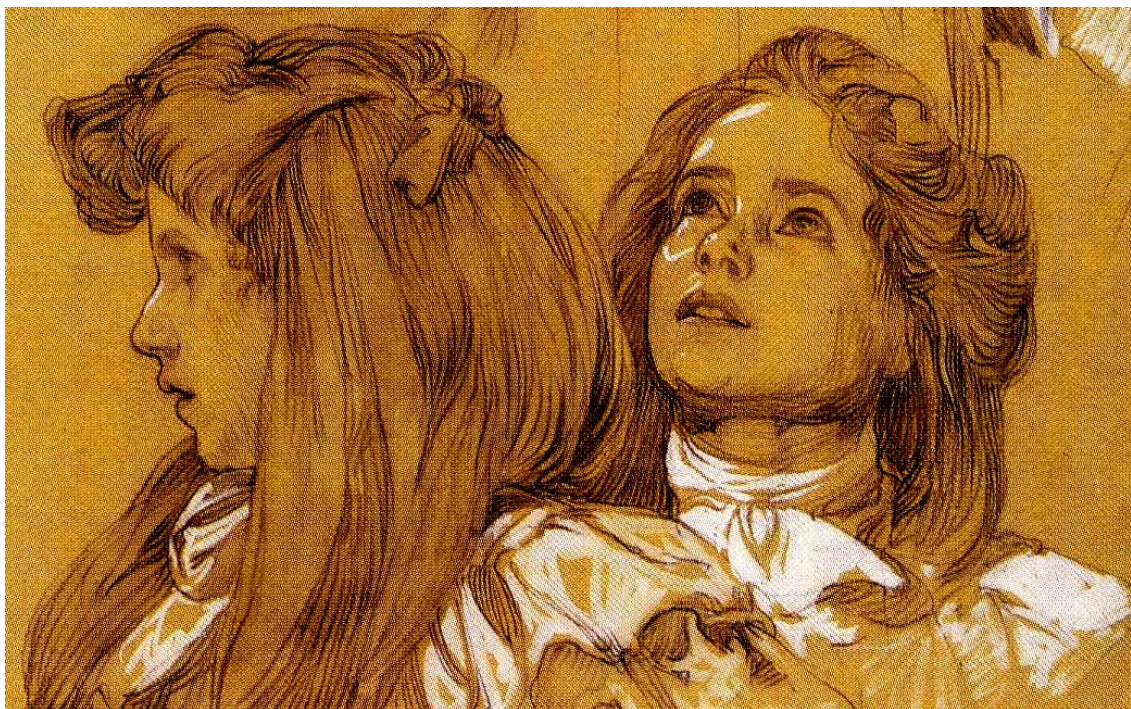
BK/94. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + 4y + 16 = 0$.

A: Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2

B. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτεi από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

(4^ο θέμα Πανελλαδικών 2004)



Σχέδιο του Alfons Mucha

Παραβολή

"Δεν μπορείς να ξεφύγεις από την αίσθηση πως αυτές οι μαθηματικές φόρμουλες έχουν από μόνες τους μια ανεξάρτητη ύπαρξη και μια ευφυΐα, πως είναι σοφότερες από μας, σοφότερες ακόμη από αυτούς που τις ανακάλυψαν, πως παίρνουμε περισσότερα από αυτές, απ' ό,τι ήταν βαλμένο αρχικά μέσα τους"

Heinrich Hertz

ΒΛ/01.Βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει εστία το $E(2,0)$

β) Έχει διευθετούσα την ευθεία $x = 3$ γ) Διέρχεται από το σημείο $A(9,6)$.

ΒΛ/02.Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει εστία $E(-2\sqrt{3},0)$

β) Έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και

περνά από το $A(8,4)$

γ) έχει διευθετούσα την ευθεία $y = -1$.

ΒΛ/03.Βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει εστία το $E(0,-4)$

β) Έχει διευθετούσα την

ευθεία $y = 2$

γ) Διέρχεται από το σημείο $A(4,2)$.

ΒΛ/04.Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

α) $y^2 = 6x$

β) $x^2 = 5y$

γ) $y^2 = -4x$

δ) $x^2 = -y$

ε) $y^2 = 8ax$

στ) $y = \frac{1}{2a}x^2$

ΒΛ/05.Α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 4x$ στο σημείο της $A(1,4)$.

Β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: x^2 = 8y$ στο σημείο της $A(4,2)$.

ΒΛ/06.Δείξτε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ είναι εφαπτομένη στην παραβολή $C: y^2 = 8x$.

ΒΛ/07.Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ αν η ευθεία $\varepsilon: y = x + k$ είναι εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 4x$.

ΒΛ/08.Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 4x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = x + 4$.

ΒΛ/09.Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C : x^2 = 6y$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : 2x + y - 1 = 0$.

ΒΛ/10.Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C : y^2 = 6x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = -\frac{1}{3}x + 2$.

ΒΛ/11.Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 16x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής, που διέρχεται από το $A(-1, -3)$.

ΒΛ/12.Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = -2x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής η οποία:

α) είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : x + y = 1$.

β) διέρχεται από το σημείο $A\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ γ) διέρχεται από το $A(-4, 3)$

ΒΛ/13.Βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής $C : y^2 = -8x$ που διέρχονται από το $\Sigma(2, 3)$ και αποδείξτε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΒΛ/14.Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x + 1$.

ΒΛ/15.Βρείτε την χορδή της παραβολής $C : y^2 = 4x$ που έχει μέσο το σημείο $A(3, 1)$.

ΒΛ/16.Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 10x$. Βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής που έχει μέσο το σημείο $M(1, 1)$. Βρείτε επίσης το μήκος της χορδής.

ΒΛ/17.Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135° . Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής;

ΒΛ/18.Έστω η παραβολή $C : y^2 = 2px$, με $p > 0$ και το σημείο της M . Αν E η εστία της παραβολής, αποδείξτε ότι ο κύκλος με διάμετρο EM εφάπτεται του άξονα yy' .

ΒΛ/19.Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 8x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής, που απέχει από την εστία της απόσταση $d = 5$.

ΒΛ/20.Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 8x$ και η οικογένεια των ευθειών με εξίσωση $(\lambda - 1)x + \lambda y + 2\lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την ευθεία της οικογένειας, η οποία εφάπτεται της παραβολής.

ΒΛ/21. Α) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(3t^2, -6t)$ και $P(2t, 4\sqrt{t})$, $t \in \mathbb{R}$.

Β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\Sigma\left(\frac{\eta\mu^2 t - 1}{2}, \text{cυν} t\right)$, $t \in \mathbb{R}$ και $N(2\eta\mu t, \text{cυν}^2 t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

ΒΛ/22. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 6x$. Αν M τυχαίο σημείο της να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου N της χορδής OM όπου $O(0,0)$.

ΒΛ/23. Έστω $C: y^2 = 4x$ παραβολή και το σημείο της M . Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου P αν $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$ με $O(0,0)$.

ΒΛ/24. Αν $A(3,0)$ και το σημείο $M(x_0, y_0)$ κινείται στην παραβολή $C: x^2 = 4y$ βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται το μέσο P του τμήματος AM .

ΒΛ/25. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 4\alpha x$ και στον άξονα yy' , $\alpha > 0$.

ΒΛ/26. Δίνεται η οικογένεια ευθειών $\lambda^2 x - \lambda y + 1 = 0$, όπου $\lambda \neq 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία διέρχεται μία μόνο ευθεία της οικογένειας.

ΒΛ/27. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4\alpha x$ και ένα σημείο της $\Sigma(x_0, y_0)$. Αν T η προβολή του Σ στη διευθετούσα, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο Σ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα TE .

ΒΛ/28. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2 = 4x$ και μία κορυφή του είναι το $O(0,0)$. Βρείτε το εμβαδόν του.

ΒΛ/29. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4\alpha x$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$, που τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο B .

Αποδείξτε ότι $\hat{AEB} = 90^\circ$.

ΒΛ/30. Θεωρούμε την εξίσωση $(\mu - 1)x + (\mu + 2)y - 2\mu + 2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Α. Αποδείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

Β. Δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο $E(2,0)$.

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $O(0,0)$, εστία το σημείο E . Να βρεθεί η διευθετούσα της.

Δ. Βρείτε την εφαπτόμενη της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) με εξίσωση: $y = 4x + 12$.

ΒΛ/31. Θεωρώ την παραβολή $C_1 : y^2 = 2px$ που έχει εστία το κέντρο του κύκλου $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$. Α) Να βρεθεί το p .

Β) Για $p = 2$ βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και μετά προσδιορίστε εκείνη που εφάπτεται και στον κύκλο.

ΒΛ/32. Θεωρώ την παραβολή $C_1 : y^2 = 4x$ και τον κύκλο $C_2 : 8x^2 + 8y^2 - 8x - 7 = 0$.

Α) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής ε, που διέρχεται από το $A(1, 2)$

Β) Δείξτε ότι η παραπάνω ευθεία εφάπτεται και στον κύκλο.

Γ) Βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη των C_1, C_2 που φέρεται από το σημείο τομής της ε με τον άξονα $x'x$.

Δ) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες.

ΒΛ/33. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 45x$ και το σημείο της $A(x_1, y_1)$ με $3x_1 = 2y_1$. Α) Βρείτε το A .

Β) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής στο A και τα σημεία τομής της Β, Γ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Γ) Βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ΟΒΓ κύκλου με $O(0, 0)$.

Δ) Βρείτε την εξίσωση του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ΟΒΓ κύκλου.

ΒΛ/34. Έστω M τυχαίο σημείο της παραβολής $C : y^2 = 2px$ διάφορο του $O(0, 0)$ και N η προβολή του στον άξονα yy' . Να δείξετε ότι η ευθεία ε που φέρεται από το N κάθετη στην ευθεία OM , περνά από σταθερό σημείο.

ΒΛ/35. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

(3^ο θέμα Πανελλαδικών 2002)

ΒΛ/36. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2 .

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες.

γ. Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο που το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

δ. Γράψτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O , άξονα συμμετρίας τον άξονα x' και διέρχεται από το σημείο M .

(3^ο θέμα Πανελλαδικών 2001)



Έλλειψη

«και πάντα τα γινωσκόμενα αριθμόν έχοντι . ου γαρ οίον τε ουδέν ούτε νοηθήμεν ούτε γνωσθήμεν άνευ τούτων»
Φιλόλαος

BM/01. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει εστίες τα σημεία $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και μεγάλο άξονα 10.

BM/02. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει τις εστίες της στον άξονα yy' , έχει κορυφές $B'(-2,0)$, $B(2,0)$ και μεγάλο άξονα 6.

BM/03. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $4x^2 + 9y^2 = 36$ παριστάνει έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες

BM/04. Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστιακή απόσταση 12 και εκκεντρότητα $3/5$.

BM/05. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που περνά από το σημείο $P(16,6)$ και έχει μεγάλο άξονα διπλάσιο από το μικρό.

BM/06. Γράψτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα τον x' και περνά από τα σημεία: $M(3,-4)$ και $N(-6,2)$.

BM/07. Γράψτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα τον x' και περνά από το σημείο $M(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και έχει εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

BM/08. Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κύριο άξονα τον άξονα x' , μεγάλο άξονα 10 και εκκεντρότητα $e = \frac{3}{5}$

BM/09. Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, που έχει κύριο άξονα τον άξονα yy' , κέντρο την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο $P(\sqrt{2}, 2)$ και έχει εστιακή απόσταση $EE' = 4$.

BM/10. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και το σημείο $M(1,1)$. Βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει το M ως μέσο και στη συνέχεια το μήκος αυτής .

BM/11. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ και το σημείο $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει το M ως μέσο.

BM/12. Α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : x^2 + 4y^2 = 10$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : 3x + 2y + 3 = 0$.

Β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : x - 4y + 4 = 0$.

Γ) Βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $C : 9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι κάθετες στην ευθεία $(\eta) : y = -x$.

BM/13. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης

$C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ που διέρχονται από το σημείο $\Sigma(3,4)$.

BM/14. Δίνεται η έλλειψη $C : x^2 + 4y^2 = 4$ και το σημείο $\Sigma(3,4)$. Αν $\Sigma A, \Sigma B$ οι εφαπτόμενες από το Σ προς την C , βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB που ορίζουν τα σημεία επαφής.

BM/15. Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $M(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$.

BM/16. Αν $M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο της $C : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $P(3x_0, 4y_0)$.

BM/17. Αν το σημείο $M(x_M, y_M)$ κινείται στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 4$ βρες το γεωμ. τόπο του σημείου $P(2x_M, 3y_M)$.

BM/18. Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο της έλλειψης $C : \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$, βρες το γ.τ. του σημείου Σ που έχει τετμημένη το ήμισυ της τετμημένης του M και την ίδια τεταγμένη.

BM/19. Αν το σημείο Σ κινείται στην έλλειψη $C : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$, βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου M αν ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$, με $O(0,0)$.

BM/20. Έστω έλλειψη $C : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Αν Σ μεταβλητό σημείο της και M τέτοιο που $\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{\Sigma M}$ με $O(0,0)$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M .

BM/21. Έστω έλλειψη $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

A) Αν η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ βρείτε το β .

B) Βρείτε την εφαπτομένη της C που είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: y = x + 1$.

Γ) Αν το σημείο $M(x_0, y_0)$ κινείται στην έλλειψη C βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο $\Sigma(x_0, 2y_0)$.

BM/22. Έστω έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{1} = 1$.

A) Αν η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ δείξτε ότι: $\alpha = 2$.

B) Δείξτε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής AB που έχει μέσο το σημείο $M\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ είναι $\lambda = \frac{1}{2}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της C που είναι παράλληλη στη χορδή AB .

Δ) Αν το σημείο $M(x_0, y_0)$ κινείται στην έλλειψη C βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο $\Sigma(2x_0, y_0)$ καθώς και το σημείο $P(x_0, 2y_0)$.

BM/23. Έστω έλλειψη $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

A) Αν η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$ δείξτε ότι $\beta = 2$.

B) Βρείτε την εφαπτομένη της C στο σημείο της $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Γ) Αν το σημείο $M(x_0, y_0)$ κινείται στην έλλειψη C βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο $\Sigma(2x_0, 3y_0)$.

BM/24. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$ και το σημείο $\Sigma(2, 2)$. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα μέσα των χορδών της έλλειψης, που περνούν από το Σ .

BM/25. Δίνεται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ και ο κύκλος

$C_2 : x^2 + y^2 = 5$. Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε από κάθε σημείο του κύκλου προς την έλλειψη είναι κάθετες μεταξύ τους.

BM/26. Μεταβλητό σημείο $M(x, y)$ κινείται στο επίπεδο, ώστε οι

συντεταγμένες του να ορίζονται από τις σχέσεις $x = \alpha \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}$ και

$y = \beta \frac{2\theta}{1 + \theta^2}$ με α, β σταθερές και θ μεταβλητή, $\theta \in [0, 2\pi)$. Αποδείξτε ότι

το M κινείται στην $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

BM/27. Στους άξονες x' και y' κινούνται αντίστοιχα τα σημεία A και B , ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να έχει σταθερό μήκος 2. Βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται το σημείο M της ευθείας AB , αν $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

BM/28. Δίνονται οι ελλείψεις: $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{\lambda\alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda\beta^2} = 1$.

Αποδείξτε ότι είναι όμοιες (έχουν την ίδια εκκεντρότητα)

BM/29. Υπολογίστε την εκκεντρότητα της

έλλειψης $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ του διπλανού σχήματος.

BM/30. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία E', E

είναι οι εστίες της έλλειψης: $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

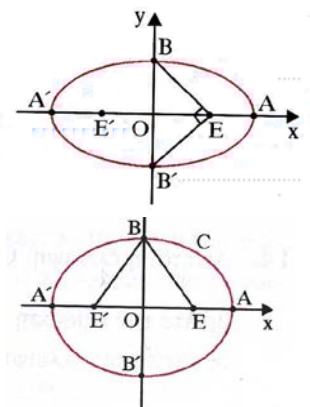
Αν το τρίγωνο $E'BE$ είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

BM/31. Στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$, μεγάλο άξονα τον AA' και

μικρό $B'B$, το τρίγωνο $BA'E$ είναι ορθογώνιο στο B . Βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

BM/32. Σε μια έλλειψη η κάθετη στον άξονα $x'x$ στην εστία E , τέμνει την έλλειψη στο Γ . Βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης, ώστε να είναι $A'B \parallel O\Gamma$.

BM/33. Δίνονται δύο κωνικές τομές: η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.



A. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right), E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ είναι οι εστίες

E, E' της έλλειψης.

B. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες . **(4^ο θέμα Πανελλαδικών 2003)**

BM/34. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Έστω M το σημείο του 1^{ου}

τεταρτημόριου όπου η διχοτόμος της 1^{ης} γωνίας των αξόνων τέμνει την έλλειψη C . Αν η εφαπτομένη της C στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda = -\frac{1}{4}$: **A)** Βρείτε την εκκεντρότητα της C .

B) Αν επιπλέον η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{6}, 0)$ και $E(\sqrt{6}, 0)$

τότε να βρείτε: **i)** Τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα,

ii) τις εφαπτόμενες της έλλειψης C που είναι κάθετες στην ευθεία $\eta : y = 2x + 2012$.



Υπερβολή

BN/01. Δίνονται οι υπερβολές $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ και $C': \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Να βρείτε τα στοιχεία των υπερβολών, την εκκεντρότητα τους και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων τους.

BN/02. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο $P(2, 3\sqrt{2})$ και έχει κορυφές $A(0, 3)$ και $A'(0, -3)$.

BN/03. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστίες $E'(-5, 0)$, $E(5, 0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

BN/04. Βρείτε την υπερβολή που έχει εστιακή απόσταση $4\sqrt{13}$, ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \pm \frac{2}{3}x$ και κύριο άξονα τον $x'x$.

BN/05. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτες $y = \pm \frac{3}{2}x$, που διέρχεται από το $P\left(\frac{10}{3}, 4\right)$.

BN/06. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη.

BN/07. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει κορυφές της τις εστίες της έλλειψης $C': \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και εστίες της τις κορυφές της έλλειψης.

BN/08. Βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$ αν η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της είναι 60° .

BN/09. Έστω η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Αν έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$, να βρείτε την οξεία γωνία των ασυμπτώτων της.

BN/10. Αν η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$.

BN/11. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ και το σημείο $M(1,3)$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB που έχει μέσο το M , καθώς και το μήκος της.

BN/12. Δίνεται η εξίσωση $C: \frac{x^2}{\lambda+2} + \frac{y^2}{\lambda+7} = 1$. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει υπερβολή και βρείτε τα στοιχεία της.

BN/13. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x + 5$. Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που είναι παράλληλη προς την ευθεία ε .

BN/14. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: x + y - 3 = 0$.

BN/15. Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 5$ και το σημείο $\Sigma(5,5)$ στο εξωτερικό της. Βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής που περνούν από το Σ .

BN/16. Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Δείξτε ότι κάθε χορδή παράλληλη προς τον άξονα της, φαίνεται από τις κορυφές της υπό ορθή γωνία.

BN/17. Δίνεται η υπερβολή $x^2 - 4y^2 = 4$ και το σημείο $\Sigma\left(2, \frac{1}{2}\right)$ που είναι μέσο χορδής $\Gamma\Delta$ της υπερβολής. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής που είναι παράλληλη προς τη $\Gamma\Delta$.

BN/18. Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $\varepsilon: y = 2$.

BN/19. Εστω σημείο $M(x_0, y_0)$ σημείο του επιπέδου έτσι ώστε

$$x_0 = \frac{2}{\eta\mu\theta} \text{ και } y_0 = \sqrt{5} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}, \text{ όπου } \theta \in (0, \pi). \text{ Βρείτε το γεωμετρικό τόπο}$$

του M όταν το θ μεταβάλλεται.

BN/20. Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - 4y^2 = 4$ και το σημείο $P(3, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα μέσα των χορδών της υπερβολής, των οποίων οι ευθείες περνούν από το P .

BN/21. Αν το σημείο M κινείται στην υπερβολή $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ βρείτε το γεωμ.τόπο του μέσου Σ του τμήματος OM με $O(0, 0)$.

BN/22. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων η απόσταση από το σημείο $A(0, 6)$ είναι τα $\frac{3}{2}$ της απόστασης από την ευθεία $\varepsilon: 3y - 8 = 0$.

BN/23. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 1$.

Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών $\Gamma\Delta$ της υπερβολής που είναι παράλληλες στην ε .

BN/24. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 0)$ και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$.

BN/25. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 1$ και της υπερβολής $C': \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$.

BN/26. Δίνεται η υπερβολή $C: \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$. Αν η εφαπτομένη της C σε τυχαίο σημείο της M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο N και Γ η προβολή του M στον $x'x$ να δείξετε ότι $OG \cdot ON = \text{σταθερό}'$.

BN/27. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

A) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε τη χορδή της AB που έχει ως μέσο το σημείο $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της C που είναι παράλληλη στην χορδή AB .

Ασκήσεις επανάληψης

BO/01. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με $|\vec{\alpha}| = 10\sqrt{5}$ αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ ώστε $\vec{\alpha}_1 = (-6, 12)$, βρείτε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}_2$.

BO/02. Αν $\vec{\alpha} = (4, 2)$ και $\vec{\beta} = (5, 0)$ να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ώστε: $\vec{x} \parallel \vec{\alpha}$, $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{\beta}$ και $\vec{x} \perp \vec{y}$.

BO/03. Βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{21}$.

BO/04. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{6}$ και $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ υπολογίστε τα $|\vec{\beta}|$ και $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

BO/05. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\sqrt{7}$ και $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

BO/06. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ βρείτε το $|\vec{v}|$ και τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{v})$ και $(\vec{v}, \vec{\beta})$.

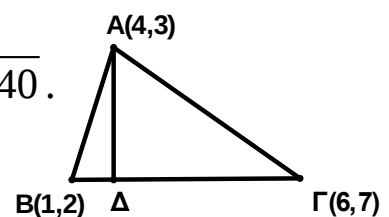
BO/07. Αν $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (5, 0)$:

A) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

B) Βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ αν $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

Γ) Βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ με $|\vec{x}| = \sqrt{40}$.

BO/08. Υπολογίστε τη γωνία $\hat{A}$ του διπλανού τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{A\Delta}$.



BO/09. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 1)$ βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ και το $\sin(\vec{\beta}, 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$.

BO/10. Αν $A(1,1)$, $B(4,2)$ και $\Gamma(3,x)$, βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο B .

BO/11. Έστω AM διάμεσος τριγώνου $AB\Gamma$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μοναδιαία και κάθετα διανύσματα. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ βρείτε το $|\overrightarrow{AM}|$, και τη γωνία $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$.

BO/12. Αν $A(0,1)$, $B(1,3)$, $\Gamma(3,2)$ βρείτε τη γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ και σημείο P τέτοιο που $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$.

BO/13. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{\gamma}$, $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3} - 1$ και $(\sqrt{3} + 1)\vec{\alpha} = \sqrt{3} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, απόδειξε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ότι $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OG}$. Βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$.

BO/14. Αν $AB = A\Gamma = B\Gamma = 2$.

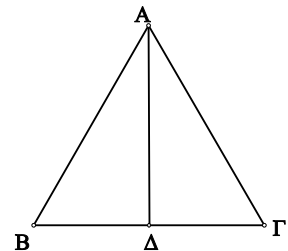
Υπολογίστε τα :

A) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

Γ) $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma \Delta}$

Δ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.



BO/15. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda - 5 = 0$:

A) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

BO/16. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 = 2x - 1$ (1).

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ που είναι κάθετες.

B) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το σημείο τομής A των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° .

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$ και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία A και B , έτσι ώστε το σημείο M να είναι μέσο του AB .

ΒΟ/17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$.

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ που είναι παράλληλες.

B) Αν $(\varepsilon_1): x + y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης (ε) των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

A) Αν A είναι ένα σημείο της ευθείας (ε_1) με τεταγμένη 2 και B ένα σημείο της ευθείας (ε_2) με τετμημένη 1, να βρείτε τα σημεία A και B.

B) Να βρείτε τις συντεταγμένες δυο σημείων Γ και Δ της ευθείας (ε) , έτσι ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι τετράγωνο.

ΒΟ/18. Έστω τα σημεία $A(\lambda + 2, 2\lambda + 1)$, $B(\lambda - 3, 3\lambda - 2)$ και $\Gamma(0, 3\lambda - 5)$.

A) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

B) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$, όπου $O(0, 0)$.

Γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο στο B.

Δ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $(AB\Gamma) = 8$.

ΒΟ/19. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x - |\vec{\alpha}|y + 2 = 0$, η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, -1)$.

A) Να δείξετε ότι: $|\vec{\beta}| \geq 2$.

B) Αν το $|\vec{\beta}|$ παίρνει τη ελάχιστη τιμή του και A, B τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες, να βρείτε:

B1) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου που είναι μέσα του AB.

B2) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $N(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{NA} = 2 \cdot \overrightarrow{BN}$.

ΒΟ/20. Αν $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ υπολογίστε τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

ΒΟ/21. Βρείτε σημείο M της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ με μεγάλο άξονα

A'A ώστε $\widehat{AMO} = 90^\circ$ με $O(0, 0)$.

BO/22. Αν η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της υπερβολής: $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τις ασύμπτωτές της στα A, B δείξτε ότι το M είναι μέσο του AB .

BO/23. Αν $C: \frac{x^2}{29-\lambda} + \frac{y^2}{4-\lambda} = 1$, βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η C είναι έλλειψη, για ποιες υπερβολή και σε κάθε περίπτωση βρείτε τις εστίες.

BO/24. Αν μια χορδή $B\Gamma$ της παραβολής $C: y^2 = 4x$ διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$ να δείξετε ότι: $OB \perp O\Gamma$.

BO/25. Αν η παραβολή $C: y^2 = 2px$ διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ βρείτε την εφαπτομένη της που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

BO/26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$.

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

B) Έστω ότι η ευθεία $(\zeta): x + 2y - 8\lambda = 0$ τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν M το μέσο του τμήματος AB , τότε B1) να δείξετε ότι $M(2 - 2\lambda, 5\lambda - 1)$.

B2) να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, το σημείο M κινείται σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

BO/27. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ κάθετες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να βρείτε το σημείο τομής M των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

Γ) Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο M καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

BO/28. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0$.

A) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

B) Αν $(\varepsilon_1): x + y + 2 = 0$, $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$, να βρεθεί το σημείο τομής M των ευθειών.

Γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με τον άξονα $y'y$.

Δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-2,0)$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2.

ΒΟ/29. Έστω τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\lambda+1, 3\lambda-2)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τα σημεία A, B και Γ είναι κορυφές τριγώνου.

B) Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ανεξάρτητο του λ .

Γ) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ κινείται σε ευθεία (ε) παράλληλη στην AB .

Δ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό και ανεξάρτητο του λ .

ΒΟ/30. Έστω η εξίσωση: $(x-2)^2 + y(y-1) - 25 + \lambda(x-2y+5) = y-1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1).

A) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από δυο σταθερά σημεία A, B και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής AB .

Γ) Αν το κέντρο του κύκλου C που παριστάνει η (1) ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): 3x-2y-4=0$, να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΒΟ/31. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 + y^2 - (3\alpha+2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, (1) με $\alpha \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ) Έστω ο κύκλος C που προκύπτει από την (1) για $\alpha=2$ και η ευθεία $y=\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ που τέμνει τον κύκλο σε σημείο A διαφορετικό του $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας που διέρχεται από το $O(0,0)$.

ΒΟ/32. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 2$ και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2 + \lambda(x-y+2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1).

A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(-1, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει κύκλο

Γ) Να βρείτε τι παριστάνει η (1) για $\lambda=2$.

Δ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

E) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται στην ευθεία (ε) .

ΣΤ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η (1).

ΒΟ/33. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 + 4kx + 2ky + 3k^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους, βρείτε το σημείο τομής τους καθώς και το γεωμ. τόπο του σημείου τομής τους.

ΒΟ/34. Α) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) , (ε_2) .

Β) Αν η ευθεία $(\eta): x + 2y - 8\lambda = 0$ τέμνει τις (ε_1) , (ε_2) στα σημεία Α, Β και Μ το μέσο του ΑΒ:

Β1) Βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

Β2) Δείξτε ότι το Μ κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΒΟ/35. Αν η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο $P(-1, 3)$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β ώστε το Ρ να είναι το μέσο του ΑΒ:

Α) Βρείτε την εξίσωση της (ε_1) .

Β) Αν $\Gamma(-5, 1)$ και $\Delta(2\alpha - 1, 5 - 4\alpha)$ και το Δ ανήκει στην (ε_1) :

Β1) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

Β2) Βρείτε τη μεσοκάθετο (ε_2) του ΓΔ.

Β3) Βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι (ε_1) και (ε_2) .

ΒΟ/36. Θεωρούμε τις εξισώσεις: $\lambda x + (2 - \lambda)y + \lambda + 4 = 0$ (1)

$(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda^2 - 1 = 0$ (2).

Α) Για ποιες τιμές του λ η (2) παριστάνει ευθεία;

Β) Για ποια τιμή του λ η (2) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και για ποιες στον $y'y$;

Γ) Για ποια τιμή του λ η (2) διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$;

Δ) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Ε) Βρείτε τα λ ώστε οι ευθείες που παριστάνουν οι (1) και (2) να είναι παράλληλες.

ΒΟ/37. Α) Έστω $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ κύκλος και $\varepsilon: x + y + 1 = 0$ ευθεία.

Α) Δείξτε ότι ο κύκλος και η ευθεία δεν τέμνονται.

Β) Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο και το Ν στην ευθεία βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|\overrightarrow{MN}|$.

ΒΟ/38. Οι ευθείες $(\varepsilon_1): (\lambda - 1)x + \lambda y + 1 - 3\lambda = 0$ και $(\varepsilon_2): (4 - \lambda)x + (6 - \lambda)y - \lambda = 0$ είναι παράλληλες.

Α) Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

Β) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

Γ) Να βρείτε ευθεία (η) τέτοια ώστε η (ε_2) να είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών (ε_1) και (η) .

ΒΟ/39. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 6)$.

Α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M της ευθείας (ε) το οποίο ισαπέχει από τα A και B .

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABM .

Γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $(KAB) = (MAB)$ είναι δυο ευθείες.

ΒΟ/40. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: (\lambda - 1)x - (\lambda + 5)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x + (\lambda + 1)y + \lambda + 3 = 0$.

Α) Βρείτε διανύσματα $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$.

Β) Δείξτε ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ) Βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

ΒΟ/41. Αν το $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στον κύκλο $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ να βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $N(3\alpha - 1, 3\beta + 2)$.

ΒΟ/42. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

Α) Βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να παριστάνει κύκλο.

Β) Δείξτε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο.

Γ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων τους.

ΒΟ/43. Έστω $A(3\lambda - 1, \lambda + 5)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(11, 5)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου A .

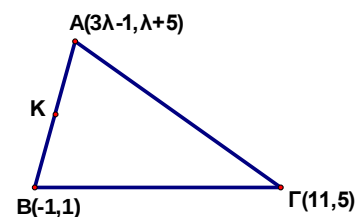
Β) Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

Γ) Για $\lambda = 2$:

i) Βρείτε το μέσο K της AB .

ii) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο AB .

iii) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με διάμετρο AB



στο σημείο του A .

ΒΟ/44. Θεωρούμε την υπερβολή: $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ με εκκεντρότητα

$$e = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Α) Δείξτε ότι: $\alpha = 2$.

Β) Βρείτε τη χορδή της υπερβολής που έχει ως μέσο το σημείο $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που είναι παράλληλη στην AB .

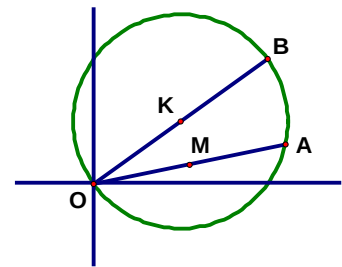
ΒΟ/45. Θεωρούμε τον κύκλο C που έχει ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$, διέρχεται από το $O(0,0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\eta): y = x$.

Α) Βρείτε το κέντρο του αν γνωρίζουμε ότι ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο.

Β) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .

Γ) Βρείτε το σημείο του κύκλου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το $O(0,0)$.

Δ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M των χορδών OA του κύκλου που έχουν ως ένα άκρο το $O(0,0)$.



ΒΟ/46. Θεωρούμε τον κύκλο C που έχει κέντρο $K(3,3)$ και εφάπτεται στην ευθεία: $(\eta): x - y - 4 = 0$.

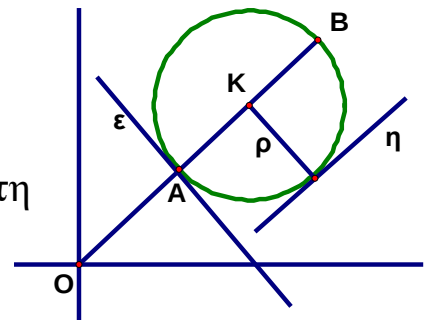
Α) Βρείτε την ακτίνα του ρ .

Β) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .

Γ) Βρείτε το σημείο A του κύκλου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$.

Δ) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του A .

Ε) Αν το σημείο Σ κινείται στον κύκλο C , βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου M που είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $O\Sigma$.



ΒΟ/47. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-1,-1)$, $B(5,1)$ και $\Gamma(3\lambda-1, \lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

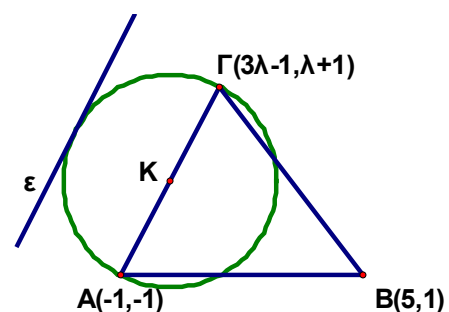
Α) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Γ .

Β) Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό.

Γ) Για $\lambda = 2$:

i) Βρείτε το μέσο K του $A\Gamma$.

ii) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την πλευρά $A\Gamma$.



iii) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου που είναι παράλληλη στην ΑΓ.

ΒΟ/48. Δίνεται ο κύκλος $C : (x-1)^2 + (y-7)^2 = 9$ και το σημείο $A(1,1)$.

A) Να δείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό σημείο του C.

B) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ του C που διέρχονται από το A.

Γ) Να βρείτε την οξεία γωνία των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

ΒΟ/49. Έστω ο κύκλος C_1 με κέντρο $K(1, -2)$ που εφάπτεται εσωτερικά του $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$.

A) Να βρείτε την εξίσωση του C_1 .

B) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_1, C_2 .

ΒΟ/50. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ και η ευθεία (ε) : $3x - 4y - 10 = 0$.

A) Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο C.

B) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει η ευθεία (ε) από ένα σημείο του κύκλου C.

ΒΟ/51. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

A) Να βρείτε τη σχετική θέση των δυο κύκλων.

B) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο του C_1 από ένα σημείο του C_2 .

ΒΟ/52. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (2\lambda - 4)y - 4\lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση ανήκουν σε μια ευθεία για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ) Αν ο κύκλος C που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ και την εφαπτομένη του C στο A.

ΒΟ/53. Έστω $\vec{\alpha} = (3, 1)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$.

A) Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

B) Βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Γ) Αναλύστε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η

μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$.

Δ) Βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ κάθετο στο $\vec{a}$ με μέτρο $2\sqrt{10}$.

BO/54. Δίνονται τα σημεία $A(0, -2)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(\kappa - 1, 2 - 3\kappa)$.

A) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

B) Να αποδειχθεί ότι το σημείο Γ κινείται σε σταθερή ευθεία καθώς το κ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Γ) Να βρεθεί για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A .

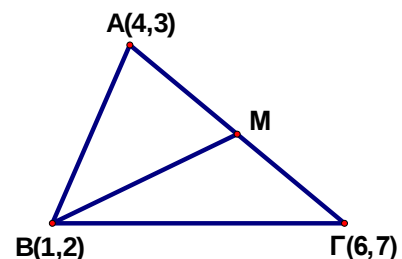
Δ) Να βρεθεί για ποια τιμή του κ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση AB .

BO/55. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4, 3)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(6, 7)$.

A) Βρείτε τη γωνία A του τριγώνου.

B) Αν BM η διάμεσος υπολογίστε το $|\overrightarrow{BM}|$.

Γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



BO/56. Αν η έλλειψη: $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + y^2 = 1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

A) Δείξτε ότι: $\alpha = 2$.

B) Δείξτε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής AB της έλλειψης που έχει μέσο το σημείο $M\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ είναι $\lambda = \frac{1}{2}$ και βρείτε την εξίσωσή της.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που είναι παράλληλη στην AB .

Δ) Αν το σημείο $M(x_0, y_0)$ κινείται στην έλλειψη C βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $\Sigma(2x_0, y_0)$.

BO/57. Αν $\varepsilon_1: (\mu - 3)x + 4y - \mu = 0$ και $\varepsilon_2: 4x + (\mu + 3)y + 1 = 0$ βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

BO/58. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, βρείτε:

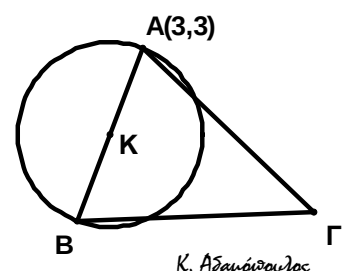
A) Το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, B) το $|\vec{v}|$ αν $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ Γ) το $\vec{v} \cdot \vec{\beta}$ και Δ) την $(\vec{v}, \vec{\beta})$.

BO/59. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, 3)$

και κύκλος διαμέτρου AB με εξίσωση:

$$C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

A) Βρείτε το B .



Β) Βρείτε το γεωμ. τόπο του Γ αν το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι 6 τ. μονάδες.

Γ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο A .

Δ) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου που είναι παράλληλη στην AB .

ΒΟ/60. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο κάθετες ευθείες, να βρεθεί το σημείο τομής τους (συναρτήσει του λ) καθώς και ο γεωμ. τόπος του σημείου τομής.

ΒΟ/61. Αν $\vec{\alpha} = (\mu + 1, 1)$, $\vec{\beta} = (1, 2\mu + 1)$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$:

Α) δείξτε ότι $\mu = 1$.

Β) Υπολογίστε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Γ) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν τα διανύσματα: $\vec{\delta}_1 = \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}_2 = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Δ) Αναλύστε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\gamma} = (2, 3)$.

ΒΟ/62. Θεωρούμε την ευθεία: $(\varepsilon) : (1 - \sin\theta)x + (1 + \sin\theta)y - 1 = 0$ με $\theta \in (0, \pi)$.

Α) Δείξτε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\theta \in (0, \pi)$.

Β) Δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

Γ) Από τις παραπάνω ευθείες βρείτε εκείνη που απέχει από το $O(0, 0)$

απόσταση $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Δ) Βρείτε το θ αν η (ε) εφάπτεται σε κύκλο κέντρου $K(1, 1)$ και $\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ΒΟ/63. Θεωρούμε την παραβολή $C : y^2 = 2px$. Φέρω την εφαπτομένη στο σημείο της M , που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Αν η κάθετη στην εφαπτομένη στο M τέμνει τον $x'x$ στο σημείο B , δείξτε ότι η εστία E είναι το μέσο του AB .

ΒΟ/64. Θεωρούμε την παραβολή $C : y^2 = 2px$ με εστία E . Από τυχαίο σημείο A του άξονα $y'y$ φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στην AE στο A . Να δείξετε ότι η (ε) είναι εφαπτομένη της παραβολής.

ΒΟ/65. Θεωρούμε την έλλειψη $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta$. Αν

$\alpha^2 = 2\beta^2 - 7$ και η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Α) Βρείτε τα α, β .

Β) Δείξτε ότι η χορδή AB που έχει μέσο $M\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{5}$ και βρείτε την εξίσωσή της.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης που είναι παράλληλη της AB.

ΒΟ/66. Θεωρούμε την έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ που εφάπτεται στην ευθεία (ε): $y = -x + 4$.

Α) Βρείτε το a^2 .

Β) Βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης που είναι κάθετες στην (ε).

ΒΟ/67. Αν $E'(0, -2\sqrt{2})$ και $E(0, 2\sqrt{2})$ οι εστίες μια έλλειψης C με εκκεντρότητα $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$: Α) Βρείτε την εξίσωσή της.

Β) Βρείτε τις εφαπτόμενές της που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

ΒΟ/68. Έστω $\varepsilon_1: 2x + \alpha y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: \beta x + 4y + \gamma = 0$ δύο ευθείες που είναι κάθετες και τέμνονται στο σημείο $A(2,1)$.

Α) Βρείτε τους αριθμούς α, β, γ .

Β) Θεωρούμε τα σημεία $B(3,8)$ και $\Gamma(10,-13)$:

i) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 που διέρχεται από τα B, Γ .

ii) Βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_3$.

iii) Βρείτε το σημείο M της ε_3 που ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

iv) Αν είναι $M(5,2)$ να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο M και απέχουν από το σημείο Γ απόσταση ίση με 5.

ΒΟ/69. Αν $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$:

Α) Δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$

Β) Αν $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ βρείτε το $|\vec{\gamma}|$ και τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

ΒΟ/70. Θεωρώ την εξίσωση: $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του κέντρου του είναι μια ευθεία (ε).

Γ) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ακτίνα του να είναι 4.

Δ) Αν $\rho = 4$ βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε).

ΒΟ/71. Έστω η εξίσωση: $(x^2 + y^2 - 4x + 2y) + \lambda(x + y - 2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$

Α) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}.$

Β) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του κέντρου του είναι μια ευθεία (ε).

Γ) Δείξτε ότι ο κύκλος διέρχεται από δύο σταθερά σημεία Α, Β.

Δ) Αν $\lambda = 2$ βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $3x - 4y + 1 = 0.$

Ε) Αν $\lambda = 2$ βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ.

ΒΟ/72. Θεωρώ τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (y - 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (y + 1, 1 - 4x).$

Α) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να δείξετε ότι ο γεωμ. τόπος του $M(x, y)$ είναι η παραβολή: $C_1 : y^2 = 4x.$

Β) Αν $|5\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 3\sqrt{2}$ να δείξετε ότι ο γεωμ. τόπος του $N(x, y)$ είναι ο

κύκλος: $C_2 : (x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}.$

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής C_1 που είναι παράλληλη στην ευθεία: (η): $x - y + 4 = 0$ και αποδείξτε ότι εφάπτεται και στο κύκλο $C_2.$

Δ) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής C_1 που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου $C_2.$

Ε) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής C_1 που απέχουν από την εστία της απόσταση 1.

ΒΟ/73. Αν $O(0,0)$ θεωρώ τα διανύσματα: $\vec{OA} = (-1, y)$ και $\vec{OB} = (2x, y).$

Δ1) Αν $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ να δείξετε ότι ο γεωμ. τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι η παραβολή: $C_1 : y^2 = 2x$ και να βρείτε την εστία.

Δ2) Αν $3\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 = 15$ δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι ο κύκλος C_2 κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{3}.$

Δ3) Βρείτε τα κοινά σημεία Α και Β του κύκλου και της παραβολής, όπου Α το σημείο με θετικές συντεταγμένες.

Δ4) Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο ένα από τα κοινά σημεία είναι παράλληλη της εφαπτομένης της παραβολής στο άλλο από τα κοινά σημεία.

Δ5) Βρείτε τη χορδή του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α και έχει μήκος $2\sqrt{2}$.

ΒΟ/74. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$:

Α) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$.

Β) Βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Γ) Δείξτε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$.

ΒΟ/75. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2 = 2x \ln \theta + \ln^2 \theta + 4 \ln \theta$ (1), όπου $\theta > 0$.

Α) Να βρείτε τις τιμές του θ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Για τις παραπάνω τιμές του θ , να βρείτε αυτές για τις οποίες:

Β) Η ευθεία (ε): $x + 2015y = \ln(2 - \theta)$ διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου

Γ) Η ευθεία (ζ): $y = x + 4$ εφάπτεται του κύκλου.

ΒΟ/76. Αν $\vec{\alpha} = (x - 2, 2y + 1)$, $\vec{\beta} = (x + 2, 2y - 1)$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$:

Α) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του σημείου $M(x, y)$ είναι η έλλειψη

$$C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Β) Βρείτε την εκκεντρότητα της C.

Γ) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης που είναι παράλληλες στην ευθεία AB, (AA' ο μεγάλος και BB' ο μικρός άξονας)

Δ) Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ κινείται στην έλλειψη C βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου $\Sigma\left(\frac{x_0}{4}, \frac{y_0}{2}\right)$.

Ε) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης ΡΣ.

ΒΟ/77. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\alpha x + 2\beta y - 1 = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta^2 = 6\alpha$.

Α) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Β) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του κέντρου του κύκλου είναι μια παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία.

Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ακτίνα του κύκλου να είναι 7.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $x - 2y + 1 = 0$.

ΒΟ/78. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x + (\lambda + 1)y + \lambda - 4 = 0$ (1).

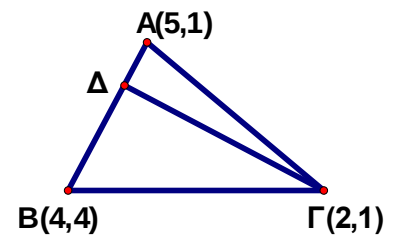
- Γ1) Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Γ2) Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.
 Γ3) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο η ευθεία που παριστάνει η (1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

ΒΟ/79. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (1,3)$.

- B1) Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. B2) Βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
 B3) Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

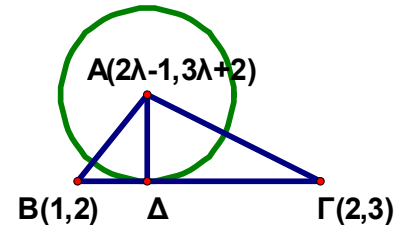
ΒΟ/80. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ:

- A) Βρείτε τις εξισώσεις της πλευράς BΓ και του ύψους AΔ.
 B) Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το $O(0,0)$ άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο Γ.
 Γ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στη BΓ.
 Δ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.



ΒΟ/81. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ:

- A) Βρείτε το γεωμ. τόπο του Α.
 Για $\lambda=1$, βρείτε:
 B) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
 Γ) Την απόσταση του Α από την ευθεία BΓ.
 Δ) την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Α που εφάπτεται στη BΓ.
 Ε) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΓ.



ΒΟ/82. Αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$:

- A) Δείξτε ότι η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + 2|\vec{\alpha}|x - 4|\vec{\beta}|y + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 B) Αν ο κύκλος διέρχεται από το $O(0,0)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2|\vec{\alpha}| + 4|\vec{\beta}|$ εφάπτεται του C στο σημείο $A(-2|\vec{\alpha}|, 4|\vec{\beta}|)$
 B1) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. B2) Δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$.

B3) Αν επιπλέον $\vec{\alpha} = \left(\frac{|\vec{\alpha}|}{2}, -\sqrt{3} \right)$ βρείτε την εξίσωση του κύκλου, το

κέντρο και την ακτίνα του.

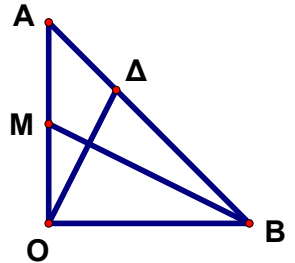
BO/83. Έστω τρίγωνο OAB ισοσκελές και ορθογώνιο στο A.

Στην AB παίρνουμε το σημείο Δ ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$.

Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$:

A) Να εκφράσετε τα $\vec{OD}$ και $\vec{BM}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

B) Να δείξετε ότι διάνυσμα $\vec{OD}$ είναι κάθετο στο $\vec{BM}$.



BO/84. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

B) Δείξτε ότι το κέντρο του παραπάνω κύκλου κινείται σε μια ευθεία.

Γ) Θεωρούμε τον κύκλο C_1 που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $\eta: 3x + y - 6 = 0$, καθώς και την παραβολή C_2 με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x' και εστία το σημείο $E(-1, 0)$.

Γ1) Βρείτε τις εξισώσεις των C_1, C_2 .

Γ2) Βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_1, C_2 .

BO/85. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις ευθείες (ε_λ) με εξίσωση: $(\varepsilon_\lambda): x + (\lambda + 2)y + 1 - \lambda = 0$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda, 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι από τις παραπάνω ευθείες αυτή που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι η $x + y + 2 = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της από αρχή των αξόνων.

B) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ) Να αποδείξετε ότι από τις παραπάνω ευθείες αυτή που απέχει τη μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι η $(\varepsilon_1): 3x - y + 10 = 0$.

Δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο M της (ε_1) με τεταγμένη $\frac{\vec{\alpha}}{2}$ όπου $\vec{\alpha} = (-1, 1)$ και απέχουν από το σημείο

A(1,1) απόσταση ίση με $\sqrt{8}$.

ΒΟ/86. Θεωρούμε τον κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(0,6)$. Α) Να δείξετε ότι $C : x^2 + (y-4)^2 = 4$.

Β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .

Γ) Από τα σημεία του κύκλου να βρείτε εκείνο που απέχει την μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων και εκείνο που απέχει την ελάχιστη και στη συνέχεια να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων θέσης των σημείων αυτών.

Δ) Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου με τις εφαπτομένες του ερωτήματος Β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το $O(0,0)$ και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 .

ΒΟ/87. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, καθώς και η εξίσωση: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1)x + (2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})y + 4 = 0$ (1).

Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθείες για κάθε τιμή του $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \in \mathbb{R}$, οι οποίες διέρχονται από σταθερό σημείο.

Β) Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία που παριστάνει η (1) διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις: $|2\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \frac{\vec{\beta}^2}{2} :$$

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία $(\varepsilon) : x - 3y - 8 = 0$.

Δ) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται στον κύκλο

$$C : (x - \kappa)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{10}.$$

ΒΟ/88. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x - 1, y + 2)$, $\vec{\beta} = (2x + 1, y - 2)$.

Α) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 των σημείων $M(x, y)$ είναι μια έλλειψη της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

Β) Αν ισχύει: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + 12y^2 - 64 = 0$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_2 των σημείων $N(x, y)$, είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ) Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που ανήκουν και στους δυο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους C_1, C_2 .

Δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το σημείο $A(2,2)$.

ΒΟ/83. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ώστε $|2\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και

$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = -6$ και ο κύκλος:

$$C: x^2 + y^2 - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 5)x - |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|y + 9 = 0.$$

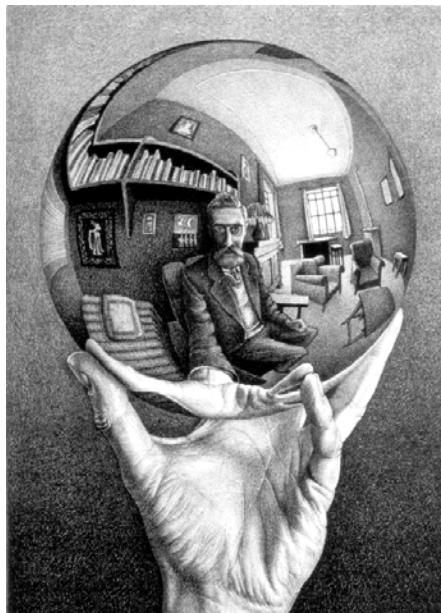
A) Να δείξετε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. B) Να δείξετε ότι $\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \neq 0$.

Γ) Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

Δ) Να βρείτε τον αριθμό κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

E) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του

$$B\left(\frac{\vec{\beta}^2}{2} + |\vec{\alpha}|, (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})^2 + 2|\vec{\alpha}|\right).$$



Ερχόμαστε από μια σκοτεινή άβυσσο. Καταλήγουμε σε μια σκοτεινή άβυσσο. Το ενδιάμεσο φωτεινό διάστημα το λέμε Ζωή.

Ευτός ως γεννηθούμε, αρχίζει η επιστροφή. Ταυτόχρονα το ξεκίνημα και ο γυρισμός. Κάθε στιγμή πεθαίνουμε. Γι αυτό πολλοί διαλάλησαν:Σκοπός της ζωής είναι ο θάνατος.

Μα ευτός ως γεννηθούμε, αρχίζει κι η προσπάθεια να δημιουργήσουμε, να συνθέσουμε, να κάμουμε την ύλη ζωή. Κάθε στιγμή γεννιόμαστε. Γι αυτό πολλοί διαλάλησαν: Σκοπός της εφήμερης ζωής είναι η αθανασία.

Στα πρόσκαιρα ζωντανά σώματα τα δυο τούτα ρέματα παλεύουν:

- α) ο ανήφορος, προς τη σύνθεση, προς τη ζωή, προς την αθανασία,*
- β) ο κατήφορος, προς την αποσύνθεση, προς την ύλη προς τον θάνατο.*

Και τα δύο ρέματα πηγάζουν από τα έγκατα της αρχέγονης ουσίας. Στην αρχή η ζωή ξαφνιάζει, σαν παράνομη φαίνεται σαν παρά φύση, σαν εφήμερη αντίδραση στις σκοτεινές αιώνιες πηγές. Μα βαθύτερα νιώθουμε: η Ζωή είναι κι αυτή άναρχη, ακατάλυτη φόρα του Σύμπαντου. Αλλιώς πούθε η περάνθρωπη δύναμη που μας σφεντονίζει από το αγέννητο στο γεννητό και μας γκαρδιώνει – φυτά, ζώα, ανθρώπους – στον αγώνα; Και τα δύο ρέματα είναι άγια.

Χρέος μας λοιπόν να συλλάβουμε τ' όραμα που χωράει κι εναρμονίζει τις δύο τεράστιες τούτες άναρχες, ακατάλυτες ορμές, και με τ' όραμα τούτο να ρυθμίσουμε το στοχασμό μας και την πράξη.

*Νίκος Καζαντζάκης
(Εισαγωγή στην «Ασκητική»)*